

# 高能朝后势散射

姜焕清 李扬国

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

在忽略格林算子中的横向动量转移情况下,得到了一个描述高能朝后散射较简单的近似公式。并举例把近似解和精确解作了比较。

## 一、引 言

高能粒子在势场中的散射已经有了多年的研究,玻恩近似、WKB方法以及 Eikonal 近似方法都是描述势散射的有用的近似方法。然而,所有这些近似方法都只在小角度给出较精确的结果,在后半球的散射,偏离便较大。近年来,许多人进一步考虑了 Eikonal 展开的各种修正<sup>[1,2]</sup>,力图使它能用来近似描述大角度散射,但这也只能使适用的范围稍加扩大<sup>[2]</sup>或者变化不大<sup>[3]</sup>, Abarbanel 和 Itzykson<sup>[4]</sup>把 Glauber 近似的结果推广到相对论情况,在小角度基本上仍是 Glauber 的结果,在大角度与精确解偏离更大<sup>[2]</sup>。

Chen 和 Hoock 考虑了向后散射情况下,格林传播子中纵向动量转移的修正,提出了处理高能朝后势散射的处理方法<sup>[5]</sup>,得到了较好的结果。但是,他们仍然忽略了一些可能是重要的项目,本文将进一步讨论朝后势散射的近似处理方法。第二节给出公式推导,第三节给出以高斯位阱为例的数值计算结果及与精确解的比较,最后作一些讨论。

## 二、基 本 公 式

考虑质量为  $m$ 、初始动量为  $\mathbf{K}$  的粒子,受势场  $V(r)$  散射,出射动量为  $\mathbf{K}'$ , 散射振幅可写为(取  $\hbar = c = 1$  的单位):

$$f(\mathbf{q}) = -4m\pi^2 \langle \mathbf{K}' | T | \mathbf{K} \rangle, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{q} = \mathbf{K} - \mathbf{K}'$  为动量转移,  $K' = K = (2mE)^{\frac{1}{2}}$ , 散射  $T$  矩阵满足李普曼-许温格方程

$$T = V + VGV = V + VgT, \quad (2)$$

这里

$$G = g + gVG, \quad (2a)$$

$$g = (E - P^2/2m + i\epsilon)^{-1}. \quad (2b)$$

散射振幅可写为:

$$f(\mathbf{q}) = f_B - 4m\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \mathbf{K}' | V(gV)^n | \mathbf{K} \rangle, \quad (3)$$

$f_B$  为玻恩项,其中格林函数在坐标表象为

$$g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int d^3P \frac{e^{i\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{K^2/2m - P^2/2m + i\epsilon}. \quad (3a)$$

在研究朝前散射时,动量转移很小,在高能情况下,常取(3a)的线性化近似.现在,为研究朝后散射,我们先研究格林算子应取什么样的近似最合适.为此,作变换  $\mathbf{P} = \mathbf{K} + \Delta$ , 则  $d^3P = d^3\Delta$ , 取  $\mathbf{K}$  方向为  $z$  轴,格林函数  $g(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  可以写为:

$$g(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 e^{i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})} \int d^3\Delta \frac{e^{i\Delta\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})}}{-\frac{K\Delta_z}{m} - \frac{\Delta_z^2 + \Delta_\perp^2}{2m} + i\epsilon}, \quad (4)$$

因为  $V(r)$  是缓慢变化的函数,  $K$  足够大,在小角度散射的情况下,  $\Delta$  是小量,所以可以略去  $g(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$  的被积函数的分母中的  $\Delta^2$  项,这就是线性化的格林函数,用这种线性化的格林函数得到的散射振幅,在小角度给出了很好的结果.在考虑朝后散射时,  $\Delta_\perp$  的大小与朝前散射差不多,是小量,而  $\Delta_z$  不能再看成是小量.因此,在研究朝后散射时,我们可以略去格林函数分母中的  $\Delta_\perp^2$  项,而必须保留  $\Delta_z$  及  $\Delta_z^2$  项,这样,我们就得到:

$$g(\boldsymbol{\rho}) \approx g_0(\boldsymbol{\rho}) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 e^{i\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\rho}} \int d^3\Delta \frac{e^{i\Delta\cdot\boldsymbol{\rho}}}{\frac{K\Delta_z}{m} + \frac{\Delta_z^2}{2m} - i\epsilon}, \quad (5)$$

其中  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , 利用留数定理,取  $\mathbf{K}$  方向为  $z$  轴,作出上述积分,则得:

$$g_0(\boldsymbol{\rho}) = g_{0+}(\boldsymbol{\rho}) + g_{0-}(\boldsymbol{\rho}), \quad (6)$$

这里

$$\begin{aligned} g_{0+}(\boldsymbol{\rho}) &= -\frac{im}{K} \delta^2(\rho_\perp) \theta(\rho_z) e^{iK\rho_z}, \\ g_{0-}(\boldsymbol{\rho}) &= -\frac{im}{K} \delta^2(\rho_\perp) \theta(-\rho_z) e^{-iK\rho_z}. \end{aligned} \quad (7)$$

$g_{0+}$  是表示沿  $z$  方向朝前传播的传播子,  $g_{0-}$  是表示沿  $z$  方向朝后传播的传播子.格林函数近似写成(6)式的形式,表示在这种情况下,粒子在某处与位场发生作用后,只是向前传播或者向后传播,而不向其他方向传播.

利用(6)式,则散射  $T$  矩阵可以形式上写为:

$$\begin{aligned} T &= V + V(g_{0+} + g_{0-})T \\ &= T^{(1)} + T^{(3)} + T^{(5)} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n (Vg_{0-})^s (Vg_{0+})^{n-s} V; \\ T^{(3)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} [(Vg_{0-})^m (Vg_{0+})^n (Vg_{0-})^p (Vg_{0+})^q V], \\ T^{(5)} &= \sum_{\substack{m, k=0 \\ n, p, q, l=1}}^{\infty} (Vg_{0-})^m (Vg_{0+})^n (Vg_{0-})^p (Vg_{0+})^q (Vg_{0-})^l (Vg_{0+})^k V. \end{aligned} \quad (9)$$

(8)式  $T$  的展开是按入射粒子在势场  $V(r)$  中回头反折次数来展开的,对朝前散射,  $T^{(1)}$  只包括一直朝前项和反折朝后再折向前的项,如讨论朝后散射,它只包括所有的一次回头散射,即入射粒子与位场作用  $n-s$  次,一直保持朝前方向,第  $n-s+1$  次作用使

粒子回头，再沿朝后方向与位场发生  $s$  次作用，最后粒子沿着朝后方向飞出。 $T^{(3)}$  是入射粒子与位场作用，在朝后方向飞出前，在位场中往返回头三次的项。其他项类推。显然  $T^{(1)}$  项是主要的，我们现在仅取  $T^{(1)}$  项。把  $T^{(1)}$  代入 (1) 式，则得：

$$f(\mathbf{q}) = -4\pi^2 m \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^n \mathcal{F}^{(ns)}(\mathbf{q}), \quad (10)$$

其中

$$\mathcal{F}^{(ns)}(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{K}' | (V g_{0-})^s (V g_{0+})^{n-s} V | \mathbf{K} \rangle. \quad (11)$$

利用 (7) 式可得：

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(ns)}(\mathbf{q}) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(-\frac{im}{K}\right)^n \int d^3 r_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_0} V(r_0) \\ &\times e^{-2iKz_0} \int_{z_0}^{\infty} dz_1 V(b, z_1) \cdots \int_{z_{s-1}}^{\infty} dz_s V(b, z_s) e^{2iKz_s} \\ &\times \int_{-\infty}^{z_s} dz_{s+1} V(b, z_{s+1}) \cdots \int_{-\infty}^{z_{n-1}} dz_n V(b, z_n). \end{aligned} \quad (12)$$

下面我们讨论一下一些项的物理意义：

(i) 当只取  $n=0$  的项，(10) 式中只有  $\mathcal{F}^{(00)}$  项，这就是熟知的玻恩近似的结果，

$$f_B(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3 r e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r). \quad (13)$$

(ii) 在 (10) 式中，对各种可能的  $n$  求和，而只取  $s=0$  的项，利用如下积分公式，

$$\int_{-\infty}^{z_0} dz_1 V(b, z_1) \int_{-\infty}^{z_1} \cdots \int_{-\infty}^{z_{n-1}} dz_n V(b, z_n) = \frac{\left[ \int_{-\infty}^{z_0} dz V(b, z) \right]^n}{n!}, \quad (14)$$

经过整理可得：

$$f_G(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^3 r_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_0 - \frac{im}{K} z_0} \int_{-\infty}^{z_0} dz V(b, z) V(b, z_0), \quad (15)$$

在这里， $s=0$ ，即没有朝后传播的传播子，粒子与位场发生作用一直朝前，这就是朝前势散射的 Glauber 近似的结果，用它来考虑朝后散射时，即表示粒子一旦回头，便不再与位场发生作用。

(iii) 在 (10) 式中，对所有的  $n$  求和，而只取  $s=0$  和 1，这就是资料 [5] 的朝后势散射的结果，我们把它表示为  $f_{CH}$ ，

$$\begin{aligned} f_{CH}(\mathbf{q}) &= f_G(\mathbf{q}) \\ &+ \frac{im^2}{2\pi K} \int d^3 r_0 e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_0} V(r_0) e^{-2iKz_0} \\ &\times \int_{z_0}^{\infty} dz_1 V(b, z_1) e^{-\frac{im}{K} \int_{-\infty}^{z_1} dz V(b, z)} e^{2iKz_1}. \end{aligned} \quad (16)$$

这个结果的物理意义是，当入射粒子与位场发生  $n$  次作用时，或者是最后一次作用使它回头向后，回头后不再与势场发生作用  $f_G(q)$ ，或者回头后再与势场发生一次作用。即它在位场中大部分时间是向前传播，一旦回头，便很快离开势场。

(iv) 对 (10) 中所有的  $n, s$  求和，并利用公式

$$\int_A^B dz_1 \int_{z_1}^B dz_2 \cdots \int_{z_{s-1}}^B dz_s f(z_1, z_2 \cdots z_s)$$

$$= \int_A^B dz_s \int_A^{z_s} dz_{s-1} \cdots \int_A^{z_2} dz_1 f(z_1, z_2 \cdots z_s) \quad (17)$$

及公式(14),可以得到散射振幅:

$$f(\mathbf{q}) = f_G + \frac{im^2}{2\pi K} \int d^3 r_0 e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}_0} V(r_0) e^{-2iKz_0} \\ \times \int_{z_0}^{\infty} dz_s V(b, z_s) e^{2iKz_s - \frac{im}{K} \left( \int_{-\infty}^{z_s} dz V(b, z) + \int_{z_0}^{z_s} dz V(b, z) \right)}. \quad (18)$$

这个结果与(iii)的图象是不同的,在考虑朝后散射时,显然它仍是一次回头,但粒子回头后,继续受势场的多次散射,然后再离开势场.因此它比 $f_{CH}$ 要更接近精确解.显然,在小角度散射的情况下,由于(18)式第二项被积函数中包括很快振荡的因子,所以 $f_G(\mathbf{q})$ 的贡献是主要的.也就是说,一直朝前的散射是主要的,回头朝后再折回朝前的项目是不重要贡献的.而在朝后角度散射时,两项都是重要的,实际上它们都是一次回头项.由于 $f_G(\mathbf{q})$ 在小角度能够给出与精确解接近的结果,而(18)式在小角度散射时又近似为 $f_G(\mathbf{q})$ ,所以,(18)式无论在小角度或 $180^\circ$ 附近都应该比较更接近精确解.

下面进一步讨论在 $180^\circ$ 附近的朝后散射,这种情况下, $\mathbf{K}' \approx -\mathbf{K}$ , (12)式可写为:

$$\mathcal{F}^{(ns)}(\mathbf{q}) \approx \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \left(-\frac{im}{K}\right)^n \int d^2 b e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dz_0 V(b, z_0) \int_{z_0}^{\infty} dz_1 \cdots \int_{z_{s-1}}^{\infty} dz_s V(b, z_s) e^{2iKz_s} \\ \times \int_{-\infty}^{z_s} dz_{s+1} V(b, z_{s+1}) \cdots \int_{-\infty}^{z_{n-1}} dz_n V(b, z_n). \quad (19)$$

利用(17)式及(14)式,完成(10)中对 $n, s$ 的求和,整理后可得:

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \int d^2 b e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{b}} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(b, z) e^{2iKz} e^{-\frac{i2m}{K} \int_{-\infty}^z dz' V(b, z')}. \quad (20)$$

考虑到 $q_z \approx 2K$ ,上式可以近似写为:

$$f(\mathbf{q}) \approx -\frac{m}{2\pi} \int d^3 r e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(r) e^{-\frac{i2m}{K} \int_{-\infty}^z dz' V(b, z')}, \quad (21)$$

这是我们考虑 $180^\circ$ 附近散射的最后结果.有意思的是这个结果与Glauber近似的结果在形式上是一样的,只是粒子得到的相位移增加了一倍,它的物理意义是,入射粒子沿着直线穿过位场,经受一个相位移,这个相位移是与它所经过的道路有关的,当反回相反方向时,它又经受一个同样的相位移,这相当于两次扭曲.

### 三、数值结果及讨论

(21)式是一个四重积分,为了计算上的简便,我们取高斯型位场进行计算,即取

$$V(r) = -V_0 e^{-a^2(b^2+z^2)}. \quad (22)$$

对于高斯势,可以把对碰撞参数 $b$ 的积分分离出来,并可解析地积出.为此,将(21)式改写为:

$$f(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{2mi}{K}\right)^n \int d^2 b dz e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} V(b, z) \chi^n, \quad (23)$$

其中

$$\chi = \int_{-\infty}^z dz' V(b, z'). \quad (23a)$$

将 (22) 式代入 (23), 并对  $d^2b$  积分, 整理后得:

$$f(\mathbf{q}) = \frac{mV_0}{2a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{imV_0}{K} \right)^n \frac{1}{(n+1)!} e^{-\frac{q_1^2}{4(n+1)a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-a^2 z^2 + ia_s z} E^n(z), \quad (24)$$

其中

$$E(z) = \int_{-\infty}^z e^{-a^2 z'^2} dz'. \quad (24a)$$

我们用 (24) 式计算  $180^\circ$  附近的微分截面, 下面给出两组参数的计算结果, 一组相应于质心系能量为 166 MeV 的  $\alpha$ - $\alpha$  散射, 取  $V_0 = 41.6$  MeV,  $a = 1$  fm $^{-1}$ , 同时, 我们也用分波法作严格解. 这些结果都一并画在图 1 中. 另一组参数相应于质心系能量为 320 MeV 的 P-P 散射, 取  $V_0 = 60$  MeV,  $a = 1.2$  fm $^{-1}$ , 计算结果连同精确解都一并画在图 2 中. 为了与资料 [5] 作比较, 我们也用上述位阱计算了  $f_{CH}(\mathbf{q})$ , 得到的  $180^\circ$  附近的微分截面也分别画在两个图中. 从它们与精确解的比较可见, 我们的结果比资料 [5] 的公式有改进, 前一组参数在  $180^\circ$  可改进 50%, 后一组参数有更大的改进.

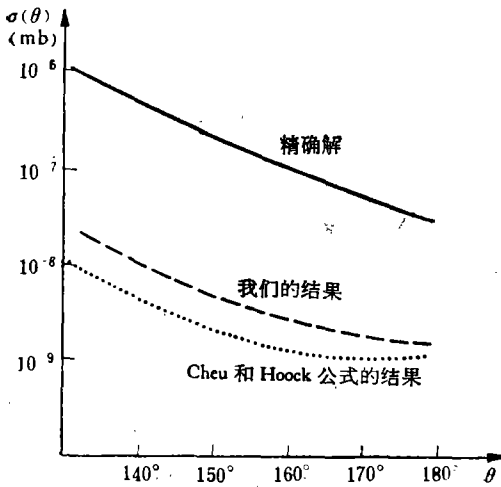


图 1

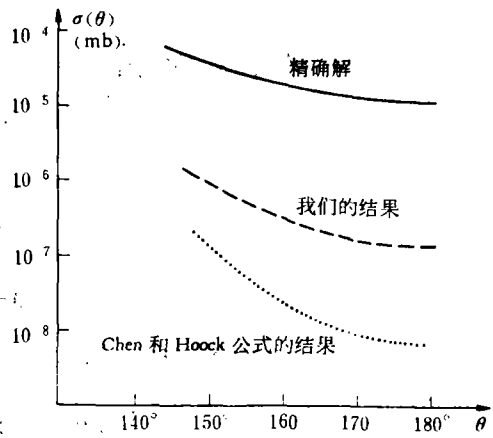


图 2

应该指出, 公式 (23) 中  $n = 0$  和 1 的项与资料 [5] 的相应项是一样的, 但  $n$  大于 1 的项就不同了,  $n$  越大, 两者的结果偏离越大, 在所选用的参数的情况下,  $n$  要取 8 才收敛, 可见, 我们的结果有重要改进是自然的.  $n = 0$  的项是玻恩项, 若取玻恩近似, 其截面与严格解在  $180^\circ$  将有好几个量级的差别, 例如, 第一组参数的情况下, 玻恩微分截面随角度增加而下降很快, 在  $130^\circ$  附近, 截面就已下降到  $10^{-10}$  mb. Glauber 近似的截面在  $180^\circ$  与精确解的偏离也比我们的大的多.

最后, 朝后势散射的近似处理方法与选取位阱的形状也有很大的关系. Chen<sup>[5]</sup> 等选取了指数位阱, 在他们所取的近似下, 计算结果与精确解比较接近, 我们的近似结果比 Chen 等有进一步的改进, 如果选取指数位或汤川位, 相信会与精确解更接近. Sugar 和

Blankenbecler<sup>[1]</sup> 以及 Wallace<sup>[2]</sup> 等人曾分析几种位阱在大角度处, Eikonal 类型的近似解与精确解的偏离情况, 发现, 对于在动量空间随动量变化较缓慢的位势, 如汤川位、指数位, 他们所取的 Eikonal 近似计算结果与精确解相比, 在大角度的偏离比用高斯位要小得多. 因为高斯位在动量空间也是高斯型  $V(q) = -V_0 e^{-a^2 q^2}$ , 随动量的增大而下降很快, 因此, 也使大动量转移(即大角度)处 Eikonal 近似与精确解有大的偏离. 这样, 我们相信, 用汤川位或指数位, 用(21)式的计算结果会很接近精确解.

从上面的分析, 在处理朝后势散射中, (21)式是一个较好的近似. 我们只忽略了横向动量转移对格林函数的影响和多次往反回头的项, 而把一次回头的项全部要了, 因此, 比[5]的结果有更大的改进. 我们的结果在形式上简单, 计算上也还方便. 在推广用于高能粒子与复杂粒子系统的朝后散射时, 也许比前人有些改进.

### 参 考 资 料

- [1] R. L. Sugar and R. Blankenbecler, *Phys. Rev.*, **183** (1969), 1387.
- [2] S. J. Wallace, *Ann. Phys.*, **78** (1973), 190.
- [3] B. J. Berriman and L. Castillejo, *Phys. Rev.*, **D8** (1973), 4647.
- [4] H. D. I. Abarbanel and C. Itzykson, *Phys. Rev. Lett.*, **23** (1969), 53.
- [5] T. W. Chen and D. W. Hoock, *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 1765.

## BACK-WARD POTENTIAL SCATTERING AT HIGH ENERGIES

CHIANG HUAN-CHING    LI YANG-KUO

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

### ABSTRACT

A simpler approximate formula to describe backward potential scattering at high energy is derived by neglecting the transverse momentum transfer in the Green's propagator and, as examples, the numerical results are compared with the exact solutions.