第2卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 1
1978年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS January, 1978

经线形式的磁单极子势

朱栋培
(中国科学技术大学)

一、经线形式的磁单极子势

自从 Dirac[1] 提出存在磁单极子的假设以来，人们一直采用他所提出的势来讨论各种问题.

Dirac 势只有纬线方向的分量：

$$A_t^D = A_r^D = A_\theta^D = 0, \qquad A_\varphi^D = \frac{g}{r}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}, \tag{1}$$

它在 $\theta=\pi$ 方向无限大，即存在一根奇异弦.

满足关系

$$\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{H}=\frac{g}{r^2}\mathbf{r}_0 \tag{2}$$

的强度为 g 的磁单极子矢量势还可以有其它不同的形式. 这里我们讨论一种只有经线方向分量的势

$$A_t = A_r = A_\varphi = 0, \qquad A_\theta = -\frac{g}{r}\varphi\sin\theta. \tag{3}$$

这个势不存在奇异弦，过去也有人提到过[2]. 但由于它在方位角 φ 上存在多值问题，因此没有引起注意.

二、规范联接

为了解决多值性问题，可参考杨振宁[3] 的方式. 杨用多复盖的方法去掉了 Dirac 势中的奇异弦，在重迭区，不同势之间用规范变换联接起来，从而保证了物理场的唯一性.

由于我们所用势的特殊形式，可以采用下面的复盖方法，如令

$$-\delta<\varphi<2\pi+\delta, \qquad \delta>0, \tag{4}$$

在重迭区，里面的势和外面的势之间用规范变换相联接，即

$$\mathbf{A}_{里}-\mathbf{A}_{外}=\nabla\alpha$$

或

$$\mathbf{A}(\gamma,\theta,\varphi+2\pi)-\mathbf{A}(\gamma,\theta,\varphi)=-\frac{g}{\gamma}2\pi\sin\theta\boldsymbol{\theta}_0=\nabla\alpha, \tag{5}$$

由此易得规范函数为

$$\alpha=2\pi g\cos\theta. \tag{6}$$

有了规范联接，就使单极子的磁场强度在整个球面上处处有意义并唯一确定.

本文 1977 年 8 月 14 日收到.

三、荷量子化条件

在电磁势作规范变换(5)的情况下,在此势场中运动的电子的波函数也要作相应的变换:

$$\psi_{里} = S\psi_{外}, \tag{7}$$

$$S = \exp\left(i\frac{e}{\hbar c}\alpha\right) = \exp\left(i\frac{eg}{\hbar c}2\pi\cos\theta\right), \tag{8}$$

要使这个规范变换有意义,当且仅当 S 是单值的,(8) 式显然是满足这一要求的.

但是在南极 S 和北极 N,由于它们是重迭面的公共点,势 $\mathbf{A}$ 没有进行变换,波函数 ψ 也应不变.由 (8) 知

$$\frac{eg}{\hbar c}2\pi\cos\theta\bigg|_{\theta=0} = \frac{eg}{\hbar c}\cdot 2\pi = 2\pi \times 整数, \tag{9}$$

由此得荷量子化条件

$$q = \frac{eg}{\hbar c} = 整数. \tag{10}$$

从南极定出的也一样.在势 (3) 下所得的量子化条件 (10) 是和 Schwinger[4] 从二根弦的 Dirac 势所得结果一致的.

四、磁 通 量

势(3)是否描写了一个单极子,可以来计算一下通过一包围单极子的球面的总磁通量.作一通过南北极的大园,得一经圈(图 1),沿此经圈对势积分时有:

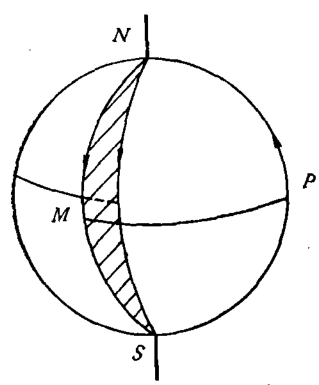

图 1

东半球通量

$$\Omega_{东} = \oint_{NMSPN} A_\mu dx^\mu = \int_{NMS}\mathbf{A}_{外}\cdot d\mathbf{l} + \int_{SPN}\mathbf{A}_{外}\cdot d\mathbf{l},$$

西半球通量

$$\Omega_{西} = -\oint_{NMSPN} A_\mu dx^\mu = -\int_{NMS}\mathbf{A}_{里}\cdot d\mathbf{l} + \int_{SPN}\mathbf{A}_{外}\cdot d\mathbf{l},$$

总磁通量

$$\Omega = \Omega_{东} + \Omega_{西} = \int_N^S(\mathbf{A}_{外} - \mathbf{A}_{里})\cdot d\mathbf{l} = \int_N^S -\nabla\alpha\cdot d\mathbf{l}$$

$$= -\alpha\bigg|_N^S = -2\pi g\cos\theta\bigg|_0^\pi = 4\pi g. \tag{11}$$

确实,势 (3) 描写了一个强度为 g 的磁单极子.

五、和 Dirac 势之间的关系

势 (3) 和 (1) 都可描写同一磁场,那它们之间应当差一个规范变换

$$\mathbf{A}^D - \mathbf{A} = \nabla\beta, \tag{12}$$

由 (1)、(3) 易得

$$\beta = g\varphi(1 - \cos\theta), \tag{13}$$

这是一个多值规范变换.

六、单极子场中的电子运动波函数

我们考虑电子在单极子势场 (3) 中的运动. 在非相对论情形下，定态的 Schrödinger 方程为

$$\frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{P}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi=E\psi, \tag{14}$$

μ、e 分别为电子的静止质量和电荷.

把势 (3) 代入，在球坐标下，(14) 化为

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta^*+\frac{1}{r^2}2iq\varphi\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}2iq\varphi\cos\theta\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r^2}q^2\varphi^2\sin^2\theta\right\}\psi=-\frac{2\mu E}{\hbar^2}\psi, \tag{15}$$

$$\Delta^*\equiv\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \tag{16}$$

q 为整数，见 (10).

分离变量，令

$$\psi=R(r)Q(\theta,\varphi), \tag{17}$$

R, Q 分别满足下面方程:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}R\right)+\left(\frac{2\mu E}{\hbar^2}-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0, \tag{18}$$

$$\Delta^*Q+2iq\varphi\sin\theta\frac{\partial Q}{\partial\theta}+(2iq\varphi\cos\theta-q^2\varphi^2\sin^2\theta)Q=-\lambda Q, \tag{19}$$

λ 为数.

先解方程 (19). 为此考虑到消除多值性的规范联接，把反映这种变换的因子从 Q 中分出来，令

$$Q=e^{iq\varphi\cos\theta}D, \tag{20}$$

则得 D 满足的方程为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial D}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}q^2\cos^2\theta D+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 D}{\partial\varphi^2}+\frac{2iq\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial D}{\partial\theta}=-\lambda D. \tag{21}$$

方程 (21) 对方位角 φ 有旋转不变性，加上多值性已由 (20) 考虑，因此 D 可表为

$$D(\theta,\varphi)=d(\theta)e^{im\varphi},\qquad m\text{ 为整数}. \tag{22}$$

d 满足下面的方程

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left(\lambda+q^2-\frac{m^2+2mq\cos\theta+q^2}{\sin^2\theta}\right)\right]d(\theta)=0, \tag{23}$$

物理解要求

$$\lambda=j(j+1)-q^2,\qquad j\geqslant|q|. \tag{24}$$

(24) 代入 (23):

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial d}{\partial\theta}\right)+\left(j(j+1)-\frac{m^2+2mq\cos\theta+q^2}{\sin^2\theta}\right)d=0. \tag{25}$$

此方程的解即为旋转群表示中的转动函数或 helicity 振幅 $d^j_{q,-m}$，其表达式为

$$d^j_{q,m}(\theta) = \frac{(-1)^{j-q} i^{m-q}}{2^j (j-q)!} \sqrt{\frac{(j-q)!(j+m)!}{(j+q)!(j-m)!}} (1-x)^{-\frac{m-q}{2}} (1+x)^{-\frac{m+q}{2}},$$

$$\frac{d^{j-m}}{dx^{j-m}} [(1-x)^{j-q}(1+x)^{j+q}], \qquad x = \cos\theta. \tag{26}$$

这样，最后得到角向归一化的波函数为

$$Q^j_{q,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} e^{iq\varphi\cos\theta} d^j_{q,-m}(\theta) e^{im\varphi}, \tag{27}$$

它们构成正交归一完备系.

现在看径向方程 (18). 由 (24):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr} R\right) + \left(\frac{2\mu E}{\hbar^2} - \frac{j(j+1)-q^2}{r^2}\right) R = 0. \tag{28}$$

物理解要求 $E > 0$，即不存在束缚态，令

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}, \tag{29}$$

方程 (28) 的解为

$$R_j(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\sqrt{j(j+1)+\frac{1}{4}-q^2}}(kr). \tag{30}$$

于是我们求得了电子在单极子势 (3) 中运动的一般波函数为

$$\psi = \sum_{j \geqslant |q|} \sum_{m=-j}^{j} C_{jm} \frac{1}{\sqrt{kr}} J_{\sqrt{j(j+1)+\frac{1}{4}-q^2}}(kr) e^{iq\varphi\cos\theta} d^j_{q,-m}(\theta) e^{im\varphi}, \tag{31}$$

其中 C_{jm} 为数.

这个解显然可以直接利用(13)代表的变换从 Dirac 势下的电子波函数 ψ_D(如见[5,2]) 得到，即

$$\psi = G\psi^D$$
$$G = e^{-iq\varphi(1-\cos\theta)} \tag{32}$$

这在相对论的情形也一样.

参 考 资 料

[1] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.*, **A133** (1931), 60.
[2] P. P. Banderet, *Helv. Phys. Acta*, **19** (1946), 503.
[3] T. T. Wu & C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 3845.
[4] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **144** (1966), 1087.
[5] A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.*, **B140** (1965), 1407.

THE NON-SINGULAR VECTOR POTENTIAL OF A MAGNETIC MONOPOLE IN THE DIRECTION OF MERIDIAN

TZU TUNG-PEI

(University of Science and Technology of China)