第3卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 3, No. 4
1979年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1979

耦合系统的主方程(I)

卓益忠 吴锡真
(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本文运用与时间有关的投影算符,推导出广义耦合主方程,并在第一级玻恩近似下,推出N个任意子系的只含对角元部分的耦合主方程.

一、引 言

自从 Nakajima[1] 和 Zwanzig[2] 引入了投影算符方法后,人们广泛地应用它来推导主方程. 这个方法能把我们所研究的系统的自由度"一分为二",即分为"有关"与"无关"两部分,并把"无关"部分消除,剩下"有关"部分,成为一个闭合的主方程. 对于孤立系统,应用这种投影算符方法时,常常把密度算符在某一表象中的非对角元部分看做"无关"部分,而把对角元部分看做"有关"部分. 对于耦合系统(开放系统),总是把其中一个子系统看做无限大热源,把它当做"无关"部分. 但是对于许多问题,特别是原子核中的问题,相互耦合的子系统必须同等看待,不能把其中一个看做热源. 最近 Wills[3] 等人针对量子光学问题发展了与时间有关的投影算符方法(过去的投影算符是与时间"无关"的),可以把耦合子系统的自由度都不看做"无关"的,只是把它们之间的相互作用所引起的关联看做"无关"的. 这种方法可以把耦合子系统同等看待,因此比过去所用的投影算符方法更具有普遍性,可以自然地包括把某些子系统看做热源的特殊情况,还可以灵活地使"有关"部分既可以只含密度矩阵的对角元,也可以同时包括非对角元,这取决于如何选取哈密顿量的相互作用部分.

在核理论中,主方程愈来愈多地被用来研究各种各样随时间变化的过程,如予平衡反应,重离子反应的弛豫过程,核裂变等. 我们认为应用与时间有关的投影算符方法来研究这些过程将是一个比较好的出发点. 因为在这些问题中常常需要同时考虑各种自由度之间的耦合(如单粒子、振动、转动、相对运动等之间的耦合),而且绝热近似有时也不能用. 在本文中,应用与时间有关的投影算符,推导出在弱耦合条件下的N个子系统的耦合主方程. 由于该方法过去在核物理中未曾应用过,因此在二中简要回顾了含时间的投影算符方法. 在三中针对感兴趣的"有关"部分只是密度矩阵的对角元,我们重新定义了投影算符,并推导出相应的耦合方程,这相应于忽略相干部分. 在四中,取弱耦合近似,推出与通常主方程相应的耦合主方程形式. 在五中进行简要讨论.

本文1978年6月19日收到.

二、与时间有关的投影算符方法

首先研究体系只含两个相互作用子系统的情况. 设整个体系的密度算符为 $F(t)$,它满足刘吾维方程

$$\dot{F}(t) = -iLF(t) \tag{2.1}$$

L 是刘吾维算子,令 $\hbar = 1$.

分 $F(t)$ 为"有关"部分 $F_r(t)$ 和"无关"部分 $F_i(t)$,

$$F(t) = F_r(t) + F_i(t). \tag{2.2}$$

这里,
$$F_r(t) = C(t)\rho(t), \tag{2.3a}$$

$$F_i(t) = F(t) - C(t)\rho(t), \tag{2.3b}$$

而
$$C(t) = T_{r\rho}F(t),\quad \rho(t) = T_{rc}F(t). \tag{2.4}$$

$\rho(t)$, $C(t)$ 分别是 ρ 子系和 c 子系的密度矩阵; $T_{r\rho}$, T_{rc} 分别是对 ρ 子系和 c 子系变量求迹. 设系统哈密顿量为:

$$H = H^0 + H' = H^0_\rho + H^0_c + H'; \tag{2.5}$$

$$L = L^0 + L' = L^0_\rho + L^0_c + L', \tag{2.6}$$

取投影算符 $P(t)$, 使作用于 $F(t)$ 上得到 $F_r(t)$, 按[3]定义 $P(t)$ 为如下对称形式:

$$P(t) = C(t)\,T_{rc} + \rho(t)\,T_{r\rho} - C(t)\,\rho(t)\,T_r, \tag{2.7}$$

这里 $T_r = T_{rc}\cdot T_{r\rho}$.

利用此投影算符有:

$$F_r(t) = P(t)\,F(t),\quad F_i(t) = [1 - P(t)]\,F(t). \tag{2.8}$$

对于任意 t_1, t_2, 易证:

$$P(t_1)\,P(t_2) = P(t_1), \tag{2.9a}$$

$$[1 - P(t_1)]\,[1 - P(t_2)] = 1 - P(t_2), \tag{2.9b}$$

$$P(t_1)[1 - P(t_2)] = 0, \tag{2.9c}$$

当 $t_1 = t_2$ 时, $P^2(t) = P(t)$, 因此 $P(t)$ 具有投影算符性质.

虽然 $P(t)$ 是与时间有关的,但是由于

$$\dot{P}(t)\,F(t) = 0, \tag{2.10}$$

因此 $P(t)$ 的行为和与时间无关的算符相似.

$$\left[P(t), \frac{\partial}{\partial t}\right] F(t) = -\dot{P}(t)\,F(t) = 0, \tag{2.11}$$

可以得到:

$$\dot{F}_r(t) = -iP(t)\,LF_r(t) - iP(t)\,LF_i(t), \tag{2.12a}$$

$$\dot{F}_i(t) = -i[1 - P(t)]\,LF_i(t) - i\,[1 - P(t)]\,LF_r(t), \tag{2.12b}$$

为了解(2.12),引入积分因子 $g(t, t')$, 使之满足方程:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\,g(t, t') = ig(t, t')\,[1 - P(t')]\,L, \tag{2.13a}$$

和初始条件

$$g(t, t) = 1, \tag{2.13b}$$

这样得到：

$$F_i(t) = g(t, 0)\, F_i(0) - i\int_0^t dt' g(t, t')\,[1 - P(t')]\, LF_r(t'),$$

$$\dot F_r(t) = -iP(t)\, Lg(t, 0)\, F_i(0) - iP(t)\, LF_r(t)$$
$$- \int_0^t dt' P(t)\, Lg(t, t')\,[1 - P(t')]\, LF_r(t'). \tag{2.14}$$

这里，
$$g(t, t') = T\exp\{-i\int_{t'}^t dt''[1 - P(t'')]\, L\}, \tag{2.15}$$

T 是编时算符，在附录中给出 (2.15) 的详细推导．如果忽略掉初始关联，并利用文献[3]中证明的结果，可以得到广义耦合主方程：

$$\dot\rho(t) = -i\, L_\rho^0\, \rho(t) - i\langle L'\rangle_{c,t}\, \rho(t)$$
$$- \int_0^t dt'\, T_{rc}\, \Delta_t\, L'\, g(t, t')\, \Delta_{t'}\, L'\, C(t')\, \rho(t'), \tag{2.16a}$$

$$\dot C(t) = -i\, L_c^0\, C(t) - i\,\langle L'\rangle_{\rho,t}\, C(t)$$
$$- \int_0^t dt'\, T_{r\rho}\, \Delta_t\, L'\, g(t, t')\, \Delta_{t'}\, L'\, C(t')\, \rho(t'), \tag{2.16b}$$

这里，
$$\langle L'\rangle_{c,t} = T_{rc}\,[L'c(t)],\quad \langle L'\rangle_{\rho,t} = T_{r\rho}\,[L'\rho(t)],$$
$$\Delta_{t'} L' = L' - \langle L'\rangle_{c,t} - \langle L'\rangle_{\rho,t}.$$

同样的推导可以推广到 N 个耦合子系的情况，得到 N 个耦合方程：

$$\dot F_\alpha(t) = \left[-i\, L_\alpha^0 - i\, {\sum_\beta}' \langle L'_{\alpha\beta}\rangle_{\beta,t}\right] F_\alpha(t)$$
$$- \int_0^t dt' \left[\,{\sum_\beta^N}'\; T_{r\beta}\, \Delta_t\, L'_{\beta\alpha} {\prod_\gamma}''\, T_r\right] g^N(t, t')$$
$$\times \left[{\sum_\beta}' \Delta_{t'}\, L'_{\beta\alpha}\right] \prod_\alpha^N F_\alpha(t'). \tag{2.17}$$

其中 α、β、γ 是从 1 到 N 的整数，${\sum\limits_\beta^N}'$ 表示对 β 求和时，$\beta \neq \alpha$；${\prod\limits_\gamma}''$ 表示对 γ 连乘时 $\gamma \neq \alpha \neq \beta$.

$$\langle L'_{\alpha\beta}\rangle_{\beta,t} = T_{r\beta}\, L'_{\alpha\beta}\, F_\beta(t),\quad \Delta_t\, L'_{\beta\alpha} = L'_{\beta\alpha} - \langle L'_{\beta\alpha}\rangle_{\beta,t} - \langle L'_{\beta\alpha}\rangle_{\alpha,t}.$$

这些方程是严格的，但是如果不作进一步近似则没有什么用处，不过对有些问题，作近似，处理起来方便．

三、对角化的耦合主方程

在许多问题中，我们感兴趣的“有关”部分只是对角元，为此我们重新定义投影算符，使得投影出来的“有关”部分不仅是无关联部分，而且只含对角元部分．让我们首先考虑两个耦合子系统的情况．

设 $\rho^d(t)$ 是 ρ 子系只含对角元的密度矩阵，$C^d(t)$ 是 c 子系只含对角元的密度矩阵，D 是把密度矩阵对角元部分投影出来的算符．

$$F(t) = F_r^d(t) + F^{Nd}(t), \tag{3.1}$$

$$F_r^d(t) = C^d(t)\,\rho^d(t), \tag{3.2}$$

$$F^{Nd}(t) = F(t) - C^d(t)\rho^d(t). \tag{3.3}$$

这样 $F^{Nd}(t)$ 中不仅含有"无关"部分 $F_i(t)$，还含有 $F_r(t)$ 中的非对角部分.

$$C^d(t) = DT_{r\rho}\,F(t) = T_{r\rho}\,DF(t), \tag{3.4}$$

$$\rho^d(t) = DT_{rc}\,F(t) = T_{rc}\,DF(t), \tag{3.5}$$

重新定义投影算符:

$$P^d(t) = [\rho^d(t)\,T_{r\rho} + C^d(t)\,T_{rc} - \rho^d(t)\,C^d(t)\,T_r]\,D, \tag{3.6}$$

$$\dot{P}^d(t)\,F(t) = [\dot{\rho}^d\,T_{r\rho} + \dot{C}^d(t)\,T_{rc} - \dot{\rho}^d(t)\,C^d(t)\,T_r - \rho^d(t)\,\dot{C}^d(t)\,T_r]\,DF(t) = 0. \tag{3.7}$$

从刘吾维方程出发可得到:

$$\dot{F}_r^d(t) = -\,i\,P^d(t)\,LF_r^d(t) - iP^d(t)\,LF^{Nd}(t), \tag{3.8a}$$

$$\dot{F}^{Nd}(t) = -\,i\,[1 - P^d(t)]\,LF^{Nd}(t) - i[1 - P^d(t)]\,LF_r^d(t), \tag{3.8b}$$

引入积分因子 $g^d(t, t')$，使满足:

$$\frac{\partial}{\partial t'}\,g^d(t, t') = ig^d\,(t, t')\,[1 - P^d(t')]\,L$$

$$g^d\,(t, t) = 1 \tag{3.9}$$

因此,

$$\frac{\partial}{\partial t'}[\,g^d(t, t')\,F^{Nd}(t')] = -\,ig^d(t, t')\,[1 - P^d(t')]\,LF_r^d(t'),$$

$$F^{Nd}(t) = g^d(t, 0)\,F^{Nd}(0) - i\int_0^t g^d(t, t')\,[1 - P^d(t')]\,LF_r^d(t')dt'. \tag{3.10}$$

认为在初始时刻没有关联,即 $F^{Nd}(0) = 0$,

$$F^{Nd}(t) = -i\int_0^t g^d(t, t')\,[1 - P^d(t')]\,LF_r^d(t')\,dt', \tag{3.11}$$

$$\dot{F}_r^d(t) = -\,i\,P^d(t)\,LF_r^d(t) - \int_0^t P^d(t)\,Lg^d(t, t')\cdot[1 - P^d(t')]\,LF_r^d(t')\,dt'. \tag{3.12}$$

因为: $DL^0 = 0$, $DL'D = 0$,

$$F_r^d(t) = DF_r(t),$$

$$\dot{F}_r^d(t) = -\int_0^t dt'\,P^d(t)\,Lg^d(t, t')\,[1 - P^d(t')]\,LF_r^d(t'). \tag{3.13}$$

积分中的 L 用 L' 来代替,对于前面一个 L，因为 $DL^0 = 0$，故很容易看出来. 对于后面一个 L，可以证明:

$$[1 - P^d(t')]\,L^0\,F_r^d(t') = 0. \tag{3.14}$$

因为:

$$P^d(t)\,L_c^0 = L_c^0\,P^d(t) - L_c^0\,C^d(t)\,T_{rc}\,[1 - \rho^d(t)\,T_{r\rho}]\,D,$$

$$P^d(t)\,L_\rho^0 = L_\rho^0\,P^d(t) - L_\rho^0\,\rho^d(t)\,T_{r\rho}\,[1 - C^d(t)\,T_{rc}]\,D,$$

$$[1 - P^d(t')]\,F_r^d(t') = 0,$$

$$T_{r\rho}[1 - C^d(t')\,T_{rc}]\,DF_r^d(t') = 0,$$

$$T_{rc}[1 - \rho^d(t')\,T_{r\rho}]\,DF_r^d(t') = 0,$$

所以，$[1-P^d(t')]\,L^0\,F_r^d(t')=0$，

$$\dot{F}_r^d(t)=-\int_0^t dt' P^d(t)\,L'\,g^d(t,t')\,[1-P^d(t')]\,L'F_r^d(t'). \tag{3.15}$$

进而得：

$$\dot{F}_r^d(t)=-\int_0^t dt' P^d(t)\,L' g^d(t,t')\,L' F_r^d(t'), \tag{3.16}$$

由于，

$$T_{r\rho}\,P^d(t)=DT_{r\rho}, \tag{3.17a}$$

$$T_{rc}\,P^d(t)=DT_{rc}, \tag{3.17b}$$

在(3.16)上分别作用 $T_{r\rho}$，T_{rc} 得到：

$$\dot{\rho}^d(t)=-\int_0^t dt' D(T_{rc})\,L' g^d(t,t')\,L' C^d(t')\,\rho^d(t'), \tag{3.18a}$$

$$\dot{C}^d(t)=-\int_0^t dt' D(T_{r\rho})\,L' g^d(t,t')\,L' C^d(t')\,\rho^d(t'), \tag{3.18b}$$

令

$$G_\rho(t,t')=DT_{rc}\,L'\,g^d(t,t')\,L' C^d(t'), \tag{3.19a}$$

$$G_c(t,t')=DT_{r\rho}\,L'\,g^d(t,t')\,L'\,\rho^d(t'), \tag{3.19b}$$

则(3.18)式可写成更紧缩的形式：

$$\dot{\rho}^d(t)=-\int_0^t dt'\,G_\rho(t,t')\,\rho^d(t'), \tag{3.20a}$$

$$\dot{C}^d(t)=-\int_0^t dt'\,G_c(t,t')\,C^d(t'). \tag{3.20b}$$

推广到N个耦合子系

$$\dot{F}_\alpha^d(t)=-\int_0^t dt' D \prod_\beta^N{}' T_{r\beta}\,L'\,g_N^d(t,t')\,L' \prod_\beta^N F_\beta(t'), \tag{3.21}$$

$$\alpha=1\cdots N$$

令

$$G_\alpha(t,t')=D\prod_\beta^N{}' T_{r\beta}\,L'\,g_N^d(t,t')\,L'\prod_\beta^N{}' F_\beta(t'), \tag{3.22}$$

写成更紧缩的形式

$$\dot{F}_\alpha^d(t)=-\int_0^t dt'\,G_\alpha(t,t')\,F_\alpha^d(t'). \tag{3.23}$$

四、弱耦合、弱相互作用近似下的主方程

上面仅是一般讨论，为了得到可以进行具体计算的方程，必须作近似．迄今为止，采用了两种极端情况下的近似：i) 弱耦合、弱相互作用近似，这时可用微扰论计算；ii) 强耦合近似，把相互作用的矩阵元看作无规变量，也能推出可进行计算的方程．本文局限于弱耦合、弱相互作用近似，但不需把其中一个（或某几个）子系看成热源，因此可以更加普遍，更加灵活地同时考虑各个子系自由度之间的耦合．

首先考虑两个耦合子系的情况，暂时先讨论 $G_\rho(t,t')$，$G_c(t,t')$ 的性质．

令 $t-t'=\tau$，则：

$$G_\rho(t,t')=G_\rho(t,t-\tau),\quad G_c(t,t')=G_c(t,t-\tau).$$

一般对于有限系统 G_ρ, G_c 是 τ 的周期函数,这时这个系统就不是耗散系统,因此系统就不趋向平衡. 对于原子核这样一个有限系统来说,在什么条件下,它是耗散的,这是一个尚待解决的问题. 我们不妨先假定被研究的耦合子系都是耗散的,即 G_ρ, G_c 都是 τ 的衰减函数,衰减的特征时间 τ_{men}, τ_{men} 称记忆时间.

在弱耦合、弱相互作用近似下,H' 很小,按 Van Hove[5] 方法,L' 用一个小量 λ 来表征. 即:

$$L' = \lambda \bar{L}', \quad H' = \lambda \bar{H}',$$

则:

$$G_\rho(t, t') = \lambda^2 \bar{G}_\rho(t, t') = \lambda^2 D T_{rc} \bar{L}' g^d(t, t') \bar{L}' C^d(t')$$
$$= \lambda^2 D\langle \bar{L}' g^d(t, t') \bar{L}' \rangle_{c,t'}, \tag{4.1a}$$

$$G_c(t, t') = \lambda^2 \bar{G}_c(t, t') = \lambda^2 D T_{r\rho} \bar{L}' g^d(t, t') \bar{L}' \rho^d(t')$$
$$= \lambda^2 D \langle \bar{L}' g^d(t, t') \bar{L}' \rangle_{\rho,t'}, \tag{4.1b}$$

$$\dot{\rho}^d(t) = -\lambda^2 \int_0^t d\tau\, \bar{G}_\rho(t, t-\tau)\, \rho^d(t-\tau), \tag{4.2a}$$

$$\dot{C}^d(t) = -\lambda^2 \int_0^t d\tau\, \bar{G}_c(t, t-\tau)\, C^d(t-\tau), \tag{4.2b}$$

从 (4.2a), (4.2b) 可见,$\rho^d(t)$、$C^d(t)$ 随时间变化的速度取决于 λ 的大小,一个子系趋向平衡,其弛豫时间将是 λ 的函数. Van Hove[5]指出: 对于一个孤立系统,$1/\lambda^2$ 可以作为弛豫时间的量度,即 $\tau_{\text{relex}} \approx 1/\lambda^2$. 对于耦合系统,我们假定这个关系也是成立的. 因此,可以引进一个时间的新变量 $\bar{t}$, $\bar{t}=\lambda^2 t$, $\bar{t}$ 是以弛豫时间为尺度的,在这个尺度下,定义:

$$\bar{\rho}^d(\bar{t}) = \rho^d(t), \tag{4.3a}$$

$$\bar{C}^d(\bar{t}) = C^d(t), \tag{4.3b}$$

$$\dot{\bar{\rho}}^d(\bar{t}) = -\int_0^{t/\lambda^2} d\tau\, \bar{G}_\rho(t, t-\tau)\, \bar{\rho}^d(\bar{t} - \lambda^2\tau), \tag{4.4a}$$

$$\dot{\bar{C}}^d(\bar{t}) = -\int_0^{t/\lambda^2} d\tau\, \bar{G}_c(t, t-\tau)\, \bar{C}^d(\bar{t} - \lambda^2\tau), \tag{4.4b}$$

这里对新的时间变量 $\bar{t}$ 微分.

由于 G_ρ, G_c 是 $\bar{L}$ 的衰减函数,τ_{men} 是衰减特征时间,故在积分(4.4a)和(4.4b)中,主要贡献来自 $\tau \leqslant \tau_{\text{men}}$. 由于 λ 是个小量,可认为 $\tau_{\text{men}}/\tau_{\text{relex}} \ll 1$. 在 $\tau \leqslant \tau_{\text{men}}$ 时间间隔内,$\bar{\rho}^d(\bar{t})$ 和 $\bar{C}^d(\bar{t})$ 变化不大,因此可以对 $\bar{\rho}^d(\bar{t} - \lambda^2\tau)$ 和 $\bar{C}^d(\bar{t} - \lambda^2\tau)$ 作泰勒展开:

$$\dot{\bar{\rho}}(\bar{t}) = -\int_0^{t/\lambda^2} d\tau \bar{G}_\rho(t, t-\tau)\left\{\bar{\rho}^d(\bar{t}) - \lambda^2\tau \left.\frac{d\bar{\rho}(\bar{t}')}{d\bar{t}'}\right|_{\bar{t}'=\bar{t}} + \cdots\cdots\right\} \tag{4.5a}$$

$$\dot{\bar{C}}(\bar{t}) = -\int_0^{t/\lambda^2} d\tau \bar{G}_c(t, t-\tau)\left\{\bar{C}^d(\bar{t}) - \lambda^2\tau \left.\frac{d\bar{C}^d(\bar{t}')}{d\bar{t}'}\right|_{\bar{t}'=\bar{t}} + \cdots\cdots\right\} \tag{4.5b}$$

从上式可见,积分中第二项贡献与第一项相比为 $\tau_{\text{men}}/\tau_{\text{relex}}$ 量级,因此可以忽略. 当然,能够把积分中第二项以后的各项均忽略掉的条件是 $G(t, t-\tau)$ 随 τ 衰减的速度至少要等于或大于指数函数,这个问题要进一步研究. 这里我们先假定 $G(t, t-\tau)$ 随时间衰减的速度至少等于或大于指数函数. 故得到:

$$\dot{\bar{\rho}}^d(\bar{t}) = -\int_0^{t/\lambda^2} d\tau\, \bar{G}_\rho(t, t-\tau)\, \bar{\rho}^d(\bar{t}), \tag{4.6a}$$

$$\dot{\bar{C}}^d(\bar{t}) = -\int_0^{t/\lambda^2} d\tau\, \bar{G}_c(t, t-\tau)\, \bar{C}^d(\bar{t}). \tag{4.6b}$$

这样得出的方程在时间上是定域的．与过去历史无关，相当于马尔科夫近似．

现在在 G_ρ, G_c 中也做相应近似(保留 λ 的最低次)，而且把积分上限取 ∞.

对于传播因子 $g^d(t, t')$ 取一级玻恩近似，即：

$$g_0^d(t, t') = T\exp\left\{-i\int_{t'}^{t} dt''\,[1 - P^d(t'')]\,L^0\right\},$$

因为 $P^d(t'')\ L^0 = 0$,

$$g_0^d(t, t-\tau) = e^{-iL^0\tau}, \tag{4.7}$$

$$\bar{G}_\rho^0(t, t-\tau) = DT_{rc}\,\bar{L}'\,e^{-iL^0\tau}\,\bar{L}'\,\bar{C}^d(\bar{t}) = \langle \bar{G}_\rho^0(\tau)\rangle_{c,\bar{t}}, \tag{4.8a}$$

$$\bar{G}_c^0(t, t-\tau) = DT_{r\rho}\,\bar{L}'\,e^{-iL^0\tau}\,\bar{L}'\,\bar{\rho}^d(\bar{t}) = \langle \bar{G}_c^0(\tau)\rangle_{\rho,\bar{t}}, \tag{4.8b}$$

我们得到：

$$\dot{\bar{\rho}}^d(\bar{t}) = -\int_0^\infty d\tau\, DT_{rc}\,\bar{L}'\,e^{-iL^0\tau}\,\bar{L}'\,\bar{C}^d(\bar{t})\,\bar{\rho}^d(\bar{t}), \tag{4.9a}$$

$$\dot{\bar{C}}^d(\bar{t}) = -\int_0^\infty d\tau\, DT_{r\rho}\,\bar{L}'\,e^{-iL^0\tau}\,\bar{L}'\,\bar{C}^d(\bar{t})\,\bar{\rho}^d(\bar{t}). \tag{4.9b}$$

把 $\bar{L}'$ 用相互作用哈密顿代入：

$$\dot{\bar{\rho}}^d(\bar{t}) = -\int_0^\infty d\tau\, DT_{rc}[\bar{H}', [\bar{H}'(-\tau), \bar{\rho}_\tau^d(\bar{t})\,\bar{C}_\tau^d(\bar{t})]], \tag{4.10a}$$

$$\dot{\bar{C}}^d(\bar{t}) = -\int_0^\infty d\tau\, DT_{r\rho}[\bar{H}', [\bar{H}'(-\tau), \bar{\rho}_\tau^d(\bar{t})\,\bar{C}_\tau^d(\bar{t})]], \tag{4.10b}$$

这里：

$$\bar{H}'(-\tau) = e^{-iH^0\tau}\,\bar{H}'\,e^{iH^0\tau}, \tag{4.11a}$$

$$\bar{\rho}_\tau^d(\tau) = e^{-iH^0\tau}\,\bar{\rho}^d(\bar{t})\,e^{iH^0\tau}, \tag{4.11b}$$

$$\bar{C}_\tau^d(\tau) = e^{-iH^0\tau}\,\bar{C}^d(\bar{t})\,e^{iH^0\tau}, \tag{4.11c}$$

认为 H' 只包括子系之间的相互作用．令 n, m 等代表 H_ρ^0 本征态的量子数指标；α, β 等代表 H_c^0 本征态的量子数指标．

$$\dot{\bar{\rho}}_{nn}^d(\bar{t}) = -\int_0^\infty d\tau\, T_{rc}[\bar{H}', [\bar{H}'(-\tau), \bar{C}_\tau^d(\bar{t})\,\bar{\rho}_\tau^d(\bar{t})]_{nn}, \tag{4.12a}$$

$$\dot{\bar{C}}_{\alpha\alpha}^d(\bar{t}) = -\int_0^\infty d\tau\, T_{r\rho}[\bar{H}', [\bar{H}'(-\tau), \bar{C}_\tau^d(\bar{t})\,\bar{\rho}_\tau^d(\bar{t})]_{\alpha\alpha}, \tag{4.12b}$$

把矩阵元具体写出：

$$\begin{aligned} &T_{rc}[\bar{H}', C\bar{H}'(-\tau), \bar{C}_\tau^d(\bar{t})\,\bar{\rho}_\tau^d(\bar{t})]_{nn} \\ &\quad = 2\sum_{m\alpha\beta} |\bar{H}'_{n\alpha m\beta}|^2 \cos(E_n + E_\alpha - E_m - E_\beta)\,\tau \\ &\quad\quad \times [\bar{\rho}_{nn}^d(\bar{t})\,\bar{C}_{\alpha\alpha}^d(\bar{t}) - \bar{\rho}_{mm}^d(\bar{t})\,\bar{C}_{\beta\beta}^d(\bar{t})], \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^k d\tau \cos(E_n + E_\alpha - E_m - E_\rho)\,\tau = \Pi\delta\,(E_n + E_\alpha - E_m - E_\beta), \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\rho}}_{nn}^d(\bar{t}) = -2\pi \sum_{m\alpha\beta} |\bar{H}'_{n\alpha m\beta}|^2\,\delta(E_n + E_\alpha - E_m - E_\beta) \\ \times [C_{\alpha\alpha}^d(\bar{t})\,\bar{\rho}_{nn}^d(\bar{t}) - \bar{C}_{\beta\beta}^d(\bar{t})\,\bar{\rho}_{mm}^d(\bar{t})]. \end{aligned} \tag{4.15a}$$

同理：

$$\dot{\bar{C}}^d_{\alpha\alpha}(\bar{t}) = -2\Pi \sum_{nm\beta} |\bar{H}'_{n\alpha m\beta}|^2 \delta(E_n + E_\alpha - E_m - E_\beta)$$
$$\times [\bar{C}^d_{\alpha\alpha}(\bar{t})\, \bar{\rho}^d_{nn}(\bar{t}) - \bar{C}^d_{\beta\beta}(\bar{t})\, \bar{\rho}^d_{mm}(\bar{t})], \tag{4.15b}$$

回到原来时间尺度,并定义:

$$\Lambda_{m\beta n\alpha} = 2\pi\, \delta(E_n + E_\alpha - E_m - E_\beta)|H'_{n\alpha m\beta}|^2,$$
$$\Lambda_{m\beta n\alpha} = \Lambda_{n\alpha m\beta}, \tag{4.16}$$
$$P_n(t) = \rho_{nn}(t), \quad P_\alpha(t) = C_{\alpha\alpha}(t),$$
$$\dot{P}_n(t) = \sum_{\alpha,\beta,m} [P_m(t)\, P_\beta(t)\, \Lambda_{m\beta n\alpha} - P_n(t)\, P_\alpha(t)\, \Lambda_{n\alpha m\beta}], \tag{4.17a}$$
$$\dot{P}_\alpha(t) = \sum_{\beta,n,m} [P_\beta(t)\, P_m(t)\, \Lambda_{m\beta n\alpha} - P_\alpha(t)\, P_n(t)\, \Lambda_{n\alpha m\beta}], \tag{4.17b}$$

上面方程很容易推广到N个耦合子系的情况:

$$\dot{P}^\alpha_{\alpha_i}(t) = \sum_{\alpha_j\beta\beta_i\beta_j} [P^\alpha_{\alpha_j}(t)\, P^\beta_{\beta_j}(t)\, \Lambda^{\alpha\beta}_{\alpha_j\beta_j\alpha_i\beta_i}$$
$$- P^\alpha_{\alpha_i}(t)\, P^\beta_{\beta_i}(t)\, \Lambda^{\alpha\beta}_{\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j}]. \tag{4.18}$$
$$\alpha = 1, 2\cdots N; \quad \beta = 1, 2\cdots N.$$

其中: $P^\alpha_{\alpha_j}(t)$ 是 α 子系 α_j 态的分布几率; $\Lambda^{\alpha\beta}_{\alpha_j\beta_j\alpha_i\beta_i}$ 是由 $\alpha_i\,\beta_i$ 到 $\alpha_j\,\beta_j$ 的跃迁常数. 它反映了 α 子系与 β 子系之间的耦合.

(4.18) 就是N个耦合子系的主方程,是通常描述孤立系统的泡利主方程的推广.

五、讨 论

在这个工作中,我们采用与时间有关的投影算符,导出广义耦合主方程,并在一级玻恩近似下,得到N个任意子系的耦合主方程. 至于如何应用在核反应、核裂变中,以及在强耦合近似下方程的推导将在以后发表.

由于原子核是费米子所组成的,当把各种不同类型的自由度看做不同子系时(如单粒子、振动等),如何恰当地在等效哈密顿量及具体计算中顾及泡利原理,是需要进一步研究的.

附 录

在此给出

$$g(t, t') = T\exp\left(-i\int_{t'}^{t} dt''[1 - P(t'')]\, L\right) \text{的推导.}$$

T 是 Dyson 编时算符.

证明:

$$\text{由于}\frac{\partial g(t, t')}{\partial t'} = i\, g(t, t')\,[1 - P(t')]\, L, \tag{1}$$
$$g(t, t) = 1, \tag{2}$$

积分后得:

$$1-g(t,t')=i\int_{t'}^{t}g(t,t_1)\,[1-P(t_1)]\,L\,dt_1,$$

即：

$$g(t,t')=1-i\int_{t'}^{t}g(t,t_1)\,[1-P(t_1)]\,L\,dt_1,$$

经过叠代：

$$\begin{aligned}
g(t,t')&=1-i\int_{t'}^{t}dt_1\,[1-P(t_1)]\,L-\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t_1}^{t}dt_2[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L\\
&+i\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t_1}^{t}dt_2\int_{t_2}^{t}dt_3[1-P(t_3)]\,L[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L+\cdots\\
&=1+(-i)\int_{t'}^{t}dt_1[1-P(t_1)]L+(-i)^2\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t_1}^{t}dt_2[1-P(t_2)]L[1-P(t_1)]L\\
&+(-i)^3\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t_1}^{t}dt_2\int_{t_2}^{t}dt_3[1-P(t_3)]\,L[1-P(t_2)]L[1-P(t_1)]\,L+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-i)^n\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t'}^{t}dt_2\int_{t'}^{t}dt_3\cdots\int_{t'}^{t}dt_n\\
&\times T\,\{[1-P(t_n)]\,L\cdots[1-P(t_1)]\,L\}.
\end{aligned}\tag{3}$$

例：

$$\begin{aligned}
&\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t'}^{t}dt_2\,T\,\{[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L\}\\
&=\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t^1}^{t}dt_2[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L\\
&+\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t'}^{t_1}dt_2[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L.
\end{aligned}$$

第二个积分变换积分顺序后为：

$$\int_{t'}^{t}dt_2\int_{t_2}^{t}dt_1[1-P(t_1)]\,L[1-P(t_2)]\,L\tag{4}$$

如图 1

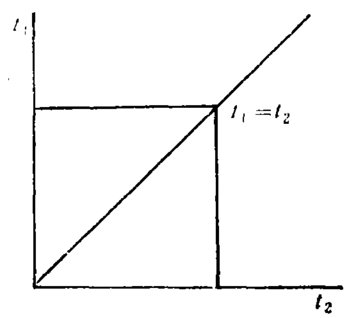

图　1

再将变量 t_1 与 t_2 交换得：

$$\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t_1}^{t}dt_2[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L$$

$$\therefore\quad\frac{1}{2}\int_{t'}^{t}dt_1\int_{t'}^{t}dt_2\,T\,\{[1-P(t_2)]\,L[1-P(t_1)]\,L\}$$

$$= \int_{t'}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 [1 - P(t_2)]\, L [1 - P(t_1)]\, L, \tag{5}$$

最后得:

$$g(t, t') = T \exp \left\{ -i \int_{t'}^{t} dt'' [1 - P(t'')]\, L \right\}. \tag{6}$$

参 考 文 献

[1] S. Nakajima, *Prog. theor. Phys.*, **20** (1958), 948.
[2] R. Zwanzig, *Physica*, **30** (1964), 721.
[3] C. R. Willis, *Phys. Rev.*, **A9** (1974), 1343; General Relativity and Gravitation, **1** (1976), 69.
[4] H. Hofmann, P. J. Siemens, *Nucl. Phys.*, **A275** (1977), 464.
[5] L. Van Hove, *Physica*, **21** (1955), 517; **23** (1957), 441.

MASTER EQUATIONS FOR COUPLING SYSTEM

ZHUO YI-ZHONG WU XI-ZHEN

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper the generized coupling master equations are derived by means of the time-dependent projection operator. In first order Born approximation, the coupling master equations for any N-subsystems, which only include diagonal elements are derived.