第 3 卷　第 4 期　高 能 物 理 与 核 物 理　Vol. 3, No. 4
1979 年 7 月　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　July, 1979

研究简报

$U(t, t_0)$-算符的逼近序列

李 子 平
（新 疆 大 学）

摘　　要

本文给出 $U(t, t_0)$-算符的一种逼近序列，证明了它的弱收敛性，同时证明了 $U(t, t_0)$-算符解的唯一性．在弱收敛意义下，可改进已知结果．

一

从 $U(t, t_0)$-算符（或 S 矩阵）适合的方程求其解是量子力学和量子场论的根本问题之一，各种微扰论方法及其收敛性的研究颇受注意[1]，在 Dyson 微扰论中，为了保证其收敛，通常引入绝热近似假定，或对体系的哈密顿作某些较严格的限制，还缺乏在较普遍的条件下加以研究．量子场论中存在的发散困难，虽然在某些情形（如 Q. E. D. 中）可用重正化消除微扰级数每一项的发散，但整个级数的收敛性仍是疑问．因此，十分必要在较一般的条件下，研究 $U(t, t_0)$-算符近似序列的收敛性和唯一性．

在利用 S 矩阵计算量子跃迁或基本粒子的有关过程时，实际需要的是计算 S 矩阵的跃迁幅，这样，研究 $U(t, t_0)$-算符逼近序列的收敛性，仅考虑相应的逼近序列跃迁幅的收敛性（弱收敛）就够了．本文提出 $U(t, t_0)$-算符的一种逼近序列，并证明它在较广泛条件下，是弱收敛的，从而在弱收敛意义下，改进了 Dyson 级数的收敛条件[2]，同时我们还证明了 $U(t, t_0)$-算符解的唯一性． 将所得的普遍结果初步用于量子力学，讨论了相应问题近似解的弱收敛性和唯一性．文中所证明的引理，可视为在弱收敛意义下，Arzela-Ascoli 引理在算符集合上的推广．

二

具有群性质的含参数的么正算符 $U(t', t_0)$ 适合如下的积分方程

$$U(t', t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t'} H(t_1)U(t_1, t_0)dt_1, \tag{2.1}$$

其中 $H(t)$ 为体系的哈密顿，它取决于体系的性质和所用的表象．

将 (t_0, t') 作 n 等分，对 (2.1) 作出 $U(t, t_0)$ 的逼近序列

本文 1978 年 4 月 23 日收到．

$$U_n(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} H(t_1)dt_1; \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \tau_n)$$

$$U_n(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t-\tau_n} H(t_1)U_n(t_1, t_0)dt_1. \tag{2.2}$$

$$(t_0 + K\tau_n < t \leqslant t_0 + (K+1)\tau_n, \quad K = 1, 2, \cdots, n-1)$$

其中 $\tau_n = (t' - t_0)/n$, 显然, 当 $n \to \infty(\tau_n \to 0)$ 时 U_n 适合 (2.1), 对 $t_0 + K\tau_n < t \leqslant t_0 + (K+1)\tau_n$, 具体可写出

$$U_n(t, t_0) = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (-i)^k \int_{t_0}^{t-\tau_n} dt_k \int_{t_0}^{t_k-\tau_n} \cdots \int_{t_0}^{t_2-\tau_n} H(t_k)\cdots H(t_1)dt_1$$

$$+ (-i)^m \int_{t_0}^{t-\tau_n} dt_m \int_{t_0}^{t_m-\tau_n} \cdots \int_{t_0}^{t_2} H(t_m)\cdots H(t_1)dt_1. \tag{2.3}$$

式中 $m \leqslant n$, 积分上限中的诸分点 t_i 适合

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t'. \tag{2.4}$$

引入时序积,让 $n \to \infty$ (或取某正整数列 $n_k \to \infty$) 记 $U_n(t, t_0) \to U(t, t_0)$, 那么

$$U(t, t_0) = 1 + \sum_k \frac{(-i)^k}{k!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \cdots \int_{t_0}^{t} dt_k T[H(t_1)\cdots H(t_k)]. \tag{2.5}$$

这就是 Dyson 公式.

这里的逼近序列是以 t_0 的右邻域的初值开始,按时间发展逐次叠代,而 Dyson 微扰论是在整个时间区间上,用同一初值开始作叠代的,很显然,在有穷次近似中,上述逼近序列和 Dyson 级数是不同的,仅当 $n \to \infty$ 时,两者才一致. 这里的逼近序列是基于时间发展而得到的,似乎更恰当.

三

现在来讨论上述逼近序列的收敛性,有关的定义和记号见附录.

定理 1. 如果方程 (2.1) 中算符 $H(t)$ 的范数 $\|H(t)\|$ 在 $[t_0, t']$ 上为 Lebesgue 可积函数,那么,存在 $U(t, t_0)$-算符的逼近序列,关于 t 在 $[t_0, t']$ 上一致弱收敛.

证: 逼近序列 (2.2), 对有限的 n, 由定理 1 中的条件, 显然 $\|U_n(t, t_0)\| \leqslant M$, 当 n 任意大时, (2.3) 中除去最后一项外, 设记为 $U'_n(t, t_0)$, 那么[3]

$$U'_n(t_n, t_0) = \prod_j \left[1 - i\int_{t_j}^{t_{j+1}-\tau_n} dt_1 H(t_1)\right]. \tag{3.1}$$

其中诸分点 t_j 适合 (2.4), $t_n = t'$, 于是

$$\|U'_n(t_n, t_0)\| \leqslant \prod_j \left\|\left[1 - i\int_{t_j}^{t_{j+1}-\tau_n} dt_1 H(t_1)\right]\right\| \leqslant \prod_j \left[1 + \int_{t_j}^{t_{j+1}-\tau_n} dt_1 \|H(t_1)\|\right]$$

$$\leqslant \exp\left(\int_{t_0}^{t'} dt_1 \|H(t_1)\|\right) < +\infty. \tag{3.2}$$

从而 $\|U_n(t, t_0)\|$ 一致有界.

又由 (2.2), 有

$$\|U_n(t^*, t_0) - U_n(t^{**}, t_0)\| = \left\|\int_{t^{**}-\tau_n}^{t^*-\tau_n} H(t_1)U_n(t_1, t_0)dt_1\right\|$$

$$\leqslant \|U_n(t,\ t_0)\|\int_{t^{**}-\tau_n}^{t^*-\tau_n} dt_1\|H(t_1)\|. \tag{3.3}$$

由于 $\|H(t)\|$ 为 Lebesgue 可积,(3.3)右侧积分为全连续，因此 $U_n(t,\ t_0)$ 的总体 $\mathfrak{M}$ 在 $[t_0,\ t']$ 上依范数等度连续,根据引理（见附录），有正整数数列 $\{n_k\}$ 所对应的序列 $\{U_{n_k}\}$，关于 t 一致弱收敛．但由第二段中的讨论，$n_k\to\infty$ 时，$\{U_{n_k}\}$ 的极限就是 Dyson 级数，于是 Dyson 级数关于 t 一致弱收敛．

如果在无穷时间上，$\|H(t)\|$ 为 Lebesgue 可积时，那么，$U(\infty,\ -\infty)$（即 S 矩阵）的 Dyson 级数是弱收敛的，Hammer 和 Weber 在一些特殊情况下，讨论了 Dyson 级数的收敛性[2]，定理 1 在弱收敛意义下，可概括他们的结果，同时还能保证在较广泛的情况下，$U(t,\ t_0)$ 的 Dyson 级数的弱收敛性．例如 $\|H(t)\|\leqslant Mt^{-1}(\log t)^{-\alpha}$，$(t\log t)^{-1}(\log\log t)^{-\alpha}$ $(t>0,\ \alpha>1)$ 等等情况下，相应的 Dyson 级数是弱收敛的．

四

下述定理给出了 $U(t,\ t_0)$-算符解的唯一性．

定理 2. 如果在有穷时间区间上，方程 (2.1) 中算符 $H(t)$ 的范数 $\|H(t)\|$ 关于 t 为 Lebesgue 可积函数，那么，方程 (2.1) 有唯一的解．

证：设方程 (2.1) 有两个解 $U(t,\ t_0)$ 和 $\bar{U}(t,\ t_0)$，那么

$$W(t,\ t_0)=U(t,\ t_0)-\bar{U}(t,\ t_0)$$

适合

$$W(t,\ t_0)=-i\int_{t_0}^{t} H(t_1)W(t_1,\ t_0)dt_1, \tag{4.1}$$

由此，

$$\|W(t,\ t_0)\|\leqslant\int_{t_0}^{t} dt_1\|H(t_1)\|\|W(t_1,\ t_0)\|. \tag{4.2}$$

因 $\|H(t)\|$ 对 t 为 Lebesgue 可积，故可选取充分小的 $\Delta_1>0$，使

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta_1}\|H(t)\|dt<1, \tag{4.3}$$

在 $[t_0,\ t_0+\Delta_1]$ 上，设 $\|W(t,\ t_0)\|$ 的极大值为 M_0，

$$M_0=\max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\Delta_1}\|W(t,\ t_0)\|, \tag{4.4}$$

由 (4.2)，在 $[t_0,\ t_0+\Delta_1]$ 上，有

$$\|W(t,\ t_0)\|\leqslant M_0\int_{t_0}^{t_0+\Delta_1}\|H(t)\|dt. \tag{4.5}$$

从(4.1)可知，$\|W(t,\ t_0)\|$ 关于 t 连续，它在区间 $[t_0,\ t_0+\Delta_1]$ 上的点 ξ 达到极大值，即

$$\|W(\xi,\ t_0)\|=M_0,\quad (t_0\leqslant\xi\leqslant t_0+\Delta_1) \tag{4.6}$$

由此，据 (4.5) 有

$$M_0\leqslant M_0\int_{t_0}^{t_0+\Delta_1}\|H(t)\|dt. \tag{4.7}$$

但由 (4.3)，上式右侧积分小于 1，这就推出：$M_0=0$，即 $\|W(t,\ t_0)\|=0$，于是在 $[t_0,\ t_0+\Delta_1]$ 上

$$U(t,\ t_0)=\overline{U}(t,\ t_0)$$

同样可证，在 $[t_1,\ t_1+\Delta_2]$ 上 $(t_1=t_0+\Delta_1)$ $U(t,\ t_0)$ 的解唯一，但区间 $(t_0,\ t)$ 可由有穷个区间 $\{\Delta_i\}$ 覆盖，从而 $U(t,\ t_0)$ 的解唯一.

五

我们采用相互作用表象，对量子力学中相应的问题，来估计它的 $\|H_I(t)\|$. 设体系的总哈密顿 $H=H_0+H'$, 那么

$$H_I(t)=\exp(iH_0t)H'\exp(-iH_0t). \tag{5.1}$$

假使 H_0 和 H' 是厄米的，于是[4]

$$\|H_I(t)\|=\sup_{\|\Phi\|=1}|\langle\Phi|H_I(t)|\Phi\rangle|. \tag{5.2}$$

如果 $H'=V(\boldsymbol{r},\ t)$ 为时、空坐标的 Lebesgue 平方可积函数，那么，可将任意态矢按 H_0 的本征态 $|E_n\rangle$ 展开，

$$|\Phi\rangle=\Sigma c_n|E_n\rangle, \tag{5.3}$$

$$V(\boldsymbol{r},\ t)|E_n\rangle=\Sigma a_{ni}|E_i\rangle. \tag{5.4}$$

(5.3), (5.4) 在平均收敛的意义下成立，显然

$$|c_n|^2\leqslant M. \tag{5.5}$$

将 (5.1), (5.3), (5.4), (5.5) 代入 (5.2), 利用本征态的性质和 Cauchy 不等式，得

$$\|H_I(t)\|\leqslant M|\langle E_n|V^2(\boldsymbol{r},\ t)|E_n\rangle|^{1/2}. \tag{5.6}$$

从而 $\|H_I(t)\|$ 为 Lebesgue 可积，所相应的 $U(t,\ t_0)$-算符解唯一，其 Dyson 级数弱收敛.

附 录

设可分完备的内积 Hilbert 空间 $\mathscr{H}$ 中两态矢 $|\Phi\rangle$ 和 $|\Psi\rangle$ 的内积记为 $\langle\Phi|\Psi\rangle$, 态矢 $|\Phi\rangle$ 的模记为 $\|\Phi\|=|\langle\Phi|\Phi\rangle|^{1/2}$, 不妨假设它们是归一的. 设算符 U 定义于 $\mathscr{H}$ 中的流形 $\mathscr{L}$ 上，它将 $\mathscr{L}$ 映为 $\mathscr{H}$ 中的 $\mathscr{L}_1$, U 的范数为

$$\|U\|=\inf_{|\Phi\rangle\in\mathscr{L}}\{M:\|U\Phi\|\leqslant M\|\Phi\|\}, \tag{A 1}$$

当 $\|U\|\leqslant M$ 时 (M 为有限常数)，称 U 为有界算符.

定义 1. 设 $\mathfrak{M}$ 为空间 $\mathscr{H}$ 中算符 U 构成的集合，其中每一算符 U 还依赖于参量 t $(t_1\leqslant t\leqslant t_2)$, 如果对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使对任意的 $U(t)\in\mathfrak{M}$ 与任意的 $t',t''\in[t_1,\ t_2]$, 只要 $|t'-t''|<\delta$, 就有

$$\|U(t')-U(t'')\|<\varepsilon. \tag{A 2}$$

则称 $\mathfrak{M}$ 在 $[t_1,\ t_2]$ 上按范数等度连续.

定义 2. 设 $\{U_n\}$ 为空间 $\mathscr{H}$ 中的算符序列，如果对于 $\mathscr{H}$ 中的任意态矢 $|\Phi\rangle$, $|\Psi\rangle$, 序列

$$\langle\Phi|U_1|\Psi\rangle,\langle\Phi|U_2|\Psi\rangle,\cdots,\langle\Phi|U_n|\Psi\rangle,\cdots \tag{A 3}$$

收敛，则称算符序列 $\{U_n\}$ 弱收敛.

引理. 设 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathscr{H}$ 中算符函数 $U(t)$ 构成的集合，如果

(1) 存在常数 M，使 $\|U(t)\| \leqslant M$，当 $U(t) \in \mathfrak{M}$ 时；

(2) $\mathfrak{M}$ 在 $[t_1, t_2]$ 上按范数等度连续.

那么，$\mathfrak{M}$ 中有算符序列

$$U_1^{(1)}(t),\ U_2^{(2)}(t),\ \cdots,\ U_n^{(n)}(t),\ \cdots \tag{A 4}$$

在 $[t_1, t_2]$ 上关于 t 一致弱收敛.

证：设 G 为 $\mathscr{H}$ 中处处稠密的可数集合，对任意给定的态矢 $|\Phi_1\rangle$, $|\Psi_1\rangle \in G$，由引理的条件 (1),

$$|\langle \Phi_1 | U(t) | \Psi_1 \rangle| \leqslant M, \tag{A 5}$$

在 $[t_1, t_2]$ 中的有理数集合 R 上，对每一个 $r \in R$，可选出收敛序列

$$\langle \Phi_1 | U_1^{(1)}(r) | \Psi_1 \rangle,\ \langle \Phi_1 | U_2^{(1)}(r) | \Psi_1 \rangle,\ \cdots,\ \langle \Phi_1 | U_n^{(1)}(r) | \Psi_1 \rangle, \cdots, \tag{A 6}$$

设序列 (A 6) 中诸算符 $U_n^{(1)}$ 构成的集合为 $\mathfrak{M}_1$，对于 $U_n^{(1)} \in \mathfrak{M}_1$ 以及任意给定的

$$|\Phi_2\rangle \in G \quad |\Psi_2\rangle \in G,$$

根据 $|\langle \Phi_2 | U_n^{(1)}(r) | \Psi_2 \rangle| \leqslant M$，同样可选出收敛序列

$$\langle \Phi_2 | U_1^{(2)}(r) | \Psi_2 \rangle,\ \langle \Phi_2 | U_2^{(2)}(r) | \Psi_2 \rangle,\ \cdots\cdots \langle \Phi_2 | U_n^{(2)}(r) | \Psi_2 \rangle,\ \cdots\cdots, \tag{A 7}$$

设序列 (A 7) 中诸算符 $U_n^{(2)}$ 构成的集合为 $\mathfrak{M}_2$，$\mathfrak{M}_2$ 为 $\mathfrak{M}_1$ 的子集，$\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$，类似地，从 $\mathfrak{M}_2$ 中可取出子序列 $\mathfrak{M}_3$，$\mathfrak{M}_3 \subset \mathfrak{M}_2$，$\cdots\cdots$ 这样下去，所得的诸序列为

$$\begin{array}{l} U_1^{(1)}(r),\ U_2^{(1)}(r),\ \cdots,\ U_n^{(1)}(r),\ \cdots, \\ U_1^{(2)}(r),\ U_2^{(2)}(r),\ \cdots,\ U_n^{(2)}(r),\ \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \tag{A 8}$$

其中后一序列为前一序列的子序列，(A 8) 的对角线序列为

$$U_1^{(1)}(r),\ U_2^{(2)}(r),\ \cdots,\ U_n^{(n)}(r),\ \cdots. \tag{A 9}$$

不难看出，这个序列 (A 9)，对于集合 G 中的任意态矢 $|\Phi_i\rangle$, $|\Psi_i\rangle$，序列

$$\langle \Phi_i | U_1^{(1)}(r) | \Psi_i \rangle,\ \langle \Phi_i | U_2^{(2)}(r) | \Psi_i \rangle,\ \cdots,\ \langle \Phi_i | U_n^{(n)}(r) | \Psi_i \rangle,\ \cdots \tag{A 10}$$

收敛. 事实上，因为 $U_i^{(i)}(r)$, $U_{i+1}^{(i+1)}(r)$, $U_{i+2}^{(i+2)}(r)$, $\cdots$, 是 $\{U_n^{(i)}(r)\}_{n=1,2,\cdots}$ 的子序列，根据上述构造，$\{\langle \Phi_i | U_n^{(i)}(r) | \Psi_i \rangle\}_{n=1,2,\cdots}$ 收敛，从而 (A 10) 收敛.

由于 $\mathscr{H}$ 的可分性，设 $|\Phi\rangle$, $|\Psi\rangle$ 为 $\mathscr{L}$ 中的任意态矢，对任意小的 $\varepsilon > 0$，可以有

$$|\Phi_i\rangle \in G,\ |\Psi_i\rangle \in G,$$

使

$$\|\Phi - \Phi_i\| < \varepsilon/24M; \tag{A 11}$$

$$\|\Psi - \Psi_i\| < \varepsilon/24M. \tag{A 12}$$

由于对任意的 $|\Phi_i\rangle$, $|\Psi_i\rangle \in G$，序列 (A 10) 收敛，所以有 N 存在，当 $m, n > N$ 时，有

$$|\langle \Phi_i | [U_m^{(m)}(r) - U_n^{(n)}(r)] | \Psi_i \rangle| < \varepsilon/12. \tag{A 13}$$

我们记 $T = U_m^{(m)}(r) - U_n^{(n)}(r)$，并写

$$\begin{aligned} \langle \Phi | T | \Psi \rangle &= \langle \Phi | T | \Psi_i \rangle + \langle \Phi | T(|\Psi\rangle - |\Psi_i\rangle) \\ &= (\langle \Phi | - \langle \Phi_i |) T | \Psi_i \rangle + \langle \Phi_i | T | \Psi_i \rangle + (\langle \Phi | - \langle \Phi_i |) \\ &\quad \times T(|\Psi\rangle - |\Psi_i\rangle) + \langle \Phi_i | T(|\Psi\rangle - |\Psi_i\rangle). \end{aligned} \tag{A 14}$$

由 (A11)、(A12)、(A13)，利用 Schwarz-Буяковский 不等式，有

$$|\langle \Phi | [U_m^{(m)}(r) - U_n^{(n)}(r)] | \Psi \rangle| \leqslant |(\langle \Phi | - \langle \Phi_i |) T | \Psi_i \rangle| + |\langle \Phi_i | T | \Psi_i \rangle|$$

$$+\left|\left(\langle\Phi|-\langle\Phi_i|\right)T\left(|\Psi\rangle-|\Psi_i\rangle\right)\right|+\left|\langle\Phi_i|T\left(|\Psi\rangle-|\Psi_i\rangle\right)\right|<\varepsilon/3. \quad \text{(A 15)}$$

于是,在 $[t_1, t_2]$ 中的有理数集合 R 上,对任意的 $|\Phi\rangle\in G$, $|\Psi\rangle\in G$, 序列

$$\langle\Phi|U_1^{(1)}(r)|\Psi\rangle,\ \langle\Phi|U_2^{(2)}(r)|\Psi\rangle,\ \cdots\langle\Phi|U_n^{(n)}(r)|\Psi\rangle,\ \cdots \quad \text{(A 16)}$$

收敛.

不难看出,序列 (A 16) 在 $[t_1, t_2]$ 上一致收敛. 因为对任意的 $t\in[t_1, t_2]$ 以及任意的 $\varepsilon>0$, 由引理中条件 (2), 有点 $r\in R$, 当 $|t-r|<\delta$ 时,

$$\|U_n^{(n)}(t)-U_n^{(n)}(r)\|<\varepsilon/3. \quad \text{(A 17)}$$

今在 $[t_1, t_2]$ 上作分划

$$t_1=r_0<r_1<\cdots<r_n=t_2 \quad \text{(A 18)}$$

诸分点 $r_i\in R$, $(i=1, 2, \cdots, n-1)$, 使

$$\max|r_{k+1}-r_k|<\delta, \quad (k=0, 1, \cdots, n) \quad \text{(A 19)}$$

在 (A 18) 这些有穷个分点上,序列 (A 16) 收敛,因此,存在一个与 ε 无关的充分大的 N, 当 $m, n>N$ 时

$$|\langle\Phi|[U_m^{(m)}(r_i)-U_n^{(n)}(r_i)]|\Psi\rangle|<\varepsilon/3, \quad \text{(A 20)}$$

所以,对任意的 $t\in[t_1, t_2]$, 由 (A 17), (A 20), 有

$$|\langle\Phi|[U_m^{(m)}(t)-U_n^{(n)}(t)]|\Psi\rangle|\leqslant|\langle\Phi|[U_m^{(m)}(t)-U_m^{(m)}(r_i)]|\Psi\rangle|$$
$$+|\langle\Phi|[U_m^{(m)}(r_i)-U_n^{(n)}(r_i)]|\Psi\rangle|+\langle\Phi|[U_n^{(n)}(r_i)-U_n^{(n)}(t)]|\Psi\rangle|<\varepsilon. \quad \text{(A 21)}$$

于是,序列 (A 16) 在 $[t_1, t_2]$ 上一致收敛.

这个引理在弱收敛意义下,相似于 Arzela-Ascoli 引理在算符集合上的推广.

参 考 文 献

[1] P. W. Lanhoff, S. T. Epstein, M. Karplus, *Rev. Mod. Phys.*, **44** (1972), 602.
[2] C. L. Hammer and T. A. Weber, *J. Math. Phys.*, **6** (1965), 1591.
[3] 朱洪元, 量子场论, 科学出版社, (1960), 184 页.
[4] M. Reed, B. Simon, Method of modern mathematical Physics, **1** (1972), 216.

APPROXIMATE SEQUENCE FOR $U(t, t_0)$-OPERATOR

LI ZI-PING
(*Sinkiang University*)

ABSTRACT

We give an approximate sequence for $U(t, t_0)$—operator. We prove the following theorems:

Theorem 1. If the norm $||H(t)||$ of $H(t)$ in equation (2.1) is a Lebesgue integrable function with respect to t, then there is an approximate sequence $\{U_n\}$, such that for any state vector $|\Phi\rangle, |\Psi\rangle$, the sequence

$$\langle\Phi|U_1|\Psi\rangle, \langle\Phi|U_2|\Psi\rangle, \cdots\cdots, \langle\Phi|U_n|\Psi\rangle, \cdots\cdots$$

is uniform convergent with respect to t.

Theorem 2. If in finite time interval, the norm $||H(t)||$ of $H(t)$ in equation (2.1) is a Lebesgue integrable function, then equation (2.1) has unique solution.