第3卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 4
1979年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1979

非线性 Schrödinger 方程孤子解的性质研究

施义晋 和音
（中国科学院原子能研究所）

摘要

我们研究了非线性 Schrödinger 方程的波包型的孤子解，发现它可以用于描写粒子的状态，而经典力学中的粒子及线性量子力学中的粒子是它的二种极端情况．我们也求得了一套非厄密算符的双正交基，可用于微微扰展开，发现离散本征值所对应的运动模式相当于“经典”性质的运动，而连续本征值所对应的运动模式则相当于“量子”性质的运动．我们认为表征体系状态的参数 u，可以作为体系具有量子性或经典性的标志．

一、问题的提出

一大类非线性方程的孤子解已日益引起广泛兴趣[1]，在应用物理、凝聚态物理及“基本”粒子物理中已经引进了孤子解来描述一些新概念，得到了一系列有趣的结果．最近，东京会议上[2]，K. Izumo 等用 Master 方程作参量连续化近似后，导得一个非线性方程，他提到用它的孤子解可以研究重离子反应中的一些问题．

我们最近对非线性 Schrödinger 方程作了一些分析，我们发现它具有一些很有启发意义的特点．所谓非线性 Schrödinger 方程是这样一个方程：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+b|\psi|^2\psi=0. \tag{1}$$

它由 Lagrangian 密度

$$L=\frac{i}{2}\left(\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}-\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)+\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2-\frac{b}{2}|\psi|^4 \tag{2}$$

导出，它已被用于描述[1]：(1) 平面波的定态二维自聚焦，(2) 单色波的一维自调制，(3) 非线性光学中的自陷现象，(4) 固体中热脉冲的传布，(5) 等离子体中的 Langmuir 波，(6) 此方程与超导中的 Ginzburg-Landau 方程有关．

非线性 Schrödinger 方程在条件

$$u_e\geqslant 2u_c, \tag{3}$$

得到满足的情况下，具有波包型的孤子解：

本文 1978 年 4 月 17 日收到．

$$\begin{aligned}&\psi_s(x,t)=f(x,t)e^{i\theta(x,t)},\\&f(x,t)=\sqrt{\frac{u_e^2-2u_eu_c}{2b}}\operatorname{sech}\left\{\sqrt{\frac{u_e^2-2u_eu_c}{4}}(x-u_et)\right\},\\&\theta(x,t)=\frac{u_e}{2}(x-u_ct).\end{aligned}\tag{4}$$

其中 u_e 及 u_c 是由初始条件给定的任意常数，如果将 ψ_s 看成为描述粒子状态的波包，那么 u_e 就可解释为粒子的经典运动速度，或称波包的群速度．而 u_c 则为 de-Broglie 波的相速度，或称载波的相速度．

为了以后使用方便，我们引进下列量：

$$\begin{cases}u^2=\dfrac{u_e^2-2u_eu_c}{4}=\left(\dfrac{u_e}{2}\right)^2\delta,\\\delta=1-\dfrac{2u_c}{u_e}.\end{cases}\tag{5}$$

现在我们来考察一下 (4) 式描述粒子的可能性及条件 (3) 所包含的意义．

由于方程 (1) 仅仅引进了一项自场，因此如果用 (4) 式描述粒子的话，它应具有自由粒子的性质，在非相对论性范围内，我们知道有经典粒子与量子粒子之分．经典粒子满足牛顿方程，量子粒子满足线性 Schrödinger 方程：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0.\tag{6}$$

方程 (6) 的解是熟知的平面波：

$$\psi_L(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi L}}e^{i(kx-\omega t)}.\tag{7}$$

L 为箱归一化常数．按照 de-Broglie 的假设，(7) 式所描写的自由粒子的能量 E 及动量 p 与波的频率、波数关系为：

$$\begin{aligned}E&=\omega,\\p&=k.\end{aligned}\tag{8}$$

(我们已取了 $\hbar=1$, $2\mu=1$ 单位制；μ 为质量)．因此 (7) 式所描述的粒子的运动速度：

$$u_e=\sqrt{4E}.$$

而相应的波的相速度：

$$u_c=\frac{\omega}{k}=\frac{E}{p}=\frac{\frac{1}{4}u_e^2}{\frac{1}{2}u_e}=\frac{1}{2}u_e.\tag{9}$$

因此正好是条件 (3) 的下界，也即 $\delta\to0$ 的极端．由 (4) 式，此时

$$f(x,t)\xrightarrow[\delta\to0]{}\sqrt{\frac{\delta u_e^2}{2b}},$$

以 $\delta^{1/2}$ 趋于零，这正好与 (7) 以 $L^{-1/2}$ 趋于零一致．因此在 $\delta\to0$ 极端，(4) 式与 (7) 式一致．它描写量子力学的自由粒子．

在另一个极端即 $u_e \to \infty$，很容易看出:

$$\phi_s(x, t) \underset{u_e \to \infty}{\longrightarrow} \delta(x - u_e t).$$

这是描述一个作直线匀速运动的“点”粒子的轨迹. 以后我们可以证明，包络 $f(x, t)$ 的“质心”位置在外场作用下的运动确实满足类似的牛顿方程. 因此，我们可以假设，(4) 式代表一种自由粒子状态，它的二种极端情形是我们熟知的量子力学中的粒子与经典力学中的自由粒子. 而参数 $u^2 = \frac{u_e^2}{4}\delta$ 是确定粒子特征的重要参数.

因此，条件 (3) 可改写为:

$$u \equiv \frac{u_e}{2}\delta^{1/2} \geqslant 0. \tag{3'}$$

为了对问题不停留在表面的类比上，让我们从动力学观点来考察一下由非线性 Schrödinger 方程 (1) 的波包型孤子解 (4) 所描述的粒子.

二、线性稳定性问题

波包解 (4) 在初始条件扰动下是否稳定，这是我们关心的第一个问题. 因为既然要用它描述某种粒子，那么在初始条件微扰下，它仍然应该具有原有的大部分特性，而不发生剧烈改变，这才与我们通常的“粒子”概念相符.

我们假设由于初始条件的某种不确定性，方程 (1) 的孤子解 (4) 产生了一个扰动:

$$\phi = \phi_s + \phi_d \equiv (f + \epsilon g)e^{i\theta(x,t)}. \tag{10}$$

f, θ 均为 (4) 中的形式，为实函数，g 为微扰，一般为复函数. 其中 ϵ 为一小参量. 将 (10) 代入 (1) 得到 g 应满足的方程:

$$i\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + iu_e\frac{\partial g}{\partial x} - u^2 g + 2u^2\,\mathrm{sech}^2[u(x - u_e t)]\cdot\{2g + g^*\} = 0. \tag{11}$$

其中，我们已略去了 ϵ^2 以上的项，g^* 为 g 的复共轭.

作变量代换:

$$\begin{cases} x - u_e t = z, \\ t = \tau. \end{cases} \tag{12}$$

得方程:

$$i\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} - u^2 g + 2u^2\,\mathrm{sech}^2(uz)\{2g + g^*\} = 0, \tag{13}$$

这个方程也可用算符形式缩写为:

$$i\frac{\partial g}{\partial \tau} = (\boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'\boldsymbol{K})g = \boldsymbol{H}g, \tag{14}$$

$$\boldsymbol{H}_0 = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + u^2(1 - 4\,\mathrm{sech}^2(uz)), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{H}' = -2u^2\,\mathrm{sech}^2(uz) \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{H}_0$、$\boldsymbol{H}'$ 均为厄密算符，$\boldsymbol{K}$ 为取复共轭算符，它是非厄密的. 因此 (14) 是一个含有

非厄密哈密顿量 $\boldsymbol{H}$ 的 Schrödinger 方程．由于 $\boldsymbol{K}$ 的非厄密性，$\boldsymbol{H}$ 的本征值不一定为实的了．也就是说一般存在非定态解．但可以证明，$\boldsymbol{H}$ 的本征值不为复的．但由于 (14) 中含有 $\boldsymbol{K}$ 算符，在这种情况下，我们不能用通常的分离变量法从 (14) 导得 $\boldsymbol{H}$ 的本征值方程及 g 随时间的变化方程．因此我们须采用特殊的分离变量法．

1. 组合分离变量法及耦合本征值方程

我们令试解具有下列形式：

$$g(z,\tau)=[h_1(z)\cos\omega\tau+h_1'(z)\sin\omega\tau]+i[h_2(z)\sin\omega\tau+h_2'(z)\cos\omega\tau]=g_1(z,\tau)+ig_2(z,\tau),\tag{17}$$

其中令 $h_1(z)$, $h_2(z)$, $h_1'(z)$, $h_2'(z)$ 为实函数，ω 为实数(以后证明 ω 确为实数)．将 (17) 代入 (13) 得：

$$\begin{cases}-\omega h_2(z)+\dfrac{d^2h_1(z)}{dz^2}-u^2(1-6\operatorname{sech}^2(uz))h_1(z)=0,\\ -\omega h_1(z)+\dfrac{d^2h_2(z)}{dz^2}-u^2(1-2\operatorname{sech}^2(uz))h_2(z)=0.\end{cases}\tag{18}$$

及

$$\begin{cases}\omega h_2'(z)+\dfrac{d^2h_1'(z)}{dz^2}-u^2(1-6\operatorname{sech}^2(uz))h_1'(z)=0,\\ \omega h_1'(z)+\dfrac{d^2h_2'(z)}{dz'}-u^2(1-2\operatorname{sech}^2(uz))h_2'(z)=0.\end{cases}\tag{19}$$

因此可见

$$h_1(z,\omega)=c_1h_1'(z,-\omega),\quad h_2(z,\omega)=c_2h_2'(z,-\omega).$$

那么不失一般性可将试解 (17) 写为：

$$g(z,\tau)=h_1(z)\{\cos\omega\tau-\sin\omega\tau\}+ih_2(z)\{\sin\omega\tau+\cos\omega\tau\}.\tag{20}$$

我们称 (20) 为组合分离变量法的形式解，方程 (18) 为耦合本征值方程．函数限于实空间．

当本征值 $\omega=0$ 时，方程 (18) 退耦，可以求得解为[3]：

$$\begin{aligned}h_1(z)&=c_1\operatorname{sech}(uz)\operatorname{th}(uz),\\ h_2(z)&=c_2\operatorname{sech}(uz).\end{aligned}\tag{21}$$

对于 $\omega\neq0$，方程 (18) 可化为二个独立的四阶方程：

$$\begin{aligned}&-\omega^2h_1(z)+\frac{d^4h_1(z)}{dz^4}-2u^2(1-4\operatorname{sech}^2(uz))\frac{d^2h_1(z)}{dz^2}\\ &-24u^3\operatorname{sech}^2(uz)\operatorname{th}(uz)\frac{dh_1(z)}{dz}+[u^4+16u^4\operatorname{sech}^2(uz)\\ &-24u^4\operatorname{sech}^4(uz)]h_1(z)=0.\end{aligned}\tag{22}$$

及

$$\begin{aligned}&-\omega^2h_2(z)+\frac{d^4h_2(z)}{dz^4}-2u^2(1-4\operatorname{sech}^2(uz))\frac{d^2h_2(z)}{dz^2}\\ &-8u^3\operatorname{sech}^2(uz)\operatorname{th}(uz)\frac{dh_2(z)}{dz}+u^4h_2(z)=0.\end{aligned}\tag{23}$$

这二个方程也可写成算符形式:

$$L_1h_1(uz)=\left(\frac{\omega}{u^2}\right)^2h_1(uz);\tag{22'}$$

$$L_2h_2(uz)=\left(\frac{\omega}{u^2}\right)^2h_2(uz).\tag{23'}$$

如令 $uz=\xi$, 则:

$$L_1=u^4(H_0-H')(H_0+H')=\frac{d^4}{d\xi^4}-2(1-4\operatorname{sech}^2\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}$$
$$-24\operatorname{sech}^2\xi\operatorname{th}\xi\frac{d}{d\xi}+(1+16\operatorname{sech}^2\xi-24\operatorname{sech}^4\xi);\tag{24}$$

$$L_2=u^4(H_0+H')(H_0-H')=\frac{d^4}{d\xi^4}-2(1-4\operatorname{sech}^2\xi)\frac{d^2}{d\xi^2}$$
$$-8\operatorname{sech}^2\xi\operatorname{th}\xi\frac{d}{d\xi}+1.\tag{25}$$

容易证明算符 L_1、L_2 虽然都是非厄密的,但它们是互为厄密的,即:

$$L_1^+=L_2;\quad L_2^+=L_1.\tag{26}$$

因此问题归结为求非厄密算符 L_1 或 L_2 的本征值及本征函数,并确证本征值为实. 由于 L_1 与 L_2 互为厄密,因此它们的本征值谱相同且本征函数互为正交[4].

$$\int h_2^*(z,\omega)h_1(z,\omega')dz=\delta(\omega-\omega').\tag{27}$$

我们已经求得了 L_1, L_2 算符的全套本征函数与本征值,它们的本征值谱由一个离散本征值 $\omega=0$ 及一组连续谱组成,连续谱的本征值色散关系为:

$$\omega^2=u^4(k^2+1)^2;$$
或
$$\omega=\pm(u^2k^2+u^2).\tag{28}$$

k 取值为 $-\infty<k<\infty$. 我们称离散本征值所对应的模式为经典模,而连续谱对应的为量子模. 他们的名称的意义后面可以更清楚看出.

对应的本征函数为:

$$\begin{cases}h_1(z)=\sqrt{u}\operatorname{sech}(uz)\operatorname{th}(uz); & \omega=0\\ h_1(z,k)=\dfrac{1}{(k^2+1)}\sqrt{\dfrac{u}{2\pi}}\{[(k^2-1)+2k\operatorname{th}(uz)+2\operatorname{sech}^2(uz)]\cos(kuz) & \\ \qquad+[(k^2-1)-2k\operatorname{th}(uz)+2\operatorname{sech}^2(uz)]\sin(kuz)\}; & \\ & \omega=\pm(u^2k^2+u^2).\end{cases}\tag{29}$$

及

$$\begin{cases}h_2(z)=\sqrt{u}\operatorname{sech}(uz); & \omega=0,\\ h_2(z,k)=\dfrac{1}{(k^2+1)}\sqrt{\dfrac{u}{2\pi}}\{[(k^2-1)+2k\operatorname{th}(uz)]\cos(kuz) & \\ \qquad+[(k^2-1)-2k\operatorname{th}(uz)]\sin(kuz)\}; & \omega=\pm(u^2k^2+u^2).\end{cases}\tag{30}$$

关于二组解的导得的详细情况,可参阅附录. 这些解的正交归一关系为:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(z, k)h_2(z, k)dz = \delta(k - k'), \tag{31.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(z)h_2(z, k)dz = 0, \tag{31.2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(z, k)h_2(z)dz = 0, \tag{31.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(z, k)h_1(z)dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{k}{3}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi k}{2}\right), \tag{31.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_2(z, k)h_2(z)dz = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi k}{2}\right), \tag{31.5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_1^2(z)dz = \frac{2}{3}, \tag{31.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_2^2(z)dz = 2. \tag{31.7}$$

2. 线性稳定性

上一小节中,我们求得了算符 $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{L}_2$ 的一套双正交的完备基. 因此就可以此为出发,研究线性稳定性问题. 由于初始条件的扰动, 产生的对孤子解 (4) 的扰动一般可表达为:

$$g(z, \tau) = a_{10}h_1(z) + ia_{20}h_2(z) + \int_{-\infty}^{\infty} dk a_{1k}h_1(z, k)\{\cos\omega\tau - \sin\omega\tau\}$$
$$+ i\int_{-\infty}^{\infty} dk a_{2k}h_2(z,k)\{\sin\omega\tau + \cos\omega\tau\}; \quad \omega = \pm(u^2k^2 + u^2). \tag{32}$$

将 (32) 代入方程 (13) 发现:

$$a_{1k} = -a_{2k}. \tag{33}$$

但 a_{10} 与 a_{20} 之间,方程 (13) 不带来约束, 这是由于经典模的本征值 $\omega = 0$ 所带来的任意性,我们发现,如果取:

$$a_{20} = -\frac{u_e}{2}a_{10}. \tag{34}$$

那么由经典模所贡献的扰动为:

$$g_0(z, \tau) = -\sqrt{u}\,a_{10}\left\{-\mathrm{sech}\,(uz)\,\mathrm{th}\,(uz) + i\frac{u_e}{2}\mathrm{sech}\,(uz)\right\}$$
$$= -\sqrt{u}\,a_{10}\frac{d\phi_s}{dz}e^{-i\theta(z,\tau)}. \tag{35}$$

这正好是孤子解 (4) 的"质心"位置平移 $-\sqrt{u}\,a_{10}$ 所产生的改变,因为:

$$\phi_s(z - \sqrt{u}\,a_{10}, \tau) = \phi_s(z, \tau) - \sqrt{u}\,a_{10}\frac{d\phi_s}{dz} + \cdots = (f + g_0)e^{i\theta} + \cdots. \tag{36}$$

因此,我们说, 由于初始条件的扰动, 经典模使波包位置发生了一个平移,而不改变形状. 这是我们称它为经典模的第一个原因. 而量子模由于是振荡函数, 它对波包的包络产生不大的影响,而主要对载波发生较大的干扰.

因此方程 (1) 的波包型孤子解 (4) 在初始条件扰动下是稳定的. 那么我们可以初步

认为：波包型孤子解作为一个粒子体系的描写也许是可行的.

三、微扰外势场中的运动

我们现在进一步利用 $\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{L}_2$ 的本征基来处理孤子解(4)在一个微扰势场中的运动问题.

我们与量子力学类比,势场 $\epsilon V(x)$ 的引进只是在方程(1)后添上一项:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+b|\psi|^2\psi=\epsilon V(x)\psi, \tag{37}$$

令方程解为:

$$\psi=\psi_s+\psi_d=(f+\epsilon g)e^{i\theta}.$$

略去 ϵ 二级以上项,得到 g 的方程为:

$$\begin{aligned}&i\frac{\partial g(z,\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}-u^2(1-4\,\mathrm{sech}^2(uz))g+2u^2\,\mathrm{sech}^2(uz)g^*\\&=u\sqrt{\frac{2}{b}}\,\mathrm{sech}(uz)V(z+u_e\tau).\end{aligned} \tag{38}$$

作进一步变量代换:

$$\begin{cases}uz=\xi,\\u^2\tau=\theta,\end{cases} \tag{39}$$

得:

$$\begin{aligned}&i\frac{\partial g(\xi,\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 g}{\partial\xi^2}-(1-4\,\mathrm{sech}^2\xi)g+2\,\mathrm{sech}^2\xi\cdot g^*\\&=\frac{1}{u}\sqrt{\frac{2}{b}}\,\mathrm{sech}\,\xi\cdot V\left(\frac{\xi}{u}+\frac{u_e}{u^2}\theta\right).\end{aligned} \tag{40}$$

令 $g(\xi,\theta)=g_1(\xi,\theta)+ig_2(\xi,\theta)$，得

$$\begin{cases}-\dfrac{\partial g_2(\xi,\theta)}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2 g(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}-(1-6\,\mathrm{sech}^2\xi)g_1(\xi,\theta)=\dfrac{1}{u}\sqrt{\dfrac{2}{b}}\,\mathrm{sech}\,\xi\cdot V(\xi,\theta);\\[2ex]\dfrac{\partial g_1(\xi,\theta)}{\partial\theta}+\dfrac{\partial^2 g(\xi,\theta)}{\partial\xi^2}-(1-2\,\mathrm{sech}^2\xi)g_2(\xi,\theta)=0.\end{cases} \tag{41}$$

二式对 θ 作偏微商,因此得独立的 g_1 或 g_2 方程为:

$$\frac{\partial^2 g_2(\xi,\theta)}{\partial\theta^2}+\boldsymbol{L}_2 g_2(\xi,\theta)=B_2(\xi,\theta); \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2 g_1(\xi,\theta)}{\partial\theta^2}+\boldsymbol{L}_1 g_1(\xi,\theta)=B_1(\xi,\theta). \tag{43}$$

其中

$$B_2(\xi,\theta)=-\frac{u^2}{u_e}\sqrt{\frac{2}{b}}\,\mathrm{sech}\,\xi\frac{\partial V(\xi,\theta)}{\partial\xi}; \tag{44}$$

$$B_1(\xi,\theta)=-\frac{1}{u}\sqrt{\frac{2}{b}}\left\{2\,\mathrm{sech}\,\xi\,\mathrm{th}\,\xi\,\frac{\partial V}{\partial \xi}-\mathrm{sech}\,\xi\,\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}\right\}. \tag{45}$$

可清楚看出 $B_2(\xi,\theta)$ 具有"力"的性质，但由于孤子解具有广延度，因此这个力的作用强度要受"粒子"密度的调制.

我们将 (42)、(43) 方程按它的相应本征基展开[1)]，即令：

$$\begin{aligned} g_1(\xi,\theta)&=\phi_{10}(\theta)h_1(\xi)+\int_{-\infty}^{\infty}dk(\phi_{1k}(\theta)h_1(\xi,k));\\ g_2(\xi,\theta)&=\phi_{20}(\theta)h_2(\xi)+\int_{-\infty}^{\infty}dk(\phi_{2k}(\theta)h_2(\xi,k)). \end{aligned} \tag{46}$$

利用正交归一关系 (31)，我们得：

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_{10}(\theta)}{d\theta^2}&=\frac{3}{2}B_1(\theta)-\sqrt{\frac{\pi}{8}}\int_{-\infty}^{\infty}dkB_1(\theta,k)\cdot k\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\equiv F_1(\theta);\\ \frac{d^2\phi_{20}(\theta)}{d\theta^2}&=\frac{1}{2}B_2(\theta)+\sqrt{\frac{\pi}{8}}\int_{-\infty}^{\infty}dkB_2(\theta,k)\,\mathrm{sech}\left(\frac{\pi k}{2}\right)\equiv F_2(\theta). \end{aligned} \tag{47}$$

及

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_{1k}(\theta)}{d\theta^2}+(k^2+1)^2\phi_{1k}(\theta)&=B_1(\theta,k);\\ \frac{d^2\phi_{2k}(\theta)}{d\theta^2}+(k^2+1)^2\phi_{2k}(\theta)&=B_2(\theta,k). \end{aligned} \tag{48}$$

其中

$$\begin{aligned} B_1(\theta)&=\int_{-\infty}^{\infty}B_1(\theta,\xi)h_1(\xi)d\xi;\\ B_2(\theta)&=\int_{-\infty}^{\infty}B_2(\theta,\xi)h_2(\xi)d\xi.\\ B_1(\theta,k)&=\int_{-\infty}^{\infty}B_1(\theta,\xi)h_2(\xi,k)d\xi;\\ B_2(\theta,k)&=\int_{-\infty}^{\infty}B_2(\theta,\xi)h_1(\xi,k)d\xi. \end{aligned} \tag{49}$$

因此，我们看到经典模振幅 $\phi_{10}(\theta)$ 及 $\phi_{20}(\theta)$ 所遵从的是牛顿型的方程，而量子模 $\phi_{1k}(\theta)$，$\phi_{2k}(\theta)$ 所遵从的是波动方程．这就是我们赋于这些模式以这样的名称的第二个原因．

由本征值谱 (28) 可清楚看出，经典模与量子模之间存在一个"能隙"，它等于

$$u^2=\frac{u_e^2}{4}\delta.$$

当量子化时，即 $\delta\to 0$，我们发现量子模向经典模靠近，能隙趋于零，完全实现量子力学条件 $\delta=0$ 时，经典模淹没于量子模中，不再作为一个突出的离散模存在．在当体系接近于经典条件时，即 $u_e\to\infty$，能隙无限增大，二支量子模向 $\pm\infty$ 方向推开，就留下单独一个经典模起作用，体系表现出"纯粹"的经典行为——遵从牛顿方程.

1) 由于 $h_1(z)$ 与 $h_2(z)$ 也正交，使得 $h_1(z)$、$h_1(z,\omega)$ 及 $h_2(z)$、$h_2(z,\omega)$ 的封闭性近似成立．但我们不作证明仍然认为方程 (42)、(43) 可按上述本征基展开.

四、讨　论

从以上几节,我们可以得出这样一些初步结论.

1. 非线性 Schrödinger 方程的波包型孤子解可以用于描写"粒子"的运动状态. 而量子力学及经典力学中的粒子概念只是它的二种极端情形.

2. 孤子解(4)具有线性稳定性,它不仅克服了量子力学的波包随时间弥散的缺点,而且保持了对初始条件扰动的稳定性.

3. 我们这里的粒子清晰地包含有"粒子性"与"波动性"二重性. 它在势场中的运动,由"粒子性"的经典模式及"波动性"的量子模式共同描述. 大家知道,在量子力学中强调了粒子的波动性,而在经典力学中只考虑了粒子性. 这里由于非线性自能项的引入,很自然地将粒子性、波动性统一在一起了.

4. 我们也可清楚地看出,这里给出了划分量子体系与经典体系的一个特征参量

$$u^2 = \frac{u_c^2}{4}\delta.$$

我们知道量子体系与经典体系不能只凭体系的尺度来划分,也不能只凭体系参与运动的能量来划分. 以前只是说 $\hbar$ 量起作用的体系是量子体系,$\hbar$ 不起作用的体系是经典体系. 但 $\hbar$ 是一个普适恒量,它总是存在的,因此,从概念上说,起不了作为描述体系的特征参量的作用. 我们这里提出了 u 作为特征参量,那么问题就归结为相速度 u_c 究竟是体系的什么动力学参量,它与体系的几何大小、动量、能量有什么关系? 亦即说怎么判定一个体系的"波动性"? 本文没给回答.

5. 对一个体系是否是量子体系或经典体系,也可从另一角度来回答,即看我们所要研究的问题的性质而定,也就是说,同一个体系随我们所要研究的问题的性质可以看成量子体系,也可看成经典体系. 我们认为如果我们研究的问题主要涉及量子模振幅的改变,那么体系可看成量子体系;如果问题主要涉及经典模——即"质心"位移的问题,那么体系可看成经典性. 这正如光学中,研究几何光学问题可以不考虑光的波动性;而研究衍射,干涉之类问题时,必须处理光的波动性. 同样,在加速器设计中,加速粒子体系可作为经典粒子处理;而研究它们的散射、反应问题时就需要作为量子体系来处理. 这是大家习以为常的事. 在这里,我们对这样的事可给与进一步说明,即加速器设计中主要关心的是加速粒子的质心位移,因此只要考虑经典模就够;在极端近似下,就可作为经典粒子处理. 而在粒子的散射、反应中涉及的是粒子的"位相"改变,因此需要考虑量子模的效应.

本文得到了金星南先生的热诚指导及关心,也得到了本所理论组同志们的大力帮助,作者在此表示深切的感谢. 本文也承蒙冯康先生、戴元本先生提了不少宝贵意见,在此一并表示衷心的谢意.

附　录

现在我们来求算符 $\boldsymbol{L}_2$ 的本征值问题,对我们物理上有意义的解是有界函数集合,因此我们下面分二种类型的有界函数来求:

(A) 局域解：

我们将边界渐近行为趋于零的解称为局域解，趋于有界函数的解为广延解.

可以证明解 (21) 是算符 L_2 的本征值 $\omega^2=0$ 的解，因此我们已有了一个局域解，我们再求另外的局域解.

作变换，令

$$h_2(\xi)=W_2(\xi)\operatorname{sech}^\alpha\xi \tag{A 1}$$

得 $W_2(\xi)$ 的方程为：

$$\begin{aligned}&\frac{d^4W_2}{d\xi^4}-4\alpha\operatorname{th}\xi\frac{d^3W_2}{d\xi^3}-2[(3\alpha(1+\alpha)-4)\operatorname{sech}^2\xi-(3\alpha^2-1)]\frac{d^2W_2}{d\xi^2}\\&+4\operatorname{th}\xi[(\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)-4\alpha-2)\operatorname{sech}^2\xi-\alpha(\alpha^2+1)]\frac{dW}{d\xi}\\&+\Big\{[\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)-8\alpha(1+\alpha)-8\alpha]\operatorname{sech}^4\xi\\&-2\alpha[(\alpha+1)(\alpha^2+2\alpha+2)-5(\alpha+1)]\operatorname{sech}^2\xi\\&+\alpha^4-2\alpha^2+1-\frac{\omega^2}{u^4}\Big\}W_2=0.\end{aligned} \tag{A 2}$$

我们观察 W_2 项的系数，发现如令 $\alpha=1$ 则 (A 1) 中的 W_2 项系数除了本征值外全消去了. 得：

$$\frac{d^4W_2}{d\xi^4}-4\operatorname{th}\xi\frac{d^3W_2}{d\xi^3}-4(\operatorname{sech}^2\xi-1)\frac{d^2W_2}{d\xi^2}-\frac{\omega^2}{u^4}W_2=0, \tag{A 3}$$

再作变量代换：

$$\eta=sh^2\xi, \tag{A 4}$$

得方程：

$$\begin{aligned}&16\eta^2(1+\eta)^2\frac{d^4W_2}{d\eta^4}+16\eta(1+\eta)(3+4\eta)\frac{d^3W_2}{d\eta^3}+4(8\eta^2+12\eta+3)\frac{d^2W_2}{d\eta^2}\\&+\frac{8}{1+\eta}\frac{dW_2}{d\eta}-\frac{\omega^2}{u^4}W_2(\eta)=0.\end{aligned} \tag{A 5}$$

这里我们已得到了标准型的四阶线性常微分方程，这个方程有 0，－1，∞ 三个极点. 由于 η 的取值范围为 $0\leqslant\eta<\infty$，见 (A 4)，因此我们只要求取 $\eta=0$ 点邻域内的解就行.

在 $\eta=0$ 点邻域内，我们令一个幂级数解：

$$W_2(\eta)=\eta^\rho\sum_{n=0}^{\infty}c_n\eta^n, \tag{A 6}$$

代入方程 (A 4) 得指标方程为：

$$\rho(4\rho^3-12\rho^2+11\rho-3)=0, \tag{A 7}$$

因此得：

$$\rho=0,1,\frac{1}{2},\frac{3}{2}. \tag{A 8}$$

那么我们可写出 $\eta=0$ 点邻域内四个线性独立形式解为:

$$
\begin{aligned}
W_{2a}(\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \eta^n, \\
W_{2b}(\eta) &= b_e W_{2a}(\eta) \ln \eta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^n, \\
W_{2c}(\eta) &= \eta^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \eta^n, \\
W_{2d}(\eta) &= d_e W_{2c} \ln \eta + \sum_{n=0}^{\infty} d_n \eta^n.
\end{aligned}
\tag{A 9}
$$

记住我们要求的是局域解,由变换 (A 1) 可知, W_2 必须具有这样的渐近行为:

$$W_2(\eta) \underset{\eta\to\infty}{<} \eta^{1/2} \tag{A 10}$$

由于 W_{2c}, W_{2d} 都违反这个边界条件, 因此不取, 此外 W_{2b} 由于 $\eta=0$ 时发散, 我们也不取,只有 $W_{2a}(\eta)$. 将它代入 (A 5) 式得系数方程为:

$$a_2 = -\frac{8a_1 - \dfrac{\omega^2}{u^4} a_0}{24}; \tag{A 11}$$

$$a_3 = -\frac{168a_2 - (a_1 + a_0)\dfrac{\omega^2}{u^4}}{360}. \tag{A 12}$$

对于 $n \geqslant 2$ 的一般通项为:

$$
\begin{aligned}
a_{n+2} = &-\frac{1}{16(n+1)(n+2)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{3}{2}\right)} \Big\{4(n+1)(12n^3+4n^2 \\
&+ 3n - 2)a_{n+1} + 16n(n-1)(3n^2-4n+2)a_n \\
&+ 16(n-1)^2(n-2)^2 a_{n-1} - \frac{\omega^2}{u^4}(a_n + a_{n-1})\Big\}.
\end{aligned}
\tag{A 13}
$$

因此这个幂级数只有二个任意常数 a_0 及 a_1, 其中 a_0 为归一化常数, 没有实质意义. 因此对于给定的本征值 $\frac{\omega^2}{u^4}$, 只有一个常数 a_1 需确定.

但是这个幂级数的行为,很类似于一个几何级数:

$$\frac{a_0}{1+\alpha\eta}. \tag{A 14}$$

因为当 $n\to\infty$ 时, (A 13) 渐近为:

$$a_{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} -(3a_{n+1} + 3a_n + a_{n-1}). \tag{A 15}$$

相邻系数间相差一个常因子. 因为幂级数 (A 9) $W_{2a}(\eta)$ 只需 a_0 及 a_1, $\left(\frac{\omega^2}{u^4}\right)$ 就能完全确定,因此具有这种性质的几何级数类型的一般函数可写为:

$$W_{2a}(\eta)=\frac{a_0\sum_{n=0}^{N}\eta^n}{\sum_{\substack{n=0\\n\neq i}}^{N+1}\eta^n+\beta\eta^i};$$

或　　(A 16)

$$W_{2a}(\eta)=\frac{a_0\left(\sum_{\substack{n=0\\n\neq i}}^{N}\eta^n+\beta\eta^i\right)}{\sum_{n=0}^{N+1}\eta^n}.$$

将 (A 16) 代入方程 (A 5) 发现只有 $\omega^2=0$，方程才有解，其中，N 为某一数.

既然不存在无穷级数型的收敛解，那么是否存在多项式型的解呢？就是说，某个 n 之后所有系数 $a_n=0$. 由 (A 13) 可知要截断无穷级数为多项式，必须要相连的三项系数 a_n，a_{n+1}，a_{n+2} 为零，亦即对于给定的 n 存在三个方程：

$$\begin{cases}f_1(c_1,\ \omega^2;\ n)=0,\\ f_2(c_1,\ \omega^2;\ n)=0,\\ f_3(c_1,\ \omega^2;\ n)=0.\end{cases}\tag{A 17}$$

这三个方程只有二个量 c_1 与 ω^2 需要确定. 又由于 f_1 是 $\frac{\omega^2}{u^4}$ 的$(n-2)$阶多项式，f_2 是 $\frac{\omega^2}{u^4}$ 的 $(n-1)$ 阶多项式，而 f_3 是 $\frac{\omega^2}{u^4}$ 的 n 阶多项式. 因此 f_1，f_2，f_3 都是 $\frac{\omega^2}{u^4}$ 的线性独立函数，那么立即可知方程 (A 17) 是矛盾方程，除非 $\omega^2=0$.

因此，我们确证了算符 $\boldsymbol{L}_2$ 只有 $\omega^2=0$ 的局域解，而这个解我们在其他地方早已求得，即为正文中的 (21)，根据解的唯一性定理，知道这即是我们的唯一一个局域解.

(B)广延解：

$\boldsymbol{L}_2$ 的广延解可以这样求，我们先来考察一下 $\xi\to\pm\infty$ 时 $\boldsymbol{L}_2$ 的渐近行为：

$$\boldsymbol{L}_2\xrightarrow[\xi\to\infty]{}\frac{d^4}{d\xi^4}-2\frac{d^2}{d\xi^2}+1,\tag{B 1}$$

因此有特征方程

$$-\frac{\omega^2}{u^4}+k^4+2k+1=0.\tag{B 2}$$

得本征值 ω^2 与 k 之间的色散关系为：

$$\omega^2=(u^2k^2+u^2)^2.\tag{B 3}$$

为了求取广延解，我们令试解为：

$$h_2(\xi,\ k)=W_a\cos k\xi+W_b\sin k\xi.\tag{B 4}$$

将 (B 4) 代入方程 (23′)，利用 $\cos k\xi$ 及 $\sin k\xi$ 的线性独立性，我们得 $W_a(\xi)$ 及 $W_b(\xi)$ 的方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^4W_a}{d\xi^4}-[6k^2+2(1-4\,\mathrm{sech}^2\,\xi)]\frac{d^2W_a}{d\xi^2}-8\,\mathrm{sech}^2\,\xi\,\mathrm{th}\,\xi\frac{dW_a}{d\xi}-8k^2\,\mathrm{sech}^2\,\xi W_a\\&\qquad+4k\left\{\frac{d^3W_b}{d\xi^3}-(k^2+1-4\,\mathrm{sech}^2\,\xi)\frac{dW_b}{d\xi}-2\,\mathrm{sech}^2\,\xi\,\mathrm{th}\,\xi W_b\right\}=0,\\&\frac{d^4W_b}{d\xi^4}-[6k^2+2(1-4\,\mathrm{sech}^2\,\xi)]\frac{d^2W_b}{d\xi^2}-8\,\mathrm{sech}^2\,\xi\,\mathrm{th}\,\xi\frac{dW_b}{d\xi}-8k^2\,\mathrm{sech}^2\,\xi W_b\\&\qquad-4k\left\{\frac{d^3W_a}{d\xi^3}-(k^2+1-4\,\mathrm{sech}^2\,\xi)\frac{dW_a}{d\xi}-2\,\mathrm{sech}^2\,\xi\,\mathrm{th}\,\xi W_a\right\}=0.\end{aligned}\right\}\quad(B\,5)$$

再作变换

$$\eta=\mathrm{th}\,\xi,\qquad(B\,6)$$

因此方程(B 5)变为:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2\\ -\boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{R}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_a\\ W_b\end{pmatrix}=0.\qquad(B\,7)$$

其中:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_1=&\left\{(1-\eta^2)^3\frac{d^4}{d\eta^4}-12\eta(1-\eta^2)^2\frac{d^3}{d\eta^3}-2(1-\eta^2)(3k^2+1-14\eta^2)\frac{d^2}{d\eta^2}\right.\\&\left.-4\eta(3k^2-1)\frac{d}{d\eta}-8k^2\right\},\qquad(B\,8)\\\boldsymbol{R}_2=&\,4k\left\{(1-\eta^2)^2\frac{d^3}{d\eta^3}-6\eta(1-\eta^2)\frac{d^2}{d\eta^2}-(k^2-1-2\eta^2)\frac{d}{d\eta}-2\eta\right\},\end{aligned}$$

引进么正变换 $\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{U}^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}$, 矩阵方程(B 7)变成对角式:

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_1-i\boldsymbol{R} & 0\\ 0 & \boldsymbol{R}_1+i\boldsymbol{R}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W_a+iW_b\\ i(W_a-iW_b)\end{pmatrix}=0,\qquad(B\,9)$$

因此变成二个分离的方程. 与局域解法一样, 用幂级数试解, 为了得到全定义域上有界解, 必须切断幂级数为多项式, 可以证明只存在一种切断, 即: 除了常系数之外只有下列唯一的一组解:

$$\begin{aligned}W_a(\eta)&=(k^2-1)+2k\eta;\\W_b(\eta)&=(k^2-1)-2k\eta.\end{aligned}\qquad(B\,9')$$

参 考 文 献

[1] A. C. Scott, F. Y. F. Chu and D. W. Mclaughlin, *Proceedings of the IEEE*, **60** (1973), 1443.

[2] K. Izumo and K. Konno, Proceedings of the International Conference on Nuclear, Structure, Contribution Papers, Tokyo (1977), p. 779.

[3] L. D. Landay and E. M. Lifshitz in "Quantum Mechanics" Oxford, London: Pergamon Press Ltd. 1962, p. 69.

[4] M. Morse and H. Feshbach in "Methods of Theoretical Physics" Vol. 1. N. Y., London, McGrow-Hill Book Company, 1953.

INVESTIGATION OF NON-LINEAR SCHRODINGER EQUATION SOLITON SOLUTION

SHI YI-JIN　HE YIN

(Institute of Atomic Energy, Academia Sinica)

ABSTRACT

Packet-like soliton solution of the non-linear Schrödinger's equation has been investigated. We found that a state of a free particle can possibly be described by this soliton solution, with the quantum property and the classical property of a particle as its limiting cases. A set of biorthogonal eigen-functions of non-hermitian operator, which can be used in the pertubation expansion, has been found. We discovered that the discrete eigenvalue mode corresponds to the "classical" motion of a particle, and the continuous eigenvalue modes correspond to the "quantum" motion. We suggested that the parameter u describing the state of a system can be used to identify whether the system is "quantum" or "classical".