第 2 卷 第 4 期 高能物理与核物理 Vol. 2, No. 4
1978 年 7 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1978

含磁荷的奇异原子的能级与定态

戴 显 熹
（复 旦 大 学）

摘 要

本短文基于对通常量子力学中定解原则的某些不统一性的分析，建议了自然包括有本性奇点的态的调整了的量子力学框架．在这个基础上，利用杨振宁-吴大峻的磁荷球谐函数，求解了磁荷与各种“基本”粒子所组成的奇异原子的定态问题．

本文假设磁荷作为一种与电子对应的特定实体（观点 A）或者作为与通常电荷平行的一般属性（观点 B）而存在，探讨“基本”粒子具有含磁荷的复合结构问题．在前一篇文章[1]中，我们讨论了正负磁荷体系的定态问题，在相对论 Dirac 方程的情形下提出了通过正交性判据求解的办法，以处理波函数在极强吸引中心处产生本性奇点的困难．这里我们在处理含磁荷的奇异原子模型时，也需要为非相对论 Schrödinger 方程的求解提出类似的办法．

定态 Schrödinger 方程在只有中心势场

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \tag{1}$$

情形下的解为

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

而

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left\{\frac{2ME}{\hbar^2} + \frac{2M\alpha}{\hbar^2 r} + \frac{\Gamma}{r^2}\right\} R(r) = 0, \tag{2}$$

其中

$$\Gamma = \frac{2M\beta}{\hbar^2} - l(l+1).$$

在 Ландау 的书中[2]，曾讨论过 $\alpha = 0$ 的情况有“陨落”发生，但未严格求解，没有讨论能量有复本征值和解的不正交性问题以及径向流问题．仿照文[1]，我们有下列

定理：设在中心势场中能量为 E_1 和 E_2 的定态波函数径向部分为 $R_1(r)$ 和 $R_2(r)$，如定义

$$q(r, E_1, E_2) = -\frac{\hbar^2 r^2}{2M}\begin{vmatrix} R_1^*(r) & R_1'^*(r) \\ R_2(r) & R_2'(r) \end{vmatrix}, \tag{3}$$

本文 1976 年 12 月 7 日收到．

$\left[R'(r)=\dfrac{dR}{dr}\right]$，则这两个定态彼此正交的判别条件为：

$$\frac{1}{E_1-E_2}\left[\lim_{r\to 0} q(r, E_1, E_2)-\lim_{r\to\infty} q(r, E_1, E_2)\right]$$
$$=\begin{cases}0 & (\text{对 } E_1\neq E_2 \text{ 的二个束缚态}),\\ \delta(E_1-E_2) & (\text{对二个非束缚态}),\\ 0 & (\text{对一个束缚态和一个非束缚态}).\end{cases} \tag{4}$$

用正交条件 (4) 式就可以统一求解方程 (2)，结论如下：

(i) 当 $\Gamma<1/4$

束缚态波函数的径向部分为

$$R(\rho)=\rho^s e^{-\rho/2}F(-n_r, 2s+2, \rho), \tag{5}$$

其中 $\rho=r/\xi$, $\xi=\sqrt{\dfrac{\hbar^2}{8M|E|}}$, $s=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{1/4-\Gamma}$, $F(a, b, \rho)$ 是合流超比级数，定态能量

$$E=E_{n_r, l}=\frac{-\alpha^2 M}{2\hbar^2\left[n_r+\dfrac{1}{2}+\sqrt{\left(l+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{2M\beta}{\hbar^2}}\right]^2} \tag{6}$$

$$(n_r=0, 1, 2, 3\cdots, \quad l=0, 1, 2, 3, \cdots),$$

注意在原点处波函数是有奇性的，但平方可积．另一组独立解因奇性太高而弃去．

(ii) 当 $\Gamma>1/4$

此时 $s=-\dfrac{1}{2}+i\nu$ 为复数 $(\nu=\sqrt{\Gamma-1/4})$，出现复的能量本征值和复的 $R(\rho)$，仿文[1]，应先从合流超比方程的二个独立解中取出一种特定的线性组合，使 $R(\rho)$ 为实数且在无穷远处趋向零，结果是

$$R(\rho)=C_0 e^{-\rho/2}\rho^{-1/2} I_m\left\{\Gamma\left(-A+\frac{1}{2}+i\nu\right)\Gamma(1-2i\nu)\rho^{i\nu}F\left(-A+\frac{1}{2}+i\nu, 1+2i\nu, \rho\right)\right\} \tag{7}$$

$\left(A=\dfrac{2M\alpha\xi}{\hbar^2}\right)$. 然后用正交条件 (4) 得出定能级 E_n 的方程：

$$\arg\Gamma\left(-\alpha\sqrt{\frac{M}{2\hbar^2|E_n|}}+\frac{1}{2}+i\nu\right)+\frac{\nu}{2}\ln\left[\frac{8M\theta_0^2}{\hbar^2}|E_n|\right]=n\pi \tag{8}$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2\cdots),$$

此超越方程除通过 ν 依赖于 l 外，尚有一单参数 θ_0^2 未定，这是波函数在 $r=0$ 有一本性奇点出现的结果[1].

当 $\alpha=0$，(7) 式简化为

$$R(\rho)=\frac{C_0'}{\sqrt{\rho}}K_{i\nu}(\rho/2), \tag{9}$$

$K_{i\nu}(x)$ 为虚指标的 McDonald 函数：

$$K_{i\nu}(x) = -\frac{\pi}{\mathrm{sh}\nu\pi} I_m I_{i\nu}(x) \tag{10}$$

代替 (8) 式，能级由下式给出：

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{8M\theta_0^2}\exp\left[\frac{2(n\pi - \zeta_\nu)}{\nu}\right], \quad \left[\zeta_\nu = \arg\left(\frac{1}{2} + i\nu\right)\right]. \tag{11}$$

不论 α 是否为零，当 $E \to -\infty$ 时，粒子对原点的平均距离

$$\bar{r} = \xi \frac{\int_0^\infty R^2(\rho)\rho^3 d\rho}{\int_0^\infty R^2(\rho)\rho^2 d\rho} \to \xi \frac{\int_0^\infty K_{i\nu}^2(\rho/2)\rho^2 d\rho}{\int_0^\infty K_{i\nu}^2(\rho/2)\rho d\rho} \sim \frac{1}{\sqrt{|E|}} \to 0, \tag{12}$$

这就是所谓“陨落”．在相对论量子力学中，由于打破了这种标度性，陨落并不存在[1]．

有了以上准备，下面讨论含磁荷的束缚体系，分两类观点．

A．磁荷作为 Dirac 电子的对应物，具有质量 M_0 及固有电矩[1]

$$\vec{p}_0 = \frac{g\hbar}{2M_0c}\vec{\sigma} = \frac{137}{2\left(\frac{M_0}{M_p}\right)}\mu_N\vec{\sigma} \tag{13}$$

$\left(g = \frac{\hbar c}{2e},\ \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_pc}\right)$，因而在外电场中有附加势能．我们讨论一个磁荷与 K、π 等荷电介子组成束缚态问题时，需求解 Pauli 方程(磁荷取为不动中心)：

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar^2}{2Mr^2}\left[\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} - q^2 + \beta_0\sigma_r\frac{2M}{\hbar^2}\right]\right\}\psi = E\psi, \tag{14}$$

M 和 Ze 为介子的质量和电荷，$\beta_0 = Ze\left[\frac{137}{2}\right]\frac{\hbar e}{2M_0c}$，$\sigma_r = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{r}}{r}$，$q = \frac{NZ}{2}$ (N——磁荷数 $=1$)．式中 $\vec{L}$ 是吴大峻-杨振宁[3]仿照 Fierz 的做法而引入的“角动量”：

$$\vec{L} = \vec{r}\times\left(\vec{p} - \frac{Ze}{c}\vec{A}\right) - \frac{q\vec{r}}{r}. \tag{15}$$

由于 $\vec{p}_0$ 的存在，破坏了球对称性，$\vec{L}^2$ 不守恒．但总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ 及其投影 J_z 分别有好量子数 j 和 m．(14) 式的解 ψ_{jm} 的角度部分要用吴-杨的磁荷球谐函数组成的二个基旋量展开：

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} \left(\frac{j+m}{2j}\right)^{1/2} Y_{q,j-1/2,m-1/2} \\ \left(\frac{j-m}{2j}\right)^{1/2} Y_{q,j-1/2,m+1/2} \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} -\left(\frac{j-m+1}{2j+2}\right)^{1/2} Y_{q,j+1/2,m-1/2} \\ \left(\frac{j+m}{2j+2}\right)^{1/2} Y_{q,j+1/2,m+1/2} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

这样问题归结为把算符

$$\hat{F} = \left(\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} - q^2\right) + \beta_0\frac{2M}{\hbar^2}\sigma_r \tag{17}$$

在基矢表象 (16) 中对角化，结果求得 $\hat{F}$ 的本征值 λ_α 为：

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2}\{(F_{11} + F_{22}) - (-1)^\alpha\sqrt{(F_{11} + F_{22})^2 - 4(|F_{12}|^2 - F_{11}F_{22})}\}.$$

$$(\alpha = 1, 2) \tag{18}$$

而相应的波函数径向部分由方程

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}-\frac{\lambda_\alpha}{r^2}R(r)=-\frac{2ME}{\hbar^2}R(r) \tag{19}$$

解出为

$$R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}K_\omega(k_0r),$$

其中

$$\omega^2=\lambda_\alpha+\frac{1}{4},\ k_0^2=-\frac{2ME}{\hbar^2}>0.$$

对解的性质,有下列判据:

(i) $\lambda_\alpha>3/4$, $\omega>1$(实数),波函数范数无界,无束缚态;

(ii) $-1/4\leqslant\lambda_\alpha\leqslant 3/4$, $0\leqslant\omega<1$(实数),波函数范数有界,但不满足正交条件,亦无束缚态;

(iii) $\lambda_\alpha<-1/4$, $\omega=i\nu$(纯虚数),则有无穷多能级,由(11)式给出.

我们看到总角动量 j 最低的态 ($j=|q|-1/2$) 同时是耦合表象基矢,此时

$$\lambda_0=|q|+\beta_0\left(\frac{2M}{\hbar^2}\right). \tag{20}$$

正磁荷与 π^- 或 K^-,负磁荷与 π^+ 或 K^+,才能出现吸引性势,但如估计 $M_0\gg M$ ($N=1$),则 $\lambda_0>-1/4$,故由上面判据可见不能有束缚态.

另外,考虑粒子有大小,用合理的切断近似,假设当 $r<r_0$,有效势变为

$$\widetilde{U}=U_0\hat{F}, \tag{21}$$

仍得不到束缚态.

B. 磁荷象电荷一样,可附着在其它粒子上.下面再分几种情形讨论:

(i) 带磁荷而电中性的玻色子和重子的束缚态

此时不考虑磁荷的反常电矩,但计入重子的磁矩 $\vec{\mu}=\gamma\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}'$, $\gamma=\mu'\frac{e}{Mc}$,在磁荷产生的磁场中有附加势能,于是代替(14)式中的 $\frac{\beta\sigma_r}{r^2}$ 项,现在出现 $-\frac{\beta_0'\sigma_r'}{r^2}=-\frac{N\hbar^2\mu'\sigma_r'}{4Mr^2}$ 项,符号不同,结果代替(20)式而有

$$\lambda_0=-\frac{1}{2}(\mu'-1), \tag{22}$$

对于电子或 μ 子,因 $\mu'\sim 1$, $\lambda_0\sim 0$,按前面判据,无束缚态.但对重子,因有反常磁矩,$\mu'>1.5$, $\lambda_0<-1/4$,可有束缚态,一般当 $\omega=\sqrt{\lambda_\alpha+1/4}=i\nu$ 为纯虚数时,波函数径向部分由(9)式给出,能级由(11)式给出.

如用切断近似,结果当然与切断方式有关,分二种讨论:

(a) 刚球势

$$U(r)=\infty\quad(r<r_0) \tag{23}$$

则

$$R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}K_{i\nu}\left(\frac{s_\nu^n}{r_0}r\right),\quad(r>r_0) \tag{24}$$

$$E_{\nu,n}=-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{(s_\nu^n)^2}{r_0^2}\simeq-\frac{2\hbar^2}{Mr_0^2}\exp\left\{-\frac{2}{\nu}[n\pi-\arg\Gamma(i\nu+1)]\right\}, \tag{25}$$

其中 s_ν^n 是 $K_{i\nu}(x)$ 的第 n 个零点*.

如取 $r_0 \sim 10^{-13}$ cm, 则 $|E_0| \sim 10^6$ eV; 如改用 Price 对磁荷质量的估计, $M_0 \sim 200 M_p$, 取 $r_0 \sim \frac{\hbar}{M_0 c}$, 则 $r_0 \sim 10^{-16}$ cm, 而 $|\Delta E| \sim 1$ GeV.

(b) 在 $r < r_0$ 区域用有效势

$$\widetilde{U} = U_1(r)\hat{F} \tag{26}$$

我们讨论了 $U_1(r)$ 为常数且在 r_0 连续以及

$$U_1(r) = U_0 - \varepsilon r^2 \tag{27}$$

两种情形,可见在 $E \to 0^-$ 时有无穷多束缚态能级.

(ii) 带磁荷又带电荷的玻色子与 $e^\pm$, $\mu^\pm$, $\pi^\pm$, $K^\pm$ 的束缚态

设玻色子带磁荷 Ng, 带电荷 $(-Z_0 e)$, 则另一质量为 M 荷电为 Ze 的粒子的运动方程,在计入后者的磁矩后为

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\alpha_0}{r} + \frac{\hbar^2}{2Mr^2}\hat{F}\right]\psi = E\psi, \tag{28}$$

其中

$$\alpha_0 = Z_0 Z e^2, \quad \hat{F} = \left(\frac{\vec{L}^2}{\hbar^2} - q^2\right) - \mu'\left(\frac{N}{2}\right)\sigma'_r, \tag{29}$$

则波函数角度部分可类似于 (14) 式那样处理,而径向方程为:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2Mr^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} + \frac{\alpha_0}{r} - \frac{\hbar^2\lambda_\alpha}{2Mr^2}\right]R(r) + ER(r) = 0. \tag{30}$$

现在可与方程 (2) 比较了,讨论如下:

(a) 不论对 e, μ 还是 π, K, 均有 $\Gamma = -\lambda_\alpha < 1/4$, 故波函数和能级由 (5), (6) 两式给出,能级密集于 $E \sim 0$ 附近.

对 π, K, 因无磁矩, $\mu' = 0$, $\lambda_\alpha = l(l+1) - q^2$, 特别简单; 但对 e, μ, 因无核力作用,这一解析解似较可靠.

(b) 对于重子,由于反常磁矩的存在, $\Gamma = -\lambda_\alpha > 1/4$, 波函数及能级由 (7), (8) 二式给出, 能级密集于 $E \sim 0$, 稀疏地延伸 $E \to -\infty$. 如果采用切断近似, 无论刚球势 (23) 或有效势 (26)—(27), 都可得到无穷多束缚态,但能级分布不同.

(iii) 带电荷又带磁荷的费米子与荷电费米子的束缚态

这时不但要考虑磁荷矢势的奇性,而且要同时考虑三种相互作用: 电荷间的库仑作用 $\left(-\frac{\alpha_0}{r}\right)$, 磁荷固有电矩与电荷的作用 $\frac{\beta_0\sigma_r}{r^2}$ 及磁荷与费米子磁矩的作用 $\left(-\frac{\beta'_0\sigma'_r}{r^2}\right)$.

把后两种作用当作微扰, 对体系的第一激发态作近似计算, 也可将 8×8 的矩阵对

---

* 当 $x \gg 1$, $K_{i\nu}(x) \simeq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x}$, $x = 0$ 为其本性奇点;当 $x \ll 1$,

$$K_{i\nu}(x) \simeq \left(\frac{\pi}{\nu\,\mathrm{sh}\,\nu\pi}\right)^{1/2} \sin\left[\nu \ln\left(\frac{2}{x}\right) + \arg\Gamma(i\nu + 1)\right].$$

它有收敛很快的实的积分表示式:

$$K_{i\nu}(x) = \int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}\,\nu t\,dt.$$

数值表已有人算过, $\arg\Gamma(x)$ 也有表可查.

角化，使一个八重简并能级分裂为四个二重简并能级.

总之，本文通过对量子力学定态求解方法的改进，讨论了磁荷与"基本"粒子形成复合体系的可能性问题. 有关量子力学原理及方法的较详细讨论将另文发表.

最后，对倪光炯同志的热情支持与讨论表示衷心感谢.

附 记

最近查明 K. M. Case 曾运用正交条件讨论过奇性势的束缚态问题（*Phys*. Rev., 80 (1950), 797），但没有讨论非束缚态问题，未能确定任意常数与能级. 在我们的工作中，讨论了非束缚态、复本征值、径向流、量子力学框架的调整、相角不定性的消除，从而确定了能级方程，并运用于磁荷问题中.

参 考 资 料

[1] 戴显熹，正负磁荷体系的能级和正交完备系，复旦学报（待发表）.
[2] Л. И. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантвая Механика, (Физматгиз, 1963).
[3] Tai Tsun Wu, Cheng Ning Yang, *Dirac Monopole without Strings: Monopole Harmonics*, ITP-SB-76-5.
[4] Таблицы Модифицированных Функций Бесселяс Мнимым Индексом $K_{ir}(x)$, М. изд вц АНСССР (1967).
[5] Table of the Gamma Function for Complex Arguments, N. B. S. Applied Mathematics Series 34 (1954).

ON THE ENERGY LEVELS AND THE STATIONARY STATES OF THE EXOTIC ATOMS CONTAINING MONOPOLES

DAI XIAN-XI
(*Fudan University*)

ABSTRACT

In this short paper, which is based on an analysis of some contradictions of the principles for the determination of the solution in usual quantum mechanics, and we suggest an adjusted framework of quantum mechanics, which naturally contains essentailly singular states. By using the monopole harmonics, which were studied by Yang and Wu, we solve the stationary state problems of the exotic atoms, which contain the magnetic monopole and different elementary particles.