第3卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 3, No. 5
1979年9月　　PHYSICA ENÈRGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Sept., 1979

研究简报

关于交换积分次序的两个恒等式的证明

汪　　容
（中国科学院高能物理研究所）

摘　　要

在微观因果律、弱收敛的前提下，对复合场论的关于交换积分次序的两个恒等式作了一个简单证明.

在何祚庥、黄涛[1]的关于复合场的讨论中，引用了 Zimmermann[2] 曾讨论过的关于交换积分次序的两个恒等式，在一些教科书中(例如[3])，也引用了 Zimmermann 的恒等式，但 Zimmermann 发表的文章中并没有给出证明. 这两个恒等式对于复合场理论是比较重要的. 本文在微观因果律和弱收敛的前提下，对形式上稍有扩充的这两个恒等式给出了一个简单的证明.

不失去一般性，可取 ψ_A、ψ_B 为"基本"旋量场，束缚态(其4-动量为 P，其他量子数为 α)的波函数为：

$$\langle 0|T\psi_A(x_1)\psi_B(x_2)|P,\alpha\rangle = e^{iPX}\chi_{P\alpha}(x)\frac{1}{\sqrt{2E_P}}, \tag{1}$$

$$\langle P,\alpha|T\bar{\psi}_A(x_1)\bar{\psi}_B(x_2)|0\rangle = e^{-iPX}\bar{\chi}_{P\alpha}(x)\frac{1}{\sqrt{2E_P}}; \tag{2}$$

$$X=\frac{x_1+x_2}{2},\ x=x_1-x_2$$

束缚态的正交归一条件是1)：

$$(-i)(2\pi)^4\int d^4x d^4y\,\frac{\bar{\chi}_{\underline{k}\omega\sigma}(x)}{\sqrt{2\omega}}((x,\underline{k}\omega|Q|y,\underline{k}\omega'))\frac{\chi_{\underline{k}\omega'\sigma'}(y)}{\sqrt{2\omega'}}=\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{MM'}. \tag{2}$$

$$\omega=\sqrt{\underline{k}^2+M^2},\ \omega'=\sqrt{\underline{k}^2+M'^2}.$$

其中 Q 算子定义为：

$$((x,\underline{k}\omega|Q|y,\underline{k}\omega'))=\frac{I(x,y,\underline{k}\omega)-I(x,y,\underline{k}\omega')}{\omega-\omega'}+\frac{\bar{G}(x,y,\underline{k}\omega)-\bar{G}(x,y,\underline{k}\omega')}{\omega-\omega'}, \tag{3}$$

$$\bar{G}(p,p',\underline{k}\omega)=\int d^4x d^4y\, e^{-ipx+ip'y}\bar{G}(x,y,\underline{k}\omega),$$

本文1978年8月22日收到.

1)关于 I 和 $\bar{G}$ 可参考[3]所用的符号.

$$I\ (p, p', \underset{\sim}{k}\omega) = \int d^4x d^4y e^{-ipx+ip'y} I(x, y, \underset{\sim}{k}\omega).$$

在讨论涉及束缚态的“入”、“出”算子对易关系时，需要用到如下的两个交换积分次序的弱收敛恒等式(参考[1])：

$$\left(\int d^4X \int d^4Y - \int d^4Y \int d^4X\right) \int d^4x d^4x' d^4y d^4y'$$

$$\cdot\ e^{ikX} \frac{\bar{\chi}_{\underset{\sim}{k}M_1\sigma_1}(x')}{\sqrt{2\omega_{\underset{\sim}{k}}}} \cdot \frac{1}{2\omega_{\underset{\sim}{k}}}(-\vec{\square}_X + M_1^2)\left(\left(x', \underset{\sim}{k}'\omega_{\underset{\sim}{k}} | Q | x, \underset{\sim}{k}\ i\frac{\vec{\partial}}{\partial X_0}\right)\right)$$

$$\cdot\left(T\phi_A\left(X + \frac{x}{2}\right)\phi_B\left(X - \frac{x}{2}\right)\bar{\Phi}_A\left(Y + \frac{y}{2}\right)\bar{\Phi}_B\left(Y - \frac{y}{2}\right)\right)$$

$$\cdot\left(\left(y, \underset{\sim}{q} - i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Y_0} | Q | y', \underset{\sim}{q}\omega\underset{\sim}{q}\right)\right)\frac{1}{2\omega\underset{\sim}{q}}$$

$$\cdot\ (-\overleftarrow{\square}_Y + M_2^2)\frac{\chi_{\underset{\sim}{q}M_2\sigma_2}(y')}{\sqrt{2\omega_{\underset{\sim}{q}}}} e^{iqY} = 0, \tag{4}$$

$$\left(\int d^4X \int d^4Y - \int d^4Y \int d^4X\right) \int d^4x d^4x' d^4y d^4y'$$

$$\cdot\ e^{-ikX} \frac{\bar{\chi}_{\underset{\sim}{k}M_1\sigma_1}(x')}{\sqrt{2\omega_{\underset{\sim}{k}}}} \cdot \frac{1}{2\omega_{\underset{\sim}{k}}}(-\vec{\square}_X + M_1^2)\left(\left(x', \underset{\sim}{k}\omega_{\underset{\sim}{k}} | Q | x, \underset{\sim}{k}\ i\frac{\vec{\partial}}{\partial X_0}\right)\right)$$

$$\cdot\left(T\phi_A\left(X + \frac{x}{2}\right)\phi_B\left(X - \frac{x}{2}\right)\bar{\Phi}_A\left(Y + \frac{y}{2}\right)\bar{\Phi}_B\left(Y - \frac{y}{2}\right)\phi(z)\right)$$

$$\cdot\left(\left(y, \underset{\sim}{q} - i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Y_0} | Q | y', \underset{\sim}{q}\omega_{\underset{\sim}{q}}\right)\right)\frac{1}{2\omega_{\underset{\sim}{q}}}$$

$$\cdot\ (-\overleftarrow{\square}_Y + M_2^2)\frac{\chi_{\underset{\sim}{q}M_2\sigma_2}(y')}{\sqrt{2\omega_{\underset{\sim}{q}}}} e^{iqY} = 0. \tag{5}$$

这就是要证明的两个恒等式（其实 χ 和 $\bar{\chi}$ 既可以是束缚态的波函数，也可以是散射态的波函数）．因为引入了波函数和 Q 算子，所以它们形式上比 Zimmermann 讨论的恒等式稍有扩充．在(4)、(5)两式中，$\left(\left(x', \underset{\sim}{k}\omega_{\underset{\sim}{q}} | Q | x, \underset{\sim}{k}i\frac{\vec{\partial}}{\partial X_0}\right)\right)F(X)$ 中的 $\frac{\vec{\partial}}{\partial X_0}$ 和 $F^+(Y)\left(\left(y, \underset{\sim}{q} - i\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Y_0} | Q | y', \underset{\sim}{q}\omega_{\underset{\sim}{q}}\right)\right)$ 中的 $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Y_0}$ 分别用 $\frac{\partial F(X)}{\partial X_0}/F(X)$ 和 $\frac{\partial F^+(Y)}{\partial Y_0}/F^+(Y)$ 代入，$F(X)$ 是可以对 X_0 微分的函数．

先看(4)式的证明．因为弱收敛，需在两边夹上 a，b 两态．于是把

$$T\phi_A\left(X + \frac{x}{2}\right)\phi_B\left(X - \frac{x}{2}\right)\bar{\Phi}_A\left(Y + \frac{y}{2}\right)\bar{\Phi}_B\left(Y - \frac{y}{2}\right)$$

写成

$$\left\langle a \left| T\phi_A\left(X + \frac{x}{2}\right)\phi_B\left(X - \frac{x}{2}\right)\bar{\Phi}_A\left(Y + \frac{y}{2}\right)\bar{\Phi}_B\left(Y - \frac{y}{2}\right)\right| b \right\rangle,$$

然后把它的编时的内容具体写出来，出现许多 θ 函数项：

$$\left\langle a \left| T\phi_A\left(X + \frac{x}{2}\right)\phi_B\left(X - \frac{x}{2}\right)\bar{\Phi}_A\left(Y + \frac{y}{2}\right)\bar{\Phi}_B\left(Y - \frac{y}{2}\right)\right| b \right\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n_1,n_2,n_3} \left\langle a \left| \psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right) \right| n_1 \right\rangle \left\langle n_1 \left| \psi_B\left(X-\frac{x}{2}\right) \right| n_2 \right\rangle \\
&\quad \cdot \left\langle n_2 \left| \bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right) \right| n_3 \right\rangle \left\langle n_3 \left| \bar{\psi}_B\left(Y-\frac{y}{2}\right) \right| b \right\rangle \\
&\quad \cdot \theta(x_0)\theta\left(X_0-Y_0-\frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{2}\right)\theta(y_0) \\
&\quad - \sum_{n_1,n_2,n_3} \left\langle a \left| \psi_B\left(X-\frac{x}{2}\right) \right| n_1 \right\rangle \left\langle n_1 \left| \psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right) \right| n_2 \right\rangle \\
&\quad \cdot \left\langle n_2 \left| \bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right) \right| n_3 \right\rangle \left\langle n_3 \left| \bar{\psi}_B\left(Y-\frac{y}{2}\right) \right| b \right\rangle \\
&\quad \cdot \theta(-x_0)\theta\left(X_0-Y_0+\frac{x_0}{2}-\frac{y_0}{2}\right)\theta(y_0)+\cdots. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

这一类的项一共有二十四个. 不仅有这些项，还要有坐标的广义函数项. 例如，考察如下 T 乘积:

$$
\begin{aligned}
&T\psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right) \\
&= \psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right)\theta\left(X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}\right) \\
&\quad - \bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right)\psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\theta\left(Y_0-X_0+\frac{y_0-x_0}{2}\right) \\
&= \begin{cases} \psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right), & X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}>0 \\ -\bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right)\psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right), & Y_0-X_0+\frac{y_0-x_0}{2}>0 \end{cases} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

在 $X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}\neq 0$ 时，这个表式有确定的含义. 而且由于有微观因果律，当$\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)$为类空间隔时，仍保证编时次序有罗伦兹不变的意义. 在 $X_0-Y_0+\frac{x_0+y_0}{2}=0$ $\underline{X}-\underline{Y}+\frac{\underline{x}-\underline{y}}{2}\neq 0$ 时，由于有微观因果律，T 乘积的 $X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}=0_+$ 的极限值和 $X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}=0_-$ 的极限值是相同的，所以这时（7）式也有确定的含义.

只有在 $X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}=0$，$\underline{X}-\underline{Y}+\frac{\underline{x}-\underline{y}}{2}=0$ 这一点，T 乘积还没有确定的意义，所以一般来说(考虑到各种可能性)，可以把这个 T 乘积的矩阵元写成:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle c \left| T\psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right) \right| d \right\rangle \\
&= \theta\left(X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}\right)\left\langle c \left| \psi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\bar{\psi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right) \right| d \right\rangle
\end{aligned}
$$

$$-\theta\left(Y_0-X_0+\frac{y_0-x_0}{2}\right)\left\langle c\left|\bar{\phi}_A\left(Y+\frac{y}{2}\right)\phi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\right|d\right\rangle$$

$$+f_{cd}\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right). \tag{8}$$

这里 $f_{cd}\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)$是 $X-Y+\frac{x-y}{2}$ 的某一个广义函数,而且是一个 c-数,它在 $X+Y+\frac{x-y}{2}\neq 0$ 时为零. $\Big($两个 θ 函数在 $X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}=0$ 时所取的值是无关紧要的,因为它们是有限的,并不影响积分.$\Big)$

由此可见,一般来说,(6)式应该是 24 个 θ 函数项和各个包括广义函数(c-数)的项的和. 于是我们看到:

(i) 如果平移不变性存在, 则每一个矩阵元中的空间时间变量都可以转移到指数上去,例如:

$\left\langle a\left|\phi_A\left(X+\frac{x}{2}\right)\right|n_1\right\rangle=\left\langle a\left|\phi_A(0)\right|n_1\right\rangle e^{-i(p_a-n_1)\left(X+\frac{x}{2}\right)}$ 等等, 其中 a 和 n_1 都是物理的态(H 的本征态),右上方的 n_1 代表 n_1 态的动量.

(ii) θ 函数中的时间变数也可以转移到指数上去,例如:

$$\theta\left(X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{e^{i\lambda\left(X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}\right)}}{\lambda-i\varepsilon}d\lambda$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int\frac{e^{-i\lambda\left(X_0-Y_0+\frac{x_0-y_0}{2}\right)}}{\lambda+i\varepsilon}d\lambda. \tag{9}$$

(iii) 再看广义函数,例如 $f_{cd}\left(X+\frac{x}{2}-Y-\frac{y}{2}\right)$. 按照广义函数的定理[4], 凡是一个广义函数 $f(x)$, 如果它满足条件 $f(x)=0$ (当 $x\neq x_0$), 就具有如下形式:

$$f(x)=\alpha_0\delta(x-x_0)+\alpha_1\delta'(x-x_0)+\cdots+\alpha_k\delta^{(k)}(x-x_0). \tag{10}$$

(k 是有限正整数).

可以把这个定理应用到四个变数的情况: 即由于在 $X+\frac{x}{2}-Y-\frac{y}{2}\neq 0$ 时, 广义函数 $f_{cd}\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)=0$. 所以广义函数 $f_{cd}\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)$具有如下形式:

$$f_{cd}\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=\sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=0}^{k}\alpha_{cd,\kappa\lambda\mu\nu}\frac{\partial^\kappa}{\partial X_1^\kappa}\frac{\partial^\lambda}{\partial X_2^\lambda}\frac{\partial^\mu}{\partial X_3^\mu}\frac{\partial^\nu}{\partial X_0^\nu}\delta^4\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\sum_{\kappa,\lambda,\mu,\nu=0}^{k}\alpha_{cd,\kappa\lambda\mu\nu}(ip_1)^\kappa(ip_2)^\lambda(ip_3)^\mu(-ip_0)^\nu e^{ip\left(X-Y+\frac{x-y}{2}\right)} \tag{11}$$

这里 k 是有限的正整数, 所以(11)式中出现的是 p_1, p_2, p_3, p_0 的多项式, 没有 p 的极点, 而 θ 函数则提供了 p_0 的极点(见(9)式).

由此可见，(6)式中的每一项的 X 和 Y 都可以转移到指数上去，而且在指数上是线性相加的．于是，代入(4)式(当然，由于弱收敛，(4)式左右也要夹上 $\langle a|$ 和 $|b\rangle$)以后，X 和 Y 仍只在指数上出现，而且是线性相加的 $\left(\vec{\Box}_X\right.$ 和 $\vec{\Box}_Y$ 以及 $\frac{\vec{\partial}}{\partial X_0}$ 和 $\frac{\vec{\partial}}{\partial Y_0}$ 都只含有各有关的能量动量的线性组合，不含有 X 和 $\left.Y\right)$，所以夹上 $\langle a|$ 和 $|b\rangle$ 后，(4)式是一个求和，其中每一项终于呈现如下形式：

$$
\begin{aligned}
&\left(\int d^4X\int d^4Y-\int d^4Y\int d^4X\right)\\
&\cdot\int d^4x d^4x' d^4y d^4y' F(x,x',y,y',a,b,k,q,\cdots n_i,\cdots p_j\cdots\lambda_l\cdots)\\
&\cdot e^{iAX}\cdot e^{iBY}\cdot\prod_i dn_i\prod_j dp_j\prod_l d\lambda_l
\end{aligned}
\tag{12}
$$

其中 n_i 是谱条件给出的中间态能量动量，p_j 来自微观因果律要求的等时项，λ_l 来自编时 θ 函数．它们都是实数．A 和 B 又分别是 a，b，k，q，n_i，p_j，λ_l 的实系数线性叠加，所以 A，B 也都是实数．所以(12)对 $\left(\int d^4X\int d^4Y-\int d^4Y\int d^4X\right)$ 积分后得：

$$
\begin{aligned}
&\int d^4x d^4x' d^4y d^4y' F(x,x',y,y',a,b,k,q,\cdots n_i\cdots p_j\cdots\lambda_l)\\
&\cdot[(2\pi)^8](\delta^4(A)\delta^4(B)-\delta^4(B)\delta^4(A))\prod_i dn_i\prod_j dp_j\prod_l d\lambda_l=0
\end{aligned}
$$

即交换 X，Y 积分次序不影响积分值．

同样的证明也适用于(5)式，以及包含更多个“基本”场的复合场的类似恒等式．

感谢何祚庥、冼鼎昌两同志的有益的讨论．

参　考　文　献

[1] 何祚庥、黄涛，物理学报 **23** (1974)，113.

[2] W. Zimmermann, Nuovo. Cimento., **10** (1958), 597.

[3] D. Lurié, Particles and Fields, 1968. Interscience Publishers; J. Bjorken. S. Drell, Relativistic Quantum Fields, 1965, McGraw-Hill Book Co.

[4] J. 米库辛斯基，R. 西拜尔斯基，广义函数的基本理论，1960 年，人民教育出版社(转译自俄译本).

A PROOF OF TWO IDENTITIES CONCERNING THE INTERCHANGE IN THE ORDER OF INTEGRATIONS

WANG RONG
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Assuming microcausality and weak operator convergence, a simple proof of two identities in the composite field theory concerning the interchange in the order of integrations is given.