第 2 卷 第 3 期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 3
1978 年 5 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1978

研究简报

弯曲空间的 $SU(N)$ 规范理论的磁单极子与双子解

汪克林 冼鼎昌 郑希特
（成都地质学院）（中国科学院高能物理研究所）（成都工学院）

（一）

自 't Hooft[1] 得到 $SU(2)$ 规范场的经典磁单极子解以来，在弯曲空间中的 $SU(2)$ 规范场的解也有了一系列的研究[2-5]，结果表明静态中心球对称解的弯曲空间度规与 $U(1)$ 场的 Reissner-Nordström 度规相同，只不过把 e^2 换成 $SU(2)$ 的规范荷 Q^2 与其对偶荷（磁荷）$g^2_{(2)}$ 的平方和 $Q^2+g^2_{(2)}$. Yasskin[5]较普遍地研究了 Einstein-Yang-Mills 场耦合方程的求解问题，提出它们可由弯曲空间电磁场的解来构成. 但构成时引入的参量 β^P 的意义不明确.

鉴于 Higgs 机制所引起的广泛兴趣，本文研究 Einstein-$SU(N)$ 规范场-Higgs 场的耦合求解问题.

（二）

从如下的拉氏函数

$$L=\int\sqrt{-g}\,\mathscr{L}\,d\Omega+\frac{1}{4k}\int\sqrt{-g}\,R\,d\Omega \tag{1}$$

出发，这里 k 为引力常数，R 为标量空间曲率，$g=\det g_{\mu\nu}$, $d\Omega$ 为四维体积元，

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4}\left\{-\frac{1}{2}Tr(g^{\mu\nu}g^{\eta\rho}\mathbf{F}_{\mu\eta}\mathbf{F}_{\nu\rho})-Tr(g^{\mu\nu}D_\mu\boldsymbol{\Phi}D_\nu\boldsymbol{\Phi})+\mu^2Tr\boldsymbol{\Phi}^2-\frac{1}{8}(Tr\boldsymbol{\Phi}^2)^2\right\}-\frac{\mu^4}{2\lambda} \tag{2}$$

式 (2) 中最后一项常数的引入是为了使能量的真空期待值为零. 式中的黑体符号是矩阵表示:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_{\mu\nu}=F^a_{\mu\nu}\lambda_a,\quad \boldsymbol{\Phi}=\phi^a\lambda_a\quad \mathbf{W}_\mu=W^a_\mu\lambda_a,\quad D_\mu\boldsymbol{\Phi}=\partial_\mu\boldsymbol{\Phi}+i[\mathbf{W}_\mu,\boldsymbol{\Phi}],\\ \mathbf{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathbf{W}_\nu-\partial_\nu\mathbf{W}_\mu+i[\mathbf{W}_\mu,\mathbf{W}_\nu],\end{gathered} \tag{3}$$

λ_a 为 $SU(N)$ 的生成元. 在式(3)中我们取规范耦合常数 $1/g$ 为 1. 要恢复其位置只须在

本文 1977 年 4 月 5 日收到.

解中乘以 $1/g$ 便可.

对式(1)变分后得到运动方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}\ g^{\nu\eta}g^{\mu\rho}\mathbf{F}_{\eta\rho})+ig^{\mu\rho}g^{\eta\lambda}[\mathbf{F}_{\rho\eta},\mathbf{W}_\lambda]+ig^{\mu\nu}[D_\nu\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\Phi}]=0, \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}\ g^{\nu\mu}D_\mu\boldsymbol{\Phi})+ig^{\mu\nu}[\mathbf{W}_\mu,D_\nu\boldsymbol{\Phi}]+\mu^2\boldsymbol{\Phi}-\frac{\lambda}{4}(Tr\boldsymbol{\Phi}^2)\boldsymbol{\Phi}=0, \tag{5}$$

以及

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=2kT_{\mu\nu}, \tag{6}$$

其中 $R_{\mu\nu}$ 为二阶空间曲率张量,而能量动量张量 $T_{\mu\nu}$ 为

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\eta\rho}Tr(\mathbf{F}_{\mu\eta}\mathbf{F}_{\nu\rho})+\frac{1}{2}Tr(D_\mu\boldsymbol{\Phi}D_\nu\boldsymbol{\Phi})+g_{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{7}$$

由方程(4)、(5)、(6)联合求解便可同时定出 $\mathbf{W},\boldsymbol{\Phi}$ 及度规 $g^{\mu\nu}$,在一般情况下这是很困难的. 但在一定条件下,求解可以简化.

(三)

定理: Einstein-$SU(N)$ 规范场-Higgs 场耦合方程在 (i)$SU(N)$ 规范场可阿贝尔化[6],即满足

$$D_\mu\boldsymbol{\Phi}=0 \tag{8}$$

及(ii)规范场强与只具两种不同特征值的 Higgs 场同向这两个条件下将导致 Einstein-$U(1)$ 场耦合方程. $SU(N)$ 规范场具有与 $U(1)$ 规范场相同形式的弯曲空间解.

证明: 在条件 (i) 成立时,式(2)成为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{8}Tr(g^{\mu\nu}g^{\eta\rho}\mathbf{F}_{\mu\eta}\mathbf{F}_{\nu\rho})+\frac{\mu^2}{4}Tr\boldsymbol{\Phi}^2-\frac{1}{32}(Tr\boldsymbol{\Phi}^2)^2-\frac{\mu^4}{2\lambda}, \tag{9}$$

方程(4)、(5)变为

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu(\sqrt{-g}\ g^{\nu\eta}g^{\mu\rho}\mathbf{F}_{\eta\rho})+ig^{\mu\rho}g^{\eta\lambda}[\mathbf{F}_{\rho\eta},\ \mathbf{W}_\lambda]=0, \tag{10}$$

$$\left[\mu^2-\frac{\lambda}{4}(Tr\boldsymbol{\Phi}^2)\right]\boldsymbol{\Phi}=0. \tag{11}$$

方程(11)除平庸解外,正是真空势能极小条件,它给出

$$\phi^a\phi^a=\frac{2\mu^2}{\lambda}. \tag{12}$$

于是式(7)及(9)简化为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{8}Tr(g^{\mu\nu}g^{\eta\rho}\mathbf{F}_{\mu\eta}\mathbf{F}_{\nu\rho}), \tag{13}$$

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\eta\rho}Tr(\mathbf{F}_{\mu\eta}\mathbf{F}_{\nu\rho})+g_{\mu\nu}\mathscr{L}. \tag{14}$$

在 $SU(N)$ 规范场中的 $U(1)$ 规范场强可定义为[7]

$$F_{\mu\nu}=F^a_{\mu\nu}\hat{\phi}^a+\frac{K}{g}[D_\mu\hat{\phi}^a,D_\nu\hat{\phi}^a], \tag{15}$$

其中 $\hat{\phi}^a$ 为只具有两种不同特征值的单位 Higgs 场矢量 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 的分量，K 为只依赖于群阶及特征重数的一个常数．在条件 (i) 成立时，

$$F_{\mu\nu}=F^a_{\mu\nu}\hat{\phi}^a, \tag{16}$$

现在由条件(ii)，有

$$F^a_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}\hat{\phi}^a, \tag{17}$$

所以，将式(17)代入(13)、(14)后有

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\eta\rho}F_{\mu\eta}F_{\nu\rho}, \tag{18}$$

$$T_{\mu\nu}=g^{\eta\rho}F_{\mu\eta}F_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}g^{\eta\rho}F_{\alpha\eta}F_{\beta\rho}, \tag{19}$$

在形式上，它们与弯曲空间中电磁场的拉氏函数密度及能量动量张量完全一样，只是这里 $F_{\mu\nu}$ 是 $SU(N)$ 规范场的 $U(1)$ 场强．它不同于普通电磁场之处在于除电荷外，还有量子化了的对偶荷(磁荷) $g_{(N)}$．把式(18)代入(1)，便知道此时问题已化作 Einstein-$U(1)$ 规范场耦合方程的求解问题．所以 Einstein-$U(1)$ 规范场耦合方程有什么形式的解，则 Einstein-$SU(N)$ 规范场-Higgs 场耦合方程在条件 (i)、(ii) 下亦有相同形式的解．定理证毕．

(四)

例 1. 中心球对称的静态情况

文 [2]—[5] 已给出 $SU(2)$ 情形的解．易验证这时条件 (i)、(ii) 是满足的，此时条件 (ii) 甚至是条件 (i) 的推论[8]，而不是一个独立的条件．这时解出的度规正是 Reissner-Nordström 度规形式，文 [2] 的计算表明，只不过是作 $e^2\to Q^2+g^2_{(2)}$ 代换而已($g_{(2)}=1/g$ 为 $SU(2)$ 的规范对偶荷)．应当补充一点：如果 $SU(2)$ 空间与普通空间的关系不是同步而是 n 倍步映射的话，那么则有相应的 n 倍步解，其代换为 $e^2\to Q^2+(ng_{(2)})^2$．

$SU(2)$ 的结果对 $SU(N)$ 的情况有普遍的意义．对 $SU(N)$ 球对称解，令

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} e^{-2\Sigma} & & & \\ & e^{2\Lambda} & & \\ & & r^2 & \\ & & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix},\quad \sqrt{-g}=e^{\Sigma+\Lambda}r^2\sin\theta, \tag{20}$$

其中 Σ 及 Λ 只是 r 的函数．由于球对称，非零的 $F_{\mu\nu}$ 只有 $\mathbf{F}_{\tau\tau}$ 及 $\mathbf{F}_{\theta\varphi}$，因而由(14)容易得到

$$e^{-2\Sigma}T_{\tau\tau}=-e^{-2\Lambda}T_{rr}, \tag{21}$$

把式(20)代入(6)后得

$$e^{2\Sigma}\left[\frac{2}{r}\Lambda' e^{-2\Lambda}+\frac{1}{r^2}(1-e^{-2\Lambda})\right]=2kT_{\tau\tau}, \tag{22}$$

$$e^{2\Lambda}\left[\frac{2}{r}\Sigma' e^{-2\Lambda}-\frac{1}{r^2}(1-e^{-2\Lambda})\right]=2kT_{rr}, \tag{23}$$

$$r^2e^{-2\Lambda}\left[\Sigma''-\Sigma'\Lambda'+\Sigma'^2+\frac{1}{r}(\Sigma'-\Lambda')\right]=2kT_{\theta\theta}, \tag{24}$$

由方程(22)、(23),再用(21),并注意到当 $\Sigma=\Lambda=0$ 时应回到平直空间,故得到

$$\Sigma+\Lambda=0, \tag{25}$$

在这条件下,方程(10)导致一组与 Σ、Λ 完全退耦的方程(这是球对称的普遍性质):

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\partial_\tau(r^2\mathbf{F}_{\tau r})+i[\mathbf{F}_{\tau r},\mathbf{W}_r]=0, \quad i[\mathbf{F}_{\tau r},\mathbf{W}_\tau]=0,\\ \partial_\varphi\mathbf{F}_{\theta\varphi}-i[\mathbf{F}_{\theta\varphi},\mathbf{W}_\varphi]=0,\\ -\partial_\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\mathbf{F}_{\theta\varphi}\right)+\frac{i}{\sin\theta}[\mathbf{F}_{\theta\varphi},\mathbf{W}_\theta]=0\end{cases} \tag{26}$$

这时问题归结为由方程(26)解出场强,然后代入式(22),并计及(25),由之算出度规. 在 $SU(3)$ 时,文[9]给出的一组解可得 $SU(3)$ 的 $U(1)$ 场强为

$$F_{\tau r}=\pm\frac{Q}{r^2}, \quad F_{\theta\varphi}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2g}\sin\theta\equiv\pm g_{(3)}\sin\theta, \tag{27}$$

与这组解对应的 Higgs 场只具有两种不同的特征值,可见,第二节中定理的条件 (i), (ii) 均满足,弯曲空间的线元为

$$ds^2=-\left(1-\frac{2km}{r}+\frac{k}{r^2}(Q^2+g_{(3)}^2)\right)dt^2+\frac{1}{1-\frac{2km}{r}+\frac{k}{r^2}(Q^2+g_{(3)}^2)}dr^2$$
$$+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{28}$$

即它正是 Reissner-Nordström 线元中 $e^2\to Q^2+g_{(3)}^2$ 代换的结果.

例 2. 非中心球对称的情况

在此情况下, Einstein-$U(1)$ 场耦合方程有 Kerr-Newmann 解[10],故当条件 (i) 及 (ii) 满足时, Einstein-$SU(N)$-Higgs 场耦合方程亦有 Kerr-Newmann 形式的解. 文[5]中对 Einstein-纯 Yang-Mills 场从电磁势 W_μ^0 与电磁场强作了一个 Kerr-Newmann 形式的解. 用于 $SU(N)$ 情况,他的作法是选 N^2-1个参数 β^a,使它们满足 $\beta^a\beta^a=1$,然后构造

$$W_\mu^a=\beta^aW_\mu^0, \tag{29}$$

$$F_{\mu\nu}^a=\beta^aF_{\mu\nu}^0. \tag{30}$$

事实上 W_μ^0、$F_{\mu\nu}^0$ 应是 $SU(N)$ 规范场的 $U(1)$场势与场强.它与普通电磁场在荷值上有区别,文[5]所构造的解可以直接作为 Einstein-$SU(N)$-Higgs 场的解,只要把参数 β^a 选为

$$\beta^a=\hat{\phi}^a \tag{31}$$

而选 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ 只有两种不同的特征值,这时由(30)得到的 $F_{\mu\nu}^0=F_{\mu\nu}^a\beta^a=F_{\mu\nu}^a\hat{\phi}^a$, 在 $D_\mu\hat{\boldsymbol{\Phi}}=0$ 时就可以保证为 $U(1)$ 场强[9],而由于(29)和 β^a 为常参数,条件(i)是满足的. 式(31)则为条件 (ii), 可见定理在非中心对称的情况下亦正确.

作者感谢侯伯宇同志与我们进行的有益讨论和所提出的宝贵意见.

参 考 资 料

[1] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.*, **B79**(1973), 276.
[2] F. A. Bias and R. J. Russel, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 2692.

[3] Y. M. Cho and P. G. O. Freund, *Phys. Rev.*,D12(1975), 1588.
[4] M. Y. Wang, *Phys. Rev.*, D12(1975), 3069.
[5] P. B. Yasskin, *Phys. Rev.*, D12(1975), 2212.
[6] 侯伯宇，规范场的分解约化及可 Abel 化场对偶荷解，(待发表).
[7] 谷超豪，复旦学报(自然科学版)1976, **4—5**, 161.
[8] 侯伯宇，物理学报，**26** (1977), 83.
[9] A. Chakrabarti, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 23(1975), 235.
[10] R. P. Kerr, *Phys. Rev. Letters*, 11(1963), 237. E. T. Newmann, E. Couch, K. Chinmaparad, A. Exton, A. Prakhash and R. Torrence, *J. Math. Phys.*, 6(1965), 918.

ON THE MAGNETIC MONOPOLE AND DIPOLE SOLUTION OF THE $SU(N)$ GAUGE FIELD THEORY IN A CURVED SPACE

WANG KE-LIN
(*Chengtu Institute of Geology*)

HSIEN TING-CHANG
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

CHENG HSI-TEH
(*Chengtu Institute of Technology*)

更　　正

本刊第 2 卷第 1 期"关于 $SU(2)$ 瞬子方程的一点注记"一文最后一段(第 89 页)"作者曾在 1977 年基本粒子理论暑期座谈会上……"应改为"作者曾在杨振宁教授 1977 年暑期访华讨论会上……".