

能量稍高于库仑位垒的 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应的半经典分析

徐树威 冉启惠 马洪范
(中国科学院近代物理研究所)

摘 要

对于入射能量稍高于库仑位垒的较轻的重离子引起的反应,假定宏观摩擦力可以忽略,根据半经典理论,从拟合弹散的经典偏转函数出发,用统一的框架计算获得反应机制按入射道轨道角动量的分类图。此外,在 $K-G$ 角分布公式^[1]中增加了一个反映 Q -窗效应的转移几率因子,得出了计算转移反应的半经典的能量微分截面公式。数值计算结果,包括弹散角分布、准弹性转移过程中出射 α 粒子的角分布和能谱、全融合截面、融合-裂变截面以及中子蒸发的激发函数等与本所发表的 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应的实验数据基本相符。

前 言

入射粒子的德布罗意波长很短是重离子核反应的一个重要特征。因此,伴随重离子核物理的发展,六十年代,七十年代先后出现了核反应的半经典理论和宏观(经典)理论。这些理论,物理图象清晰、参数少、计算简便、又能大致反映出问题的基本轮廓。缺点是无法描绘细致的物理过程。经典或半经典理论认为:重离子在碰撞运动中近似地保持有确定的经典轨道。因此,目前在定性地讨论重离子核反应时,流行按照入射道的轨道角动量对反应机制进行分类。但由于传统的核反应理论只能分别处理准弹性过程(直接反应过程)和全融合过程(复合核过程),要从统一的理论框架出发,定量地进行上述分类存在相当的困难。本文假定对于入射能量不高的、较轻的重离子所引起的核反应,宏观摩擦力可以忽略,从拟合弹散的经典偏转函数出发,加上计算得到的全融合反应衰变道的 $\Gamma_n(l)/\Gamma_f(l)$,尝试性地用半经典理论的统一框架定量地获得了反应机制按入射道的轨道角动量的分类图。此外,在这种图象的基础上计算了准弹性转移反应发射的 α 粒子的能谱和角分布以及中子蒸发激发函数。数值计算结果与本所发表的 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应的实验数据进行了比较。

下面,在第一节和第二节中,我们将叙述用半经典理论分别处理弹散角分布和一种准弹性转移反应的方法以及与实验结果比较的情况。在第三节中我们将叙述用同一理论框

架获得融合反应的形成截面, 同时指出这种做法对处理复合核衰变的影响以及与实验结果比较的情况. 最后, 将主要结果概括地表示在反应机制按入射道轨道角动量的分类图上. 说明, 由半经典理论的统一框架所获得的反应机制分类图与本所 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应的实验结果相比, 基本上达到了定量相符.

一、弹性散射

半经典理论^[2]认为: 弹散角分布完全是由入射粒子在靶核势场中的经典偏转函数确定的. 弹散第 l 个分波振幅的相移 η_l 与相应的偏转函数 $\theta(l)$ 有如下简单的关系:

$$\theta(l) = 2d\eta_l/dl. \tag{1}$$

而偏转函数又可以由下式确定:

$$\theta(l) = \pi - 2 \int_{R_{\min}}^{\infty} \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} E_c - V_N(r) - V_C(r) - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right]^{1/2} \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)}{r^2} dr, \tag{2}$$

其中, $V_N(r)$ 是核势, $V_C(r)$ 是库仑势, μ 是约化质量, R_{\min} 是经典拐点的位置. 库仑势采用点电荷近似, 所以只要选定了核势的形式和参数, 对于一定入射能量 E_c 的粒子就可以唯一地定出经典偏转函数来.

我们根据偏转函数(图 1), 在 (1) 式的基础上将资料[2],[3]中计算相移的近似公式修改如下:

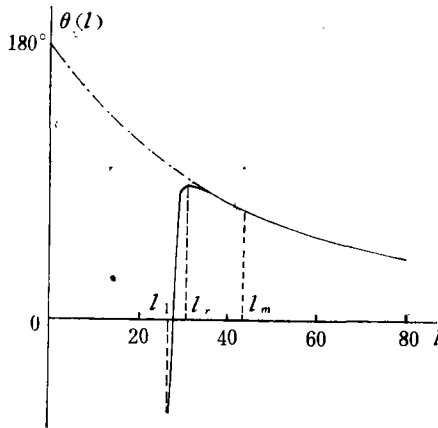


图 1. 73 MeV $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应的偏转函数 $\theta(l)$, l_r 对应于 $\theta(l)$ 的极大值; l_m 表示核力刚起作用的经典轨道. $\theta(l_1) = -\infty$
 - - - 纯库仑势 ——— 库仑势+核势

$$\eta_l = \begin{cases} i_{\infty} & l \leq l_1, \\ \eta_{l_m} - \sum_{k=l_m-1}^l \frac{\theta(k+1)}{2} & l_1 < l < l_m, \\ \eta_i^i & l \geq l_m, \end{cases} \tag{3}$$

其中, η_i 表示第 l 个分波的纯库仑相移. (3) 式的物理意义是: 一切大于 l_m 的分波系统纯库仑散射, 一切小于 l_1 的分波都被完全吸收.

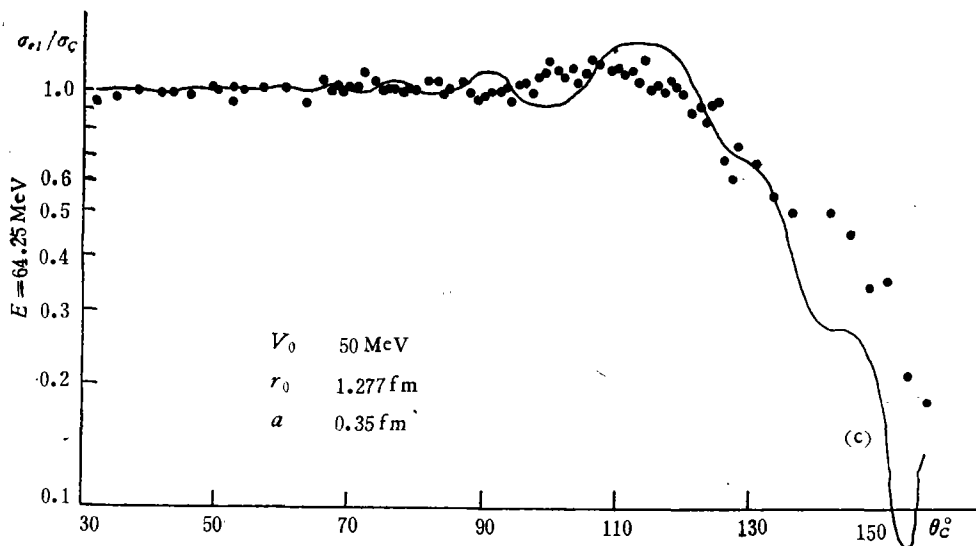
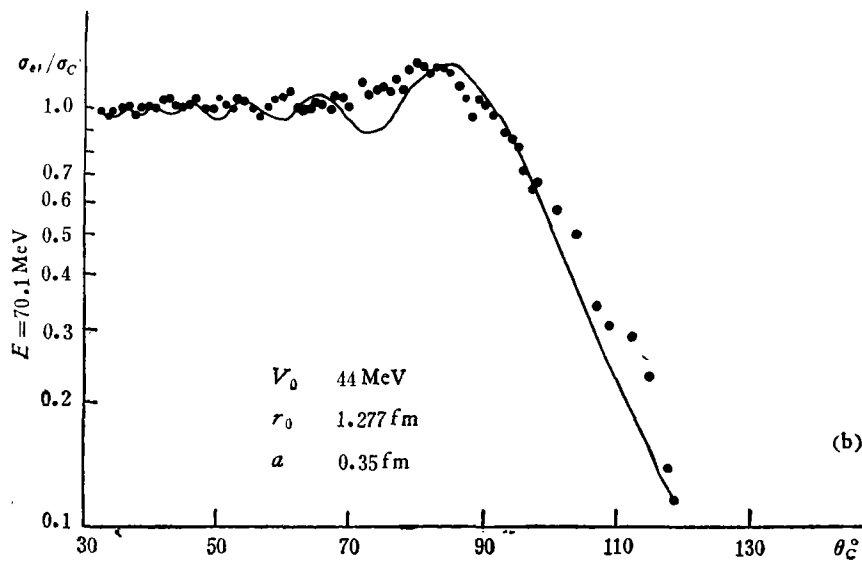
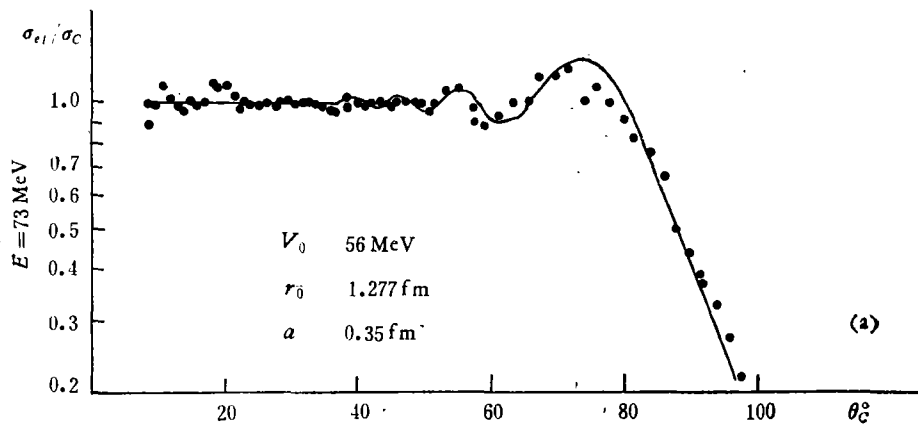


图2 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 弹散角分布

此外, 仿照资料[3], 对于 $l_1 < l < l_r$ 的分波, 在相移中增加虚数部分 $i \ln \left(\frac{l - l_1}{l_r - l_1} \right)^{\frac{1}{2}}$, 以表示部分吸收. 将相移带入熟悉的角分布公式中:

$$\frac{1}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) (e^{2i\eta_l} - 1)$$

就可以计算出弹散角分布. 计算结果与实验数据比较表示在图 2 之中. 核势用的是 $W-S$ 势. 拟合实验数据的参数也在图中给出.

二、准弹性转移^[4]

目前处理多核子转移反应并没有成功的理论. 与轻离子转移反应不同, C, N, O 等重离子在重靶上引起的转移反应中出射粒子的角分布没有细致的振荡结构, 但有明显的 Q -窗效应. 所以, 仅仅研究出射粒子的角分布是无法清楚地反映被转移核子(或集团)的个性的. 要是对角分布和能谱能同时进行分析就好了, 因为, 与能谱密切相关的反应 Q 值也是与被转移核子(或集团)的个性密切相关的. 为此, 我们将 $K-G^{[1]}$ 给出的半经典的角分布公式进行了两点修正: 第一, 用 D. M. Brink^[5] 给出的反映 Q -窗效应的转移几率因子代替原公式中简化的转移几率因子; 第二, 针对出射粒子的连续能谱分布, 将原公式乘上一个表示余核能级密度的因子(用常温能级密度公式计算). 最后获得了每单位能量间隔内微分截面的计算公式:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dQdE_f} \sim \frac{1}{k^2 \sin \theta} & \left| \left\{ \sum_{l=l_1+1}^{l_r} P(l) \left(l + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i[2\eta_l - (l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]} \left(\frac{l - l_1}{l_r - l_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{l=l_r+1}^{\infty} P(l) \left(l + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i[2\eta_l - (l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}]} \right\} \right|^2, \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $P(l) \sim \exp \left[\frac{\delta Q}{2T} - AR_{\min}(l) - \frac{1}{2} \left(\frac{E_{j0} - E_f}{\beta} \right)^2 \right]$; $E_{j0} = E_c + Q_{\text{opt}}(l) - \beta^2/2T$;

$\delta Q = Q_{\text{gs}} - Q_{\text{opt}}(l)$; $R_{\min}(l)$ = 角动量为 l 的经典轨道上炮弹与靶核质心间的最接近距离. Q_{gs} = 被转移核子(或集团)在炮弹中和在余核中的结合能之差; T = 核温度; k = 入射道的波数; E_c, E_f 分别表示入射道和出射道的道能. 计算时, η_l 采用拟合弹散实验数据后由(3)式确定的相移, l_1 和 l_r 是由相应的经典偏转函数定出来的(图 1). 参数 β, T 都有公式可以估算, 选定合适值后, 剩下的唯一可调参数是 A . 图 3、图 4 就是针对 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi} \rightarrow \alpha + ^{217}\text{Fr}$ 反应, 选取 $A = 3.5$ 时, 计算的出射 α 粒子的角分布和能谱曲线与实验数据点的比较. 因为理论计算给不出绝对值, 所以, 图中的曲线都是针对实验点归一后画出来的.

三、全融合反应

(1) 限制全融合反应的临界角动量

^{12}C 在重炮弹中算是比较轻的, 加之入射能量又不高. 所以, 我们在宏观理论的框架^[6]

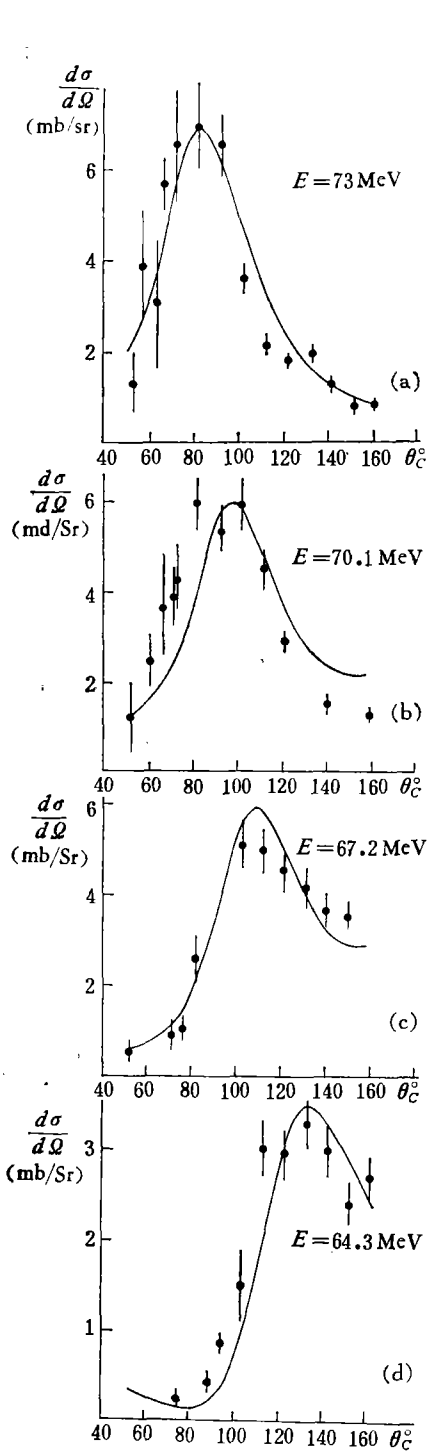


图3 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 出射 α 粒子的角分布

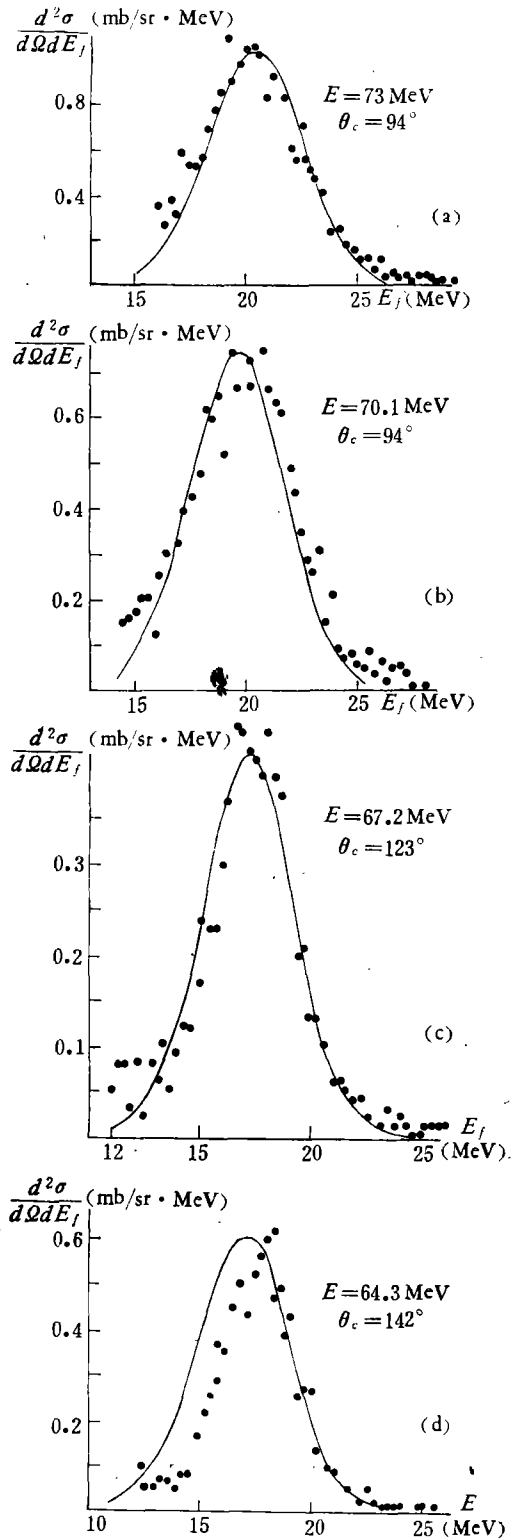


图4 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 出射 α 粒子的能谱

上,进一步假定入射粒子与靶核间的摩擦力可以勿略,认为经典偏转函数中兜圈轨道所对应的角动量 l_1 (图 1),就是限制全融合过程的临界角动量。这样,我们在拟合弹散角分布的同时,不仅可以求出反应总截面 σ_R , 而且可以得到限制全融合反应的临界角动量,然后由公式 $\sigma_{cf} = \pi\lambda^2(l_1 + 1)^2$ 计算出全融合反应的形成截面。图 5 是理论计算曲线与实验数据点的比较。能量高于 73MeV 的理论曲线是根据 64—73MeV 范围内拟合弹散数据定出的核势的平均参数外推的结果。

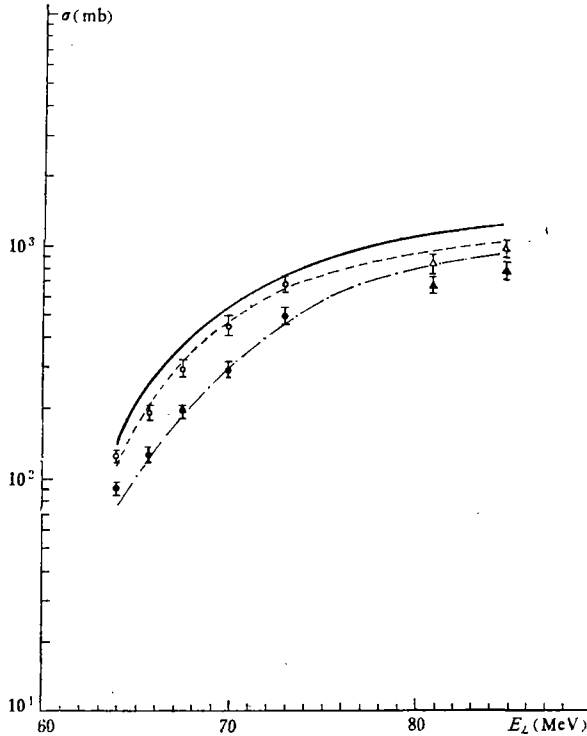
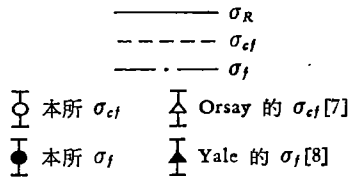


图 5 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 的反应总截面 (σ_R), 全融合截面 (σ_{cf}) 和裂变截面 (σ_f) 的激发函数



(2) 蒸发中子的激发函数

$^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 形成复合核 ^{221}Ac 再衰变时,同蒸发中子过程相竞争的主要是裂变,带电粒子的蒸发几率是很小的。在这个前提下,可以把形成复合核后级联发射 x 个中子的截面表示为^[9]:

$$\sigma_x(E_i) = G^x \sum_{i=0}^{l_1} \sigma_i(E_i) P_{x,i}(E_i) \tag{5}$$

其中, E_i 是复合核的激发能; $G^x = \prod_{i=1}^x \left[\frac{\Gamma_n}{\Gamma_n + \Gamma_f} \right]_i$; l_1 就是由拟合弹散的经典偏转函数

直接给出的, 无需再作其他附加的假定; $P_{x,l}(E_i)$ 是第 l 个分波级联发射 x 个中子的几率. 按照通常的做法 $P_{x,l}(E_i)$ 用杰克逊公式^[10] 计算; 它是平均核温度 T , 复合核转动惯量 J 的函数. 此外, 我们采用锐截止近似

$$\sigma_l(E_i) = \pi \lambda^2 (2l + 1), \quad (6)$$

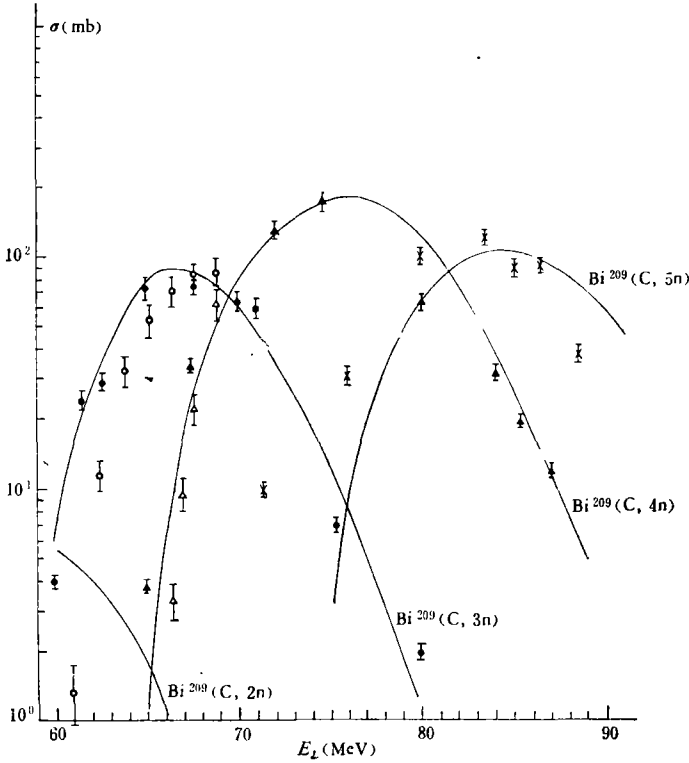


图 6 $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 中子蒸发激发函数

○、△ 分别为本所 3n, 4n 反应的实验数据;
 ●、▲、× 分别为 Orsay^[7] 3n, 4n, 5n 反应的实验数据

参数 J 选用球形核的刚体转动惯量. 计算结果表示在图 6 中. 拟合实验点的最佳参数见表 1. 利用最佳参数外推, 选取 $T = 0.85\text{MeV}$, $G^2 = 0.50$, 还计算得出蒸发两中子的激发函数.

表 1 拟合中子蒸发激发函数实验数据点的最佳理论参数

反 应	$T(\text{MeV})$	G^*	(Γ_n/Γ_f) 平均
$^{209}\text{Bi}(\text{C}, 3n)$	0.85	0.42	3.0
$^{209}\text{Bi}(\text{C}, 4n)$	0.85	0.25	2.5
$^{209}\text{Bi}(\text{C}, 5n)$	0.80	0.13	1.9

(3) 全融合裂变

不考虑带电粒子的蒸发, 那么全融合裂变截面

$$\sigma_f = \pi\lambda^2 \sum_{l=0}^{l_1} \frac{\Gamma_f(l)}{\Gamma_f(l) + \Gamma_n(l)} (2l + 1), \quad (7)$$

其中 l_1 就是由拟合弹散的经典偏转函数给出的. 我们仿照资料[11]的做法, 计算:

$$\Gamma_f(l)/[\Gamma_f(l) + \Gamma_n(l)] = N_f(l)/[N_f(l) + N_n(l)], \quad (8)$$

此处:

$$\begin{aligned} N_f(l) &= \pi\hbar^2 \int_0^{E''(l)} \rho_f(E''(l) - \varepsilon_f) d\varepsilon_f; \\ N_n(l) &= 2 \int_0^{E'(l)} \mu g \sigma(\varepsilon_n) \varepsilon_n \rho_n(E'(l) - \varepsilon_n) d\varepsilon_n; \\ \rho_k &= \exp[2\sqrt{a_k E_k}], \quad k = f, n; \\ E'(l) &= E_i - E_{\min}(l) - B; \\ E''(l) &= E_i - E_{sp}(l); \end{aligned}$$

E_i 是复合核的激发能; ρ_f 是复合核处于鞍点态的能级密度; ρ_n 是蒸发中子后余核的能级密度; a_k 是对应的能级密度参数; ε_n 是中子动能; ε_f 是与裂变有关的集体运动自由度的动能; μ 是约化质量; g 是中子的统计权重因子; B 是中子的结合能; $\sigma(\varepsilon_n)$ 是逆反应截面. 此处, 还利用了旋转液滴模型的概念^[12], 考虑了有效裂变位垒随相对运动角动量的增加而下降. 这是重离子核反应区别于轻核反应的一个重要特点. 由这个概念出发, 引进了两个物理量 $E_{\min}(l)$ 和 $E_{sp}(l)$. 它们分别表示旋转角动量为 l 时, 平衡形状的势能和鞍点形状的势能.

在具体计算中, 我们又作了两点修正: 第一, 逆反应截面 $\sigma(\varepsilon)$ 没有严格用光学模型计算, 而是简单地用余核几何截面代替. 第二, 由于 $^{221-217}\text{Ac}$ 等核的裂变位垒与中子结合能相近, 所以需要考虑多次机会裂变. 计算结果表示在图 5 上. 所用的参数 $a_f = a_n = A_{CN}/12$, A_{CN} 是复合核的质量数, 核半径参数 $r_n = 1.5\text{fm}$.

四、结果与讨论

根据拟合弹散的经典偏转函数 (包括部分吸收) 和 $\Gamma_n(l)/\Gamma_f(l)$ 的计算, 我们从统一的理论框架获得了反应机制按入射道轨道角动量的分类图. 图 7 表示的就是我们得到的 $73\text{MeV}^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应的分类图. 这张图上各部分的面积应该分别表示各类反应的截面, 它所给出的全融合截面和融合裂变截面是与实验结果相符的, 因而也反映了中子蒸发截面是与实验结果相符的 (图 5). 图 7 中给出的准弹性过程的截面为 97mb , 实验测得的几种主要准弹性转移过程中发射的 B , Be , Li , α 的积分截面为 $67 \pm 13\text{mb}$. 这张图上的分波区域表示不同的分波对不同的反应机制起贡献. 融合裂变和蒸发中子的激发函数与实验结果相符 (图 6) 说明融合反应的分波区域与分类图的标志一致. 在准弹性计算中 (公式(4)), 我们虽然对一切大于 l_1 的分波求和, 但由于 $P(l)$ 中包含了一个随炮弹和靶核质心距离增长而指数下降的因子, 所以实际上起主要贡献的分波是大于 l_1 和小于、等于 l_1 的

分波，这也是与分类图中标志的准弹性区域一致。由于经典偏转函数是拟合弹散角分布得到的，分类图与弹散实验结果当然相符(图2(a))，由此可见，我们从同一组势阱参数出发计算得到的这张反应机制分类图与实验结果相比，基本上达到了定量相符。同时，也说明我们假定忽略宏观摩擦力是合理的。

所谓忽略宏观摩擦力实质上是对一切大于 l_1 的分波而言，对于一切小于 l_1 的分波则认为遇到很大的摩擦，以致完全被吸收。提出这种图象是因为入射能量稍高于库仑位垒的较轻的重离子所引起的反应中深部非弹性散射的贡献很小的缘故。所以我们的方法只能适用于上述较窄的一类重离子核反应。对于更普遍的重离子核反应，深部非弹性散射是一个重要的反应过程，宏观摩擦力是必须考虑的。在这种情况下，用统一的理论框架定量地按入射道轨道角动量对反应机制分类显然是一个有趣而艰巨的课题。

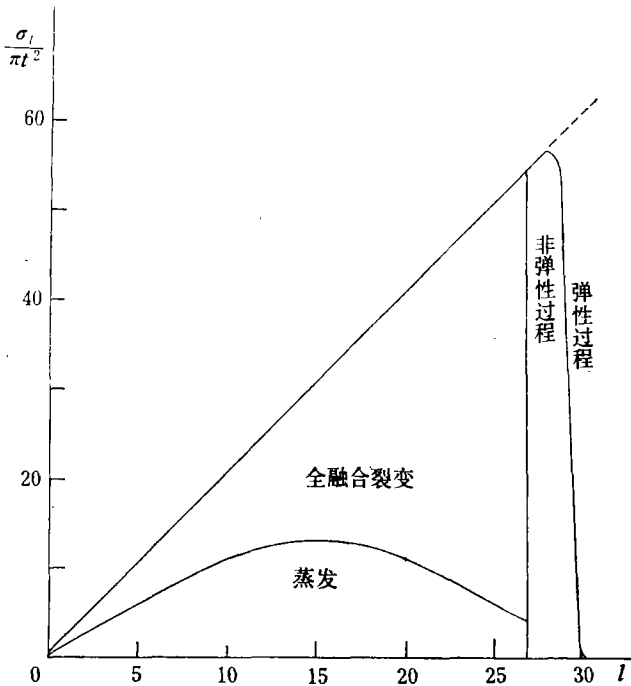


图7 对于 $^{73}\text{MeV}^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ 反应,按入射道轨道角动量区分的分波截面

除此之外,还有以下几个问题需要说明:

1. 利用(3)式计算相移,不用原文^[2-3]的近似公式,既改善了弹性散射理论计算和实验相符的程度,而且也便于精确地确定拟合弹散数据的最佳位阱参数。此处假定一切小于 l_1 的分波完全被吸收与进一步假定 l_1 为限制全融合反应的临界角动量是协调一致的。

2. 我们修改获得的能量微分截面公式(4),在处理转移反应时,虽然给不出振幅的绝对值,但只用一个可调参数能同时符合出射粒子的能谱和角分布。以这个公式为基础进一步弄清转移几率的绝对大小可能是有意义的。

3. 由经典偏转函数直接得到限制全融合反应的临界角动量,进一步处理中子蒸发激发函数时,不必象往常那样引入附加的假定(由抛物线近似计算出反应总截面,再乘上一个经验系数来代替融合截面),这样计算简便,效果也不错。

4. 入射能量为 64MeV 时, 弹散角分布, 转移反应出射的 α 粒子的能谱等理论计算与实验数据点符合较差。这是由于入射能量接近库仑位垒时半经典近似条件已经不合适的原因。

在用电子计算机进行数值计算时, 承我所焦敦庞同志热情帮助和指导, 在此谨表谢意。

参 考 资 料

- [1] B. N. Kalinkin and J. Grabowski, "Proceedings of Third Conference on Reactions between Complex Nuclei" (1963), 129.
- [2] K. W. Ford and J. A. Wheeler, *Ann. Phys.*, 7(1959), 259.
- [3] B. N. Kalinkin, T. P. Kochkina and B. I. Pustynnik, "Proceedings of Third Conference on Reactions between Complex Nuclei" (1963) 69.
- [4] 沈文庆、徐树威、王大延、谢元祥、郭忠言、李祖玉, 高能物理与核物理, 1 (1977), 70.
- [5] D. M. Brink, *Phys. Lett.*, 40B(1972), 37; D. M. Brink, N. A. Weiss, et. al., *Phys. Rep.*, 12C(1974), 3.
- [6] D. H. E. Gross and H. Kalinowski, *Phys. Lett.*, 48B(1974), 302.
- [7] Y. Le Beyec, M. Lefort and M. Sarde, *Nucl. Phys.*, A192(1972), 405.
- [8] H. O. Britt and A. R. Quinton, *Phys. Rev.*, 120(1960), 1768.
- [9] T. Sikkeland, J. Maly and D. F. Lebeck, *Phys. Rev.*, 169(1968), 1000; T. Sikkeland, A. Ghiorso and M. J. Nurmia, *Phys. Rev.*, 172(1968), 1232.
- [10] J. D. Jackson, *Can. J. Phys.*, 34(1956), 767.
- [11] F. Pladil and M. Blann, *Phys. Rev.*, c11(1975), 508.
- [12] S. Cohen, F. Plasil and W. J. Swiatecki, *Ann. Phys.*, 82(1974), 557.

A SEMI-CLASSICAL ANALYSIS ON THE REACTION $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ AT BOMBARDING ENERGIES SLIGHTLY ABOVE THE COULOMB BARRIER

XU SHU-WEI RAN QI-HUI MA HONG-FAN
(Institute of Modern Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

For reactions induced by light heavy ion such as ^{12}C , at bombarding energy slightly above the coulomb barrier, using semi-classical theory, neglecting macroscopic frictional force, the reaction mechanisms are sorted by the orbital angular momentum of the entrance channel from the classical deflection functions fitting elastic scattering. Moreover, inserting a transfer probability factor representing the Q-Window effect into the semi-classical angular distribution formula of Kalinkin and Grabowski, we obtain a formula for the differential cross-section per unit energy interval. The calculated results, including the elastic scattering angular distributions, energy spectrum and angular distributions of emitted α -particles in quasi-elastic process, complete fusion cross-section, fusion-fission cross-sections and the excitation functions of evaporated neutron, agree with the experimental data on the reaction $^{12}\text{C} + ^{209}\text{Bi}$ reported by our Institute.