第3卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 1
1979年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1979

费米子数的时空性质

许 伯 威
(兰 州 大 学)

摘 要

将4维 Minkowski 时空推广到5维时空，并将“基本”粒子静质量和时空自由度 x_5 相联系，$m=-i\dfrac{\partial}{\partial x_5}$，我们讨论了5维非线性变换共形群 $C(M_5)$. 对于 $C(M_5)$ 变换，保持有 $dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2-dx_0^2+dx_5^2=0$ 不变. $C(M_5)$ 群和线性变换群 $SO(5,2)$ 同构. 在此基础上我们分析了费米子数的时空性质，并给出了自旋为半整数(整数)的粒子费米子数为奇数(偶数)的这一实验规律.

一、引 言

“基本”粒子具有时空对称性，通常描述时空的对称群是 Lorentz 群. 粒子按 Lorentz 群的不可约表示进行分类，而各不可约表示是以和自旋有关的量子数来标志的. 如果再考虑对时空平移的不变性，Lorentz 群便扩大为 Poincaré 群，因此标志“基本”粒子的量子数除自旋外还有质量，这统称为时空量子数，通常也称为外部量子数. 另外，“基本”粒子也具有内部对称性，即对于某内在抽象空间群的对称性，例如 SU_2、SU_3、SU_4 群的对称性，粒子同时也按这些内部对称群的不可约表示进行分类，而标志这些不可约表示的量子数则有同位旋、超荷、粲数等，除此而外还有重子数和轻子数，后二者又称为费米子数，而所有这些量子数又称为内部量子数. 在这些内部量子数中，费米子数似乎处于较为特殊的地位，因在考虑内部对称群时，它们是和自旋、质量等外部量子数一样作为输入引进的，即认为对内部对称群不可约表示的多重态，都对应同一自旋和质量，也对应同一费米子数. 除此而外，更有一个众所周知的实验事实，即费米子数为奇数（偶数）的“基本”粒子，其自旋都为半整数（整数）. 这说明较之其它内部量子数，费米子数和时空量子数之间更具有某种内在的联系. 在这一短文中我们来讨论这一问题，试图对这种联系作出物理的解释. 所用的方法是，将 Minkowski 时空推广到5维时空，并把第5个自由度和“基本”粒子的静质量相联系. 研究5维时空中的非线性变换的共形群 $C(M_5)$ (Conformal Group)，以及与之同构的线性变换群 $SO(5,2)$ 群. 在此基础上来分析费米子数的内在的时空性质，并给出它和自旋量子数之间的这一实验规律.

本文1978年3月21日收到.

二、$C(M_5)$ 群

我们知道，静质量为 m 的“基本”粒子，其相对论能量关系式为

$$\mathbf{P}^2 - E^2 + m^2 = 0. \tag{1}$$

如考虑 m 为变量，与之相联系的固有时间 (Proper time) 可作为新的自由度引入时空度规中，这样，在量子力学中我们认为有

$$\mathbf{P} = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} - i\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \quad E = i\frac{\partial}{\partial x_0}, \quad m = -i\frac{\partial}{\partial x_5}. \tag{2}$$

x_5 即为将固有时间作为变量时所对应的新自由度，有人认为是标征“基本”粒子内部时空性质的一个物理参量[1,2].

由(1)、(2)式给出 5 维时空的波动方程：

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_5^2}\right)\phi(x_a) = 0, \quad a = 1, 2, 3, 0, 5 \tag{3}$$

对应的时空度规

$$dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 + dx_5^2 = 0, \tag{4}$$

即相当将 4 维 Minkowski 时空 M_4 推广到 5 维时空 M_5, x_5 为固有时间，与粒子的静质量相联系，而 M_4 则为 M_5 中的子空间，即对应以下

$$-dx_5^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 \tag{5}$$

为不变式，这就是我们所熟悉的在 M_4 时空中的二次不变式. 所以如将静质量作为一参量考虑可变时，(4)式应是(5)式自然的推广.

对(5)式保持不变的群就是 Poincaré 群，如果 $dx_5^2 = 0$，则(5)式不仅对 Poincaré 群不变，并且对 4 维共形群 $C(M_4)$ 也不变，而前者则作为一子群包含在后者之中. 这一结果很早就为人们所认识，例如对于静质量为 0 的电磁场，场方程是对 $C(M_4)$ 群协变的[3]. 现如考虑 M_5 时空，对(4)式保持不变的群则为 5 维共形群 $C(M_5)$. $C(M_5)$ 群中包含有 M_5 时空中以下的变换：

(1) 转动变换和平移变换

$$x'_a = M_{ab}x_b + d_a, \quad \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} = 1, 2, 3, 0, 5 \tag{6}$$

d_a 为 M_5 时空中的平移量，M_{ab} 为转动矩阵，满足以下关系式：

$$M_{ac}g_{ab}M_{bd} = g_{cd}, \tag{7}$$

g_{ab} 为 M_5 时空中的度规矩阵，即有

$$\begin{aligned} &g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{00} = g_{55} = 1, \\ &g_{ab} = 0, \qquad a \neq b. \end{aligned} \tag{8}$$

(2) 标度变换

$$x'_a = \rho x_a, \tag{9}$$

相当不同坐标系选取不同的时空单位标度，二者差一 ρ 倍因子.

(3) 特殊共形变换 (Special conformal transformations)

$$x'_a = \frac{x_a - c_a x^2}{\sigma(x)} = \frac{x_a - c_a x^2}{1 - 2cx + c^2 x^2}, \tag{10}$$

其中 c_a 为 M_5 时空中的矢量,而

$$cx = g_{ab} c_a x_b, \quad x^2 = g_{ab} x_a x_b. \tag{11}$$

如定义倒置变换 R 和平移变换 T 为:

$$Rx_a = -\frac{x_a}{x^2}, \quad Tx_a = x_a + c_a, \tag{12}$$

则变换(10)式即相当 $x'_a = RTRx_a$.

很容易证明,对(6)式变换有:

$$dx'^2 = dx^2, \tag{13}$$

对(9)式变换有:

$$dx'^2 = \rho^2 dx^2, \tag{14}$$

对(10)式变换有:

$$dx'^2 = \frac{1}{\sigma^2(x)} dx^2. \tag{15}$$

所以对 $C(M_5)$ 群变换,保持有 $dx^2 = 0$ 不变. 与(6)、(9)、(10)式变换相对应的算子有:

$$\begin{aligned}
&\text{平移变换算子} && P_a = -ig_{aa}\frac{\partial}{\partial x_a},\\
&\text{转动变换算子} && L_{ab} = x_a P_b - x_b P_a,\\
&\text{标度变换算子} && D = xP,\\
&\text{特殊共形变换算子} && K_a = 2x_a xP - x^2 P_a.
\end{aligned} \tag{16}$$

这些 $C(M_5)$ 群算子所构成的代数关系为:

$$\begin{aligned}
[L_{ab}L_{cd}] &= i(g_{ac}L_{bd} + g_{bd}L_{ac} - g_{bc}L_{ad} - g_{ad}L_{bc}),\\
[L_{ab}P_c] &= i(g_{ac}P_b - g_{bc}P_a),\\
[P_aP_b] &= 0,\\
[K_aK_b] &= 0,\\
[P_aK_b] &= i(2L_{ab} - 2g_{ab}D),\\
[L_{ab}K_c] &= i(g_{ac}K_b - g_{bc}K_a),\\
[L_{ab}D] &= 0,\\
[DP_a] &= iP_a,\\
[DK_a] &= -iK_a.
\end{aligned} \tag{17}$$

$C(M_5)$ 群为非线性变换群,因为它包含有(10)式的非线性变换. 但在量子力学中,我们所讨论的 Hilbert 空间是线性空间,要求一切变换必须为线性变换,与之对应的算子必须为线性算子. 因此在量子力学中来讨论问题时,必须考虑线性变换群,而与 $C(M_5)$ 群同构的线性变换群就是 $SO(5,2)$ 群.

三、$SO(5,2)$ 群

引入变量 ξ_A 和 $\eta_A = L\xi_A$ $(A = 1, 2, 3, 0, 5, 6, 7)$, ξ_A 为无量纲变量, η_A 为具有长度量纲的变量. 这二组变量显然是等价的，因为它们只差一具有长度量纲的因子 L. 它们和变量 x_a 之间的关系定义如下[4]:

$$x_a = \frac{\eta_a}{\xi_7 + \xi_6}, \quad A = a = 1, 2, 3, 0, 5$$

$$x^2 = \frac{\xi_7 - \xi_6}{\xi_7 + \xi_6} L^2. \tag{18}$$

由(18)式即有

$$\eta^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - \eta_0^2 + \eta_5^2 + \eta_6^2 - \eta_7^2 = 0. \tag{19}$$

使(19)式保持不变的线性变换群即 $SO(5, 2)$ 群, $SO(5, 2)$ 群的算子 L_{AB} $\begin{matrix}A\\B\end{matrix} = 1, 2, 3, 0, 5, 6, 7$, 有以下性质:

$$L_{AB} = -L_{BA},$$

$$[L_{AB}L_{CD}] = i(G_{AC}L_{BD} + G_{BD}L_{AC} - G_{BC}L_{AD} - G_{AD}L_{BC}), \tag{20}$$

其中 G_{AB} 为 $SO(5, 2)$ 空间的度规矩阵,对二次不变式(19)有:

$$G_{11} = G_{22} = G_{33} = -G_{00} = G_{55} = G_{66} = -G_{77} = 1,$$

$$G_{AB} = 0, \qquad A \neq B. \tag{21}$$

由(18)式可给出:

$$dx^2 = \frac{1}{(\xi_7 + \xi_6)^2} d\eta^2, \tag{22}$$

所以对于保持 $d\eta^2$ 不变的 $SO(5, 2)$ 变换群，对应在 x_a 空间，给出了 $C(M_5)$ 变换群的一般性质.

现如定义算子

$$L_{ab}, \quad \begin{matrix}A\\B\end{matrix} = \begin{matrix}a\\b\end{matrix} = 1, 2, 3, 0, 5$$

$$LP_a = -L_{a6} - L_{a7},$$

$$\frac{1}{L} K_a = -L_{a6} + L_{a7},$$

$$D = L_{67}, \tag{23}$$

则由(20)式容易证明,以上(23)式算子所满足的代数关系式即为(17)式. 所以 $SO(5, 2)$ 群即为 $C(M_5)$ 群的线性同构群.

$SO(5, 2)$ 群中含有三个彼此互易的算子，如果分成子群 $SO(5) \times SO(2)$, 其中 $SO(5)$ 子群中含有二个, $SO(2)$ 子群中含有一个,现在我们来讨论 $SO(5)$ 群,它保持以下二次式不变

$$d\eta_1^2 + d\eta_2^2 + d\eta_3^2 + d\eta_5^2 + d\eta_6^2,$$

如引入新参量:

$$\eta_{+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1+i\eta_2),\quad \eta_{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1-i\eta_2),$$
$$\eta_{+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_5+i\eta_6),\quad \eta_{-2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_5-i\eta_6),$$
$$\eta_0=\eta_3, \tag{24}$$

则 $SO(5)$ 群的算子可表成:

$$L_{\alpha\beta}=-L_{\beta\alpha}=\eta_\alpha\frac{\partial}{\partial\eta_{-\beta}}-\eta_\beta\frac{\partial}{\partial\eta_{-\alpha}}, \tag{25}$$

并满足对易关系式[5]:

$$[L_{\alpha\beta}L_{\gamma\delta}]=\delta_{\beta+\gamma}L_{\alpha\delta}-\delta_{\beta+\delta}L_{\alpha\gamma}-\delta_{\alpha+\gamma}L_{\beta\delta}+\delta_{\alpha+\delta}L_{\beta\gamma}, \tag{26}$$

其中二个彼此互易的算子为:

$$L_{+1-1}=\eta_{+1}\frac{\partial}{\partial\eta_{+1}}-\eta_{-1}\frac{\partial}{\partial\eta_{-1}}=-i\left(\eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_2}-\eta_2\frac{\partial}{\partial\eta_1}\right),$$
$$L_{+2-2}=\eta_{+2}\frac{\partial}{\partial\eta_{+2}}-\eta_{-2}\frac{\partial}{\partial\eta_{-2}}=-i\left(\eta_5\frac{\partial}{\partial\eta_6}-\eta_6\frac{\partial}{\partial\eta_5}\right). \tag{27}$$

$SO(5)$ 群的算子写成(25)形式,就直接和 B_2 群李代数的 Cartan 形式相对应,即有:

$$H_1=\frac{1}{\sqrt{6}}L_{+1-1},\quad H_2=\frac{1}{\sqrt{6}}L_{+2-2},$$
$$E_{\pm1}=\frac{1}{\sqrt{6}}L_{0\pm1},\quad E_{\pm2}=\frac{1}{\sqrt{6}}L_{+1\pm2},$$
$$E_{\pm3}=\frac{1}{\sqrt{6}}L_{0\pm2},\quad E_{\pm4}=\frac{1}{\sqrt{6}}L_{-1\pm2}. \tag{28}$$

B_2 群中以 $(\lambda_1\lambda_2)$ 标志的不可约表示的最高权矢量 $\boldsymbol{\Lambda}$ 为[6]:

$$\boldsymbol{\Lambda}=\left[\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}\lambda_1+\lambda_2\right)\frac{1}{2\sqrt{6}}\lambda_1\right], \tag{29}$$

λ_1、λ_2 为非负的整数. 如定义 L_{+1-1} 的量子数为 J_3, L_{+2-2} 的量子数为 $\frac{1}{2}F$, 则最高权矢量的量子数

$$J_3=\frac{1}{2}\lambda_1+\lambda_2,\quad F=\lambda_1. \tag{30}$$

从而给出了 F 为奇数(偶数)时 J_3 为半整数(整数)的关系式. 由于 B_2 群根图中的根矢量在 J_3 和 $\frac{1}{2}F$ 上的投影或为 0 或为 ±1, 因此这一关系式对所有权矢量普遍成立.

四、讨 论

现在我们来讨论以上结果的物理解释, 为此, 必须将 η_A 空间和 x_a 空间联系起来考虑. 由(18)式给出

$$\frac{\partial}{\partial x_a} = (\xi_7 + \xi_6)\frac{\partial}{\partial \eta_a} + g_{aa}\frac{\eta_a}{L^2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_7} - \frac{\partial}{\partial \xi_6}\right), \tag{31}$$

所以有

$$L_{+1-1} = -i\left(\eta_1\frac{\partial}{\partial \eta_2} - \eta_2\frac{\partial}{\partial \eta_1}\right) = -i\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \tag{32}$$

因此 J_3 即为通常的自旋量子数. 至于 F 的物理意义，由于(30)式给出的关系式，因而很自然将 F 解释为费米子数,从而给出了费米子数为奇数(偶数)时自旋为半整数（整数）这一实验规律. 这一结论的得出是由于 B_2 群的特殊结构所致的，而归根结底则是 $C(M_5)$ 群的结果.

质量算子和自旋算子是对易的,但和费米子数算子并不对易

$$[m\ 2L_{+2-2}] = i\frac{2}{L}D, \tag{33}$$

在分析这一点以前,必须注意到实际的条件，这就是，在 M_4 时空中，不同的坐标系之间，人们通常都选取了同一的时空单位标度；推广到 M_5 时空，自然也作和以上同样的规定. 这样的规定对应在 η_A 空间，相当只有子空间 $\eta_A = \eta_a\ (a = 1, 2, 3, 0, 5)$ 的转动变换. 在这样的条件下,质量算子和费米子数算子彼此是对易的,并给出质量数和费米子数的成正比关系式:

$$m \sim -\frac{1}{2L}\left(1 + \frac{\eta_7}{\eta_6}\right)F, \tag{34}$$

这一结果可认为是合理的. 这样，费米子数 F 和时空量子数 J_3、m 都统一在同一的时空对称群 $C(M_5)$ 之中,因而揭示了费米子数的内在的时空性质.

$C(M_5)$ 群是时空对称群，并不涉及任何具体的动力学机制，所以以上的讨论具有一定的普遍性,即不仅适用于强子和轻子等"基本"粒子,也适用于原子核. 事实上(30)式给出的关系式以及 (34) 式对原子核也是适用的. 但也正因如此，所以在这样的理论中，无法区分强子和轻子，也无法区分"基本"粒子和原子核. 例如对于 B_2 群的不可约表示 $D(\lambda_1\lambda_2)$，标量介子和赝标量介子应分别属于 $D(0\ 0)$ $(J = 0 \quad F = 0)$ 表示,自旋为 $\frac{1}{2}$ 的重子和轻子都分别属于 $D(1\ 0)$ $(J = \frac{1}{2}\ F = \pm 1)$ 表示，这可认为是合理的. 但对于高自旋态的强子似乎必须和原子核系统处于同一高维表示之中,这似乎是不能令人满意的. 出现这样的结果并不使人感到奇怪，因为在理论中我们并没有引入任何能区分它们的因素;要能区分它们,并给出较为具体的结果,必须提出具体的物理模型,而如只限于 $C(M_5)$ 群本身来考虑,则显然是不够的.

总之,在考虑粒子静质量为变量的情况下，$C(M_5)$ 群似乎是最大的时空对称群,较之 Poincaré 群应该给出较多一些的物理结果,关键在于要提出物理思想. 以上的讨论只是对 $C(M_5)$ 群的一种物理解释,而 $C(M_5)$ 群本身可能包含更为丰富的物理内容.

参 考 文 献

[1] C. Garrod, *Rev. Mod. Phys.*, 38 (1966), 483.
[2] B. Robertson, *Phys. Rev. Lett.*, 27 (1971), 1545.
[3] H. Bateman, *J. Lond. Math. Soc.*, 8 (1908), 70.
[4] A. O. Barut and R. B. Haugen, *Ann. Phys.*, 71 (1972), 519.
[5] G. 拉卡著，《群论和核谱》，高等教育出版社，1959.
[6] R. E. Behrends et. al., *Rev. Mod. Phys.*. 34 (1962), 1.

SPACE-TIME PROPERTY OF FERMION NUMBER

XU BO-WEI
(*Lanzhou University*)

ABSTRACT

Enlarging the dimensionality of Minkowski space from 4 to 5, and relating the rest mass of particle with x_5 as $m = -i \dfrac{\partial}{\partial x_5}$ we discuss the 5-dimensional non-linear conformal group $C(M_5)$ under which $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2 + dx_5^2 = 0$ is invariant. The $C(M_5)$ group is isomorphic to the linear group SO (5, 2) from which we study the space-time property of Fermion number, and the relations between half-integral (integral) spin and odd (even) Fermion number are obtained.