第 2 卷 第 1 期 1978 年 1 月
高能物理与核物理
PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS
Vol. 2, No. 1 January, 1978

具有同样 $SU(2)$ 场强与外源的不等价规范势

侯伯宇
(西北大学物理系)

摘要

分析了在同样场强与外源下具有不等价势的情况的若干共同物理特征并给出直观的几何图象. 这时,场强与源在时空各点的特征方向形成无挠的曲线族,它具有正交超曲面族,在各超曲面上场是可 Abel 化的(有时甚至是平庸的),在各面上存在平移不变的 Higgs 方向场,在各面上绕 Higgs 方向转同样规范角,不同面上转不同规范角产生的势的变更不改变场强与源.

1. 问题的提出: 电磁势、场强、积分相因子何者是描述电磁场物理性质的基本可观察量,这个问题具有细致而又有深刻的物理意义[1]. 在非 Abel 规范场时,仅仅知道场强 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 更是不够的,这时可能对应有规范不等价的势 $\mathbf{W}_\mu$,还可能伴有不同的外源流 $\mathbf{J}_\mu$[2].(场强允许及不允许有规范不等价势的情况近来有众多的讨论[2-9]). 虽然在相同的场强下规范场自作用的能量动量必然是一样的,但是只要外源流 $\mathbf{J}_\mu$ 不同,与外场耦合的能量动量就可以不一样,物理上就容易区别,因此有必要讨论更细致的问题: 在场强与源都给定的条件下是否还允许有规范不等价的势. 夏道行等[3] 已对此作了非常详细的大量讨论,并举出了一些颇有兴趣的例子.

本文注意到这些非唯一情况的共同物理特征: 例如所允许的势的变更在时空各点的时空方向是无挠的 (twistfree, 即有正交超曲面族[9]); 而同位旋方向在此超曲面族上是平移不变的. 上述时空方向是由场强及源决定的特征方向,场强与源的特征方向具有无挠性是允许有不确定势的必要条件. 此种场强的共同物理特征是在上述超曲面族上可约化[和乐群为 $U(1)$ 或平庸的],而势的允许变更则为各超曲面上分别取无关的整体规范变换"产生"的.

2. 势不确定的充要条件[10]: 给定 $\mathbf{W}_\mu$ 则得

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + [\mathbf{W}_\mu, \mathbf{W}_\nu], \tag{1}$$

$$\mathbf{J}_\nu = \partial^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} + [\mathbf{W}^\mu, \mathbf{F}_{\mu\nu}] \equiv \nabla^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu}, \tag{2}$$

如存在 $\mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \delta\mathbf{W}_\mu$ 给出同样的 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 及 $\mathbf{J}_\nu$, 充要条件是

$$\delta\mathbf{J}_\nu \equiv [\delta\mathbf{W}^\mu, \mathbf{F}_{\mu\nu}] = 0 \tag{3}$$

及

$$\delta\mathbf{F}_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu \delta\mathbf{W}_\nu - \nabla_\nu \delta\mathbf{W}_\mu + [\delta\mathbf{W}_\mu, \delta\mathbf{W}_\nu] = 0. \tag{4}$$

本文 1977 年 8 月 12 日收到.

时常还利用 Bianchi 等式的变更作为必要条件:

$$\delta^* \mathbf{J}_\nu \equiv [\delta \mathbf{W}^\mu, {}^*\mathbf{F}_{\mu\nu}] = 0. \tag{5}$$

3. 如势的变更 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 是同位旋一维的(以下将看到除了 7 节末提到的情况外在给定 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$、$\mathbf{J}_\mu$ 时允许的 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 都是一维的)则此 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 的时空部分构成"梯度"场(从而必然无挠而为超曲面族的法线). 证明如下: 如

$$\delta \mathbf{W}_\mu(x) = \mathbf{e}(x) u_\mu(x), \tag{6}$$

式中: $\mathbf{e}(x)$ 为 $SU(2)$ 伴随空间(同位旋空间)单位矢量 $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \equiv -2tr(\mathbf{ee}) = 1$. 将之代入 (4) 式得到

$$\mathbf{e}(\partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu) + u_\mu \nabla_\nu \mathbf{e} - u_\nu \nabla_\mu \mathbf{e} = 0. \tag{7}$$

注意到 $\mathbf{e} \cdot \nabla_\mu \mathbf{e} = 0$, 又可将 (7) 式分解为:

$$\delta F^{\parallel}_{\mu\nu} \equiv \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu u_\nu - \partial_\nu u_\mu = 0 \tag{8}$$

及

$$\delta \mathbf{F}^{\perp}_{\mu\nu} \equiv [[\mathbf{e}, \mathbf{F}_{\mu\nu}], \mathbf{e}] = u_\mu \nabla_\nu \mathbf{e} - u_\nu \nabla_\mu \mathbf{e} = 0. \tag{9}$$

由 (8) 得

$$u_\mu(x) = \partial_\mu \lambda(x), \tag{10}$$

即 u_μ 为"梯度"场,具有正交超曲面族 S_λ: $\lambda(x) =$ 常数. 而 (9) 式则意味着 $\mathbf{e}(x)$ 在原有势 $\mathbf{W}_\mu$ 决定的平移法则下在各个超曲面 S_λ 上是平移场,[即要求原有场在各个子流形 S_λ 上可约化为以 $\mathbf{e}(x)$ 为产生子的 $U(1)$ 场, 参看 5 节等例子]. 仅在不同的超曲面 S_{λ_1}、$S_{\lambda_1+\epsilon\lambda}$ 间移动时可能非平移. 而 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 就是绕此 $\mathbf{e}(x)$ 作规范转动角 $\lambda(x)$ 的产物.

以上只考虑了给定 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 不变的条件, 以下考虑到 $\mathbf{J}_\mu$ 不变的条件, 将 u_μ 与 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 的本征方向连系起来.

4. 在与势的变更 (6) 的同位旋方向 $\mathbf{e}$ 正交的方向上的场强 $\mathbf{F}^{\perp}_{\mu\nu}$ 或为零、或为类光的: (6) 代入 (3)、(5) 得

$$u^\mu \mathbf{F}^{\perp}_{\mu\nu} = 0, \qquad u^{\mu *}\mathbf{F}^{\perp}_{\mu\nu} = 0. \tag{11}$$

由(11)易见 $\mathbf{F}^{\perp}_{\mu\nu}$ 的不为零的各同位旋分量都是代数特殊的类光双矢[7](满足 $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu} = 0$), 而 u_μ 是 $F_{\mu\nu}$ 的类光本征矢, $u_\mu u^\mu = 0$. 相应的正交超曲面族是类光的, u_μ 既是"法线"又是切线. 由 (9) 式还可得 $u^\mu \nabla_\mu \mathbf{e} = 0$, 即 $\mathbf{e}$ 的方向沿特征线传播时是平移的.

以下,具体分析允许 $\delta W_\mu \neq 0$ 的场强及源的性质,为此,依场强的同位旋维数的不同分开讨论.

5. 设场强同位旋一维 $[\mathbf{F}_{\mu\nu}, \mathbf{n}] = 0$, 而且 $\mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{n} \equiv F^{\parallel}_{\mu\nu}$ 不是类光的, [式中 $\mathbf{n}$ 为同位旋单位矢, 以下为方便起见, 恒取 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ 的局部规范]. 则由 (3)、(5) 得 $\delta \mathbf{W}^{\perp}_\mu = 0$, 即势的允许变更只有与 $\mathbf{n}$ 平行的分量 $\delta \mathbf{W}_\mu = \mathbf{n} u_\mu$, 代入 (4) 知它是平移梯度场(见 3 节).

如给定的 $\mathbf{J}_\mu$ 与 $\mathbf{n}$ 平行, 则 (2) 及 Bianchi 等式要求 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu = 0$, 亦即是纯 $U(1)$ 场, 而 $\mathbf{W}'_\mu = \mathbf{W}_\mu + \delta \mathbf{W}_\mu = \mathbf{W}_\mu + \mathbf{n}\partial_\mu \lambda$ 是绕 $\mathbf{n}$ 轴 $U(1)$ 变换连系的等价解.

如给定的 $\mathbf{J}_\mu$ 与 $\mathbf{n}$ 不平行,则 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu \neq 0$, 于是 $\mathbf{W}'_\mu$、$\mathbf{W}_\mu$ 不再是等价的. 这时对于 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu$、$\mathbf{F}_{\mu\nu}$、$\mathbf{J}_\mu$ 还有如下的要求:

(1) $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 也是同位旋一维的，而且 $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 的时空方向与 $\delta\mathbf{W}_\mu$ 重合．证：由(4)，$\delta\mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp = [\mathbf{W}_\mu^\perp, \delta\mathbf{W}_\nu] - [\mathbf{W}_\nu^\perp, \delta\mathbf{W}_\mu] = 0$，得证

(2) $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 也是平移梯度场，即

$$\mathbf{W}_\mu^\perp \equiv \mathbf{e}U_\mu(x) = \mathbf{e}\partial_\mu\Lambda(x), \tag{12}$$

且

$$U_\mu\nabla_\nu\mathbf{e} - U_\nu\nabla_\mu\mathbf{e} = 0, \tag{13}$$

式中：$\mathbf{e}(x)\cdot\mathbf{n} = 0$，$\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1$．证：由假定 $\mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp = 0$，将 $\mathbf{W}_\mu^\perp = \mathbf{e}U_\mu$ 代入即可得证[比较 (7)—(10) 式]．此外，注意到 $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 与 $\delta\mathbf{W}_\mu$ 时空方向重合，即正交超曲面族重合只是参数不同 $\Lambda(x) = \varphi[\lambda(x)]$．

(3) $\mathbf{J}_\mu^\perp$ 同位旋一维，在各 S_λ 上平移．证：由 $\mathbf{J}_\nu^\perp = [\mathbf{W}_\mu^\perp, \mathbf{F}_{\mu\nu}]$ 知其同位旋方向 $\mathbf{m} = [\mathbf{e}, \mathbf{n}]$ ($\mathbf{m}$ 为单位矢)，即可写如 $\mathbf{J}_\nu^\perp = j_\nu\mathbf{m}$．而由 $\mathbf{e}$、$\mathbf{n}$ 的 S_λ 上平移性易见 $\mathbf{m}$ 在 S_λ 上为平移．

(4) j_μ 沿 S_λ 的切向．证：由 $\nabla_\mu\mathbf{J}_\mu = 0$ 注意到 $\mathbf{W}_\perp^\mu\cdot\mathbf{m} = 0$ 及 $\nabla_\mu\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 0$ 易得流与 S_λ 的法向正交 $(\nabla_\mu\mathbf{m})j^\mu = 0$ ($\because \nabla_\mu\mathbf{m}$ 仅沿法向非零)．(如 $\mathbf{J}_\mu^{/\!/} = 0$，则可证 $\partial_\mu j^\mu = 0$)

(5) 场强取对偶极端值，即 $F_{\mu\nu}^{/\!/}F^{/\!/\mu\nu} \neq 0$，而 $F_{\mu\nu}^{/\!/}{}^*F^{/\!/\mu\nu} = 0$，且 U_μ (横向势) 为其类时本征矢，j_μ (横向流) 为其类空本征矢．证：由 (2) 及 Bianchi 等式的同位旋横分量部分

$$U^\mu F_{\mu\nu}^{/\!/} = j_\nu, \quad U^{\mu*}F_{\mu\nu}^{/\!/} = 0. \tag{14}$$

求有非零 U^μ、j_ν 的条件即得证．

(6) 场在 S_λ 上是平庸的，亦即在 S_λ 上有平移标架 $\mathbf{e}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$．实际上，注意到场强取对偶极端值，必可作 Lorentz 变换使得仅 $F_{03}^{/\!/} \neq 0$，由(14)这时 $U_1 = U_2 = j_1 = j_2 = 0$；再沿 3 方向变换使 $j_0 = 0$ 则有 $U_1 = U_2 = U_3 = 0$．$U_0F_{03}^{/\!/} = j_3$．这时超曲面 S_λ 在这点的法向即时间轴，而在超曲面的切面方向上的"曲率"——类空方向的场强是平庸的即磁场确为零．

为什么这时允许在 $\mathbf{W}_\mu$ 上加上 $\delta\mathbf{W}_\mu = \partial_\mu\lambda\mathbf{n}$ 而不改变 $\mathbf{J}_\mu$、$\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 呢？因为 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 与 $\mathbf{J}_\mu^{/\!/}$ 满足通常的 $U(1)$ Maxwell 方程 (且 $\partial_\mu\mathbf{J}^{\mu/\!/} = 0$)，在 $\delta\mathbf{W}_\mu$ 对应的 $U(1)$ 变换下它们是不变的．至于运动方程(2)及 Bianchi 等式的横同位旋分量，则只显含 $\mathbf{W}_\mu^\perp$、$\mathbf{J}_\mu^\perp$ 及 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$，并不直接涉及 $\mathbf{W}_\mu^{/\!/}$．只是 $\mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp = 0$ 才使 $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 与 $W_\mu^{/\!/}$ 有关，而 $W_\mu^{/\!/}$ 改变 $\partial_\mu\lambda$ 相当于在各超曲面 S_λ 上分别绕 $\mathbf{n}$ 轴转 λ 角，这并不改变 $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 在各 S_λ 上的平移性，即不改变 $F_{\mu\nu}^\perp = 0$．取规范使 $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$、$\mathbf{J}_\mu^\perp$ 的方向 $\mathbf{m} = (0, 1, 0)$ 则可明显写出上述结果如下：$\mathbf{W}_\mu = \mathbf{n}a\partial_\mu\Lambda + \mathbf{e}\partial_\mu\Lambda$ (这里用到了由于 $\mathbf{e}$ 在 S_λ 上平移而得到的 $W_\mu^3 = aW_\mu^1$)，$\delta\mathbf{W}_\mu = \mathbf{n}\partial_\mu\varphi(\Lambda)$，$\mathbf{J}_\mu = \mathbf{n}\partial_\nu F_{\nu\mu}^3 + \mathbf{m}\partial_\nu\Lambda F_{\nu\mu}^3$，$F_{\mu\nu}^3 = \partial_\mu a\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu a\partial_\mu\Lambda$ (易见此规范下 $\mathbf{J}_\mu\mathbf{W}^\mu = 0$)．

6. 设场强一维同上，但 $F_{\mu\nu}^3$ 类光，且设 $\mathbf{J}_\mu^\perp = 0$．则由(2)及 Bianchi 等式得 $\mathbf{W}_\mu^\perp = \mathbf{e}U_\mu$，$U_\mu\mathbf{F}_{\mu\nu} = U_\mu^*\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$，$U_\mu U^\mu = 0$．由 $\mathbf{F}_{\mu\nu}^\perp = 0$ 得 $U_\mu = \partial_\mu\Lambda$，$U_\mu\nabla_\nu\mathbf{e} - U_\nu\nabla_\mu\mathbf{e} = 0$，即 $\mathbf{W}_\mu^\perp$ 为平移梯度场，它是在 S_Λ 上绕 $\mathbf{e}$ 转 Λ 角的变换"产生"的．易见 $W_\mu^\perp$ 对于 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$、$\mathbf{J}_\mu$ 的贡献均为零，故可作为 $\delta W_\mu^\perp$．$W_\mu^\perp$ 还不影响 $\mathbf{n}$ 在 S_Λ 上的平移性，的确 $U_\mu\nabla_\nu\mathbf{n} - U_\nu\nabla_\mu\mathbf{n} = U_\mu[\mathbf{W}_\nu^\perp, \mathbf{n}] - U_\mu[\mathbf{W}_\nu^\perp, \mathbf{n}] = (U_\mu U_\nu - U_\nu U_\mu)[\mathbf{e}, \mathbf{n}] = 0$．而绕 $\mathbf{n}$ 轴转 $\lambda = \varphi(\Lambda)$ 角产生的 $\delta W_\mu^{/\!/} = \partial_\mu\lambda\mathbf{n}$ 也不改变 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$、$\mathbf{J}_\mu$．由于 $\partial_\mu\lambda /\!/ \partial_\mu\Lambda$ 整个 $\delta\mathbf{W}_\mu$ 仍然是一维的．注意到

在 S_λ 上 $\mathbf{e}$、$\mathbf{n}$ 均平移不变,故在 S_Λ 上场是平庸的. 取 $e = (1,0,0)$, $n = (0,0,1)$ 规范,则 $W_\mu = a\partial_\mu\Lambda\mathbf{n} + \partial_\mu\Lambda\mathbf{e}$, $\delta W_\mu = \partial_\mu\lambda\mathbf{n} + \partial_\mu\Lambda'\mathbf{e}$, $\mathbf{F}_{\mu\nu} = (\partial_\mu a\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu a\partial_\mu\Lambda)\mathbf{n}$ (a 满足 $\partial_\mu a\partial^\mu\Lambda = 0$, $\partial_\mu a$ 的方向在波面上且类空, 可用 $F_{\mu\nu}$ 本征矢表之).

如整个 $\mathbf{J}_\mu = 0$, 则有不确定势的充要条件为 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 的类光本征矢 u_μ 为测地无切错(Shearfree)类光曲线族的方向,即电磁波的射线. 这意味着通常的电磁波中不仅允许引进标、纵虚光子不改变物理结果,还有可能引进同位旋横向的标、纵虚光子. 这对探讨电磁场的么正性、不定度规等问题,提供了新的因素. 此外,在包围磁荷的波面上, 电荷算荷 $\mathbf{n}$ 的方向必复盖同位旋球面,于是不可能作出横向平移场 $\mathbf{e}(x)$.

7. 设 $\mathbf{F}_{\mu\nu} = F^{\parallel}_{\mu\nu}\mathbf{n}$ 一维, 类光 (存在 U_μ 使 $U^\mu F_{\mu\nu} = U^{\mu *}F_{\mu\nu} = 0$, $U_\mu U^\mu = 0$), 且 $J^{\perp}_\mu \neq 0$, 则由运动方程 (2) 及 Bianchi 等式求解 $W^{\perp}_\mu$, 易见有解时必有: $\mathbf{J}^{\perp}_\mu$ 是一维的、类光的、$\mathbf{J}^{\perp}_\mu = \mathbf{m}j_\mu$、$(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m} = 1)$、$j_\mu /\!/ U_\mu$; 这时 $\mathbf{W}_\mu$ 必可写如: $\mathbf{W}_\mu = \mathbf{e}(t_\mu + U^1_\mu) + \mathbf{m}U^2_\mu + \mathbf{n}(t^3_\mu + U^3_\mu)$,式中: $\mathbf{e} = [\mathbf{m},\mathbf{n}]$, $t_\mu = j_0F^3_{0\mu}/|F_{0i}F_{0i}|$,(它类空、由 j_μ 及 $F_{\mu\nu}$ 所决定), $U^1_\mu \equiv P(x)U_\mu$、$U^3_\mu \equiv \xi(x)U_\mu$, $U^2_\mu(x) \equiv \sigma(x)U_\mu$ 为类光矢, $t^3_\mu(x)$ 为类空矢.[以下为简明起见, 取规范 $\mathbf{m} = (0,1,0)$].

7a. 设 U_μ 有挠 $U_\mu\partial_\nu U_\lambda e_{\mu\nu\lambda\rho} \neq 0$, 则可证 $\delta\mathbf{W}^{\perp}_\mu = 0$. 证: 这时将 $\mathbf{W}_\mu$ 代入 $U^{\mu *}F^1_{\mu\nu} = 0$, 可求得 ρ, 再代入 $U^{\mu *}F^2_{\mu\nu} = 0$ 可求得 σ, 于是 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu$ 完全由 $\mathbf{J}_\mu$, $F_{\mu\nu}$ 决定, 证毕.

如 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu$ 是二维的 ($\sigma \neq 0$), 则 $\delta\mathbf{W}_\mu = 0$. 证: 由 $U^{\mu *}F^2_{\mu\nu} = 0$ 及 $F^3_{j0} = 0$ 可确定 t^3_μ, 再由 $U^{\mu *}F^3_{\mu\nu} = 0$ 可确定 $\xi(x)$, 证毕.

以上证明了有挠时 $\delta\mathbf{W}_\mu = \delta W^3_\mu\mathbf{n}$, 它不为零的必要条件是 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu$ 是一维的, 写之为 $\mathbf{W}^{\perp}_\mu = (U^1_\mu + t_\mu)\mathbf{e} \equiv V_\mu\mathbf{e}$. 于是由 $\mathbf{F}^{\perp}_{\mu\nu} = 0$, 易得 V_μ 为梯度场 $V_\mu = \partial_\mu\Lambda$; 而且 $\mathbf{e}$ 在 S_λ 上是平移不变的, $V_\mu\nabla_\nu\mathbf{e} - V_\nu\nabla_\mu\mathbf{e} = 0$, 由此式又可得[注意到 $\mathbf{e} = (1,0,0)$], $W^{\parallel}_\mu /\!/ V_\mu$, 最后有 $\mathbf{W}_\mu = a\partial_\mu\Lambda\mathbf{n} + \partial_\mu\Lambda\mathbf{e}$, $\mathbf{F}_{\mu\nu} = (\partial_\mu a\partial_\nu\Lambda - \partial_\nu a\partial_\mu\Lambda)\mathbf{n}$, $\partial^\mu F^3_{\mu\nu} = J^3_\nu$, 而且 $j_\mu\partial^\mu\Lambda = 0$, $j^\mu\mathbf{W}_\mu = 0$, j_μ 沿 S_λ 的切面方向,这时允许的势的变更为 $\delta\mathbf{W}_\mu = \partial_\mu\varphi(\Lambda)\mathbf{n}$, 是一维的. $\mathbf{n}$、$\mathbf{e}$ 在 S_λ 上均平移不变, 故 S_λ 上场是平庸的. S_λ 的法线 V_μ 为波印亭矢及电分量所张面内的类空矢.

7b. 设 U_μ 无挠, 则有类光超曲面族 Λ, $U_\mu /\!/ \partial_\mu\Lambda$ (可取旧一常数使 $U_\mu = \partial_\mu\Lambda$).

由 $U^{\mu *}F^1_{\mu\nu} = 0$, 得 $e_{\nu\mu\rho\lambda}U_\mu\partial_\rho t_\lambda = 0$, 即 t_λ 的旋度与 U_μ 平行,由之可证存在函数 $\varphi(x)$ 满足 $\partial_i(\varphi U_0) - \partial_0(\varphi U_i) = U_0\partial_i\varphi - U_i\partial_0\varphi = t_i$. 即 $\varphi(x)$ 沿特征线不变,且其空间法线方向为 t_i[$\varphi(x)$ 含磁场的偏振面].

由 $U^{\mu *}F^2_{\mu\nu} = 0$ 得 $t^3_\mu /\!/ t_\mu$; 由 $U^{\mu *}F^3_{\mu\nu} = 0$ 得 $e^{\mu\rho\lambda\nu}U_\mu\partial_\rho t^3_\lambda = 0$; 于是可证 t^3_λ 也可表为 $\partial_i(\Phi\partial_0\Lambda) - \partial_0(\Phi\partial_i\Lambda) = t^3_\lambda$, 式中: $\Phi(x)$ 为 $\varphi(x)$ 及 $\Lambda(x)$ 的任意函数. 即 $\Phi(x)$ 也沿特征线不变, 且 $\Phi(x) =$ 常数也含磁场的偏振方向(在各 S_Λ 面上, $\varphi =$ 常数与 $\Phi =$ 常数面重合,只是参数不同). 改变此参数即改变 t^3_μ 可得不同的势(见资料[3]).

但取固定的 t^3_μ, 还可以改变 $\mathbf{W}_\mu$; 此时, 由于 t_μ, t^3_μ 已定, $\delta\mathbf{W}_\mu$ 必为 $U_\mu\mathbf{l}$, 式中: $\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} = 1$, $u_\mu /\!/ U_\mu$, 是一维的平移梯度场. (由于类光场 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 在类光面 S_Λ 上是平庸的, 故此种平移 $\mathbf{l}$ 场是有解的[3]).

8. 引理: 如 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 是三维的,则 δW_μ 不可能是三维的. 证: 由于同位旋空间维数小于时空维数,故必存在 u_μ 使 $u^\mu\mathbf{W}_\mu = 0$,如 $\delta\mathbf{W}_\mu$ 三维,则仿资料[3]可由 $\delta\mathbf{J}_\mu = 0$ 得 $u^\mu\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$,

由 $\delta^* J_\mu = 0$ 得 $u^\mu {}^*\mathbf{F}_{\mu\nu} = 0$. 于是 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 各同位旋方向均为以 u_μ 为本征方向的类光双矢，但这样的类光双矢只有二独立的，与 $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ 三维矛盾，证毕.

9. 引理：如 $\delta W^3_\mu = 0$，而 $F^3_{\mu\nu} \neq 0$，则 $\delta \mathbf{W}_\mu = \delta \mathbf{W}^\perp_\mu$ 最多是一维的. 证：如 $F^3_{\mu\nu}$ 不类光则由 (3)、(5) 得 $\delta \mathbf{W}^\perp_\mu = 0$，如 $F^3_{\mu\nu}$ 类光，则得 $\delta \mathbf{W}^\perp_\mu = \mathbf{e} u_\mu$ 是一维的. 证毕.

10. 场强是三维的. 由上二引理可见允许的 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 只能是一维的，故为平移梯度类光场如 3、4 节. 例，取 $\delta \mathbf{W}_\mu = \mathbf{n} u_\mu$ 代入 (3)、(5) 得 $u^\mu \mathbf{F}^\perp_{\mu\nu} = u^{\mu *} F^\perp_{\mu\nu} = 0$（实际上这就是资料[3]的条件 A）. 由 $\mathbf{n}$ 的类光面上平移不变性：$\delta \mathbf{F}^\perp_{\mu\nu} = [\delta \mathbf{W}_\mu, \mathbf{W}^\perp_\nu] - [\delta \mathbf{W}_\nu, \mathbf{W}^\perp_\mu] = 0$ 得 $W^\perp_\mu = U_\mu \mathbf{e}$，取 $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ 的规范，则 $\mathbf{W}_\mu = \mathbf{n} a_\mu + \mathbf{e} U_\mu$，式中 a_μ 为 $\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu = F^3_{\mu\nu}$ 的解. 由之求得 $F^1_{\mu\nu} = \partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu$，$F^2_{\mu\nu} = a_\mu U_\nu - a_\nu U_\mu \neq 0$，$F^1_{\mu\nu}$ 的类光性即 U_μ 无挠，以类光正交超曲面，即 $U_\mu = a\partial_\mu \Lambda$，而 $F^1_{\mu\nu} = \partial_\mu a \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu a \partial_\mu \Lambda$，$F^2_{\mu\nu}$ 的类光性则格外要求 $a_\mu U^\mu = 0$. 即 a_μ 为波面的类空切矢，在此规范下 $U_\mu \mathbf{W}^\mu = 0$. 这时，在 S_λ 上 $\nabla_\mu \mathbf{n} = 0$，但 $\nabla_\mu \mathbf{e} \neq 0$，场在 S_λ 上约化为 $\mathbf{n}$ 方向 $U(1)$ 场，但不是平庸的. $W^\perp_\mu$ 对于 $F^3_{\mu\nu}$、J^3_μ 都无贡献，与 5、6、7 节同.

11. 设场强是二维的（同位旋方向是横向的张成 1—2 面），类光，且有共同的类光本征矢 u_μ.（横向二维场如允许纵向 $\delta W^3_\mu \neq 0$，则易见必然有上述性质）. 则可证 δW_μ 单向（从而必定是类光平移梯度场）如下：由上述假定 $F^1_{\mu\nu} = u_\mu K_\nu - u_\nu K_\mu$，$F^2_{\mu\nu} = u_\mu l_\nu - u_\nu l_\mu$，这里 K_μ、l_μ 为线性无关类空矢，易证 (3)(5) 要求 $\delta \mathbf{W}_\mu = u_\mu \mathbf{a} + K_\mu \mathbf{b} + l_\mu [n, \mathbf{b}]$，式中 $\mathbf{b}$ 是横向的 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0$. 注意到在类空矢 Kl 张成的平面的法向的磁场变更为零 $\delta F^l_{Kl} = 0$ 得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = 0$，即 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 是单方向的.

如果再假定 $J^3_\mu = 0$，则为上节 $F^3_{\mu\nu} = 0$，$J^3_\mu = 0$ 的特殊（精确些讲，退化）情况，这时上节的 b_μ 为类空的梯度场. 不同的是，如今可以有 $\delta W_\mu = u_\mu \mathbf{d} = \partial_\mu \lambda \mathbf{d}$ 式中 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{d} = 1$，但 $\mathbf{d}$ 可以不同于 $\mathbf{n}$. 在 S_λ 上可证 $\mathbf{d}$, $\mathbf{n}$ 均平移不变，即场在 S_λ 上是平庸的.

12. 设场强二维但不是有共同本征矢的类光场强，则所允许的 $\delta \mathbf{W}_\mu$ 最多是一维的. 证：此时 δW^3_μ 必然为零. 于是由 $\delta F^3_{\mu\nu} = 0$ 易见 $\delta \mathbf{W}_\mu = \delta \mathbf{W}^\perp_\mu$ 必然是一维的. 证毕.

最后，值得注意的是：情况 5—8 及 11 中纵向场强及纵向流（在一维情况下这也就是全部的场强及流，单独满足 $U(1)$ 的方程，可取规范（$\mathbf{n}$ = 常数）用纵向势表场强如 Abel 情况；这些都不受 $\mathbf{W}^\perp_\mu$ 存在与否的影响. $\mathbf{W}^\perp_\mu$ 只决定 $\mathbf{J}^\perp_\mu$ 及 $\mathbf{F}^\perp_{\mu\nu}$. 可取规范使 $\mathbf{W}_\mu$ 为二维的.

参　考　资　料

[1] Y. Aharanov and D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115** (1959), 485.　吴大峻、杨振宁, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.

[2] 吴大峻、杨振宁, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3843.

[3] 夏道行, 复旦学报(自然科学版), 1976, **1**, 82.

[4] 沈纯理, 复旦学报(自然科学版), 1976, **2**, 61.

[5] 谷超豪、杨振宁, 复旦学报(自然科学版), 1976, **3**, 146.

[6] S. Deser and F. Wilczek, *Phys. Lett.*, **65B** (1976), 391.

[7] R. Roskies, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1731.

[8] M. Calvo, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1733.

[9] Pirani, in Lectures of theoretical physics, Brandeis, 1964.

[10] 势变更有非零解的必要条件又见：S. Deser, and C. Teitelboim, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 1592.

NONEQUIVALENT $SU(2)$ GAUGE POTENTIALS UNDER EQUAL FIELD STRENTHS AND SOURCES

HOU BO-YU

(*Northwest University*)

ABSTRACT

This paper analyses some common physical characteristics of the gauge field strengths and sources with unequivalent potentials and expresses it in geometrical terms. The eigen-directions of these fields and sources form twistfree curve congrence, which has orthogonal hypersurfaces. The field is Abelianlizable (frequently, even trival) on each hypersurface, i.e. there exists Higgs field, which is invariant under translation along each hypersurface. The gauge field and sources are not altered during the variation of potentials, generated by the gauge rotation around Higgs fields with equal angles on each individual hypersurface but with unequal angles on different hypersurfaces.