

氘核的相对论波函数

余友文 吴慧芳

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

假设氘核的相对论波函数满足场论中的 Bethe-Salpeter 方程,在质心系瞬时作用的近似下推导了氘核波函数所满足的耦合方程,并简单的讨论了氘核波函数的一些性质。瞬时作用的引进给波函数的旋量结构以很强的限制使波函数分量的数目减少了,并且把求解四维空间 B-S 方程的问题化为在质心系三维空间中的求解。物理意义明确便于计算和讨论。定性估计给出与 S 波相比 P 波约是 $\frac{1}{2} \left| \frac{p}{m} \right|^2$ 量级的一个小量。

一、引 言

在原子核物理中怎样来考虑相对论效应,这是一个很有趣但又没有很好解决的问题。由于氘核的结构简单,它又是一个研究带电粒子被中子散射时最合适的靶,实验现象也较为丰富,因此我们先来研究氘核的相对论波函数。原则上讲氘核的相对论波函数应该由中子-质子相互作用的运动方程中解出来。但是,对于这么一个束缚态体系它们到底满足怎样的运动方程并不清楚。有几种不同的处理方法,其中有一种是假设氘核波函数满足量子场论中的 Bethe-Salpeter 方程^[1],以后简称为 B-S 方程。由于在相对论处理中,空间是四维的,旋量结构比较复杂,并且核子间的强相互作用也还不够清楚,因此 B-S 方程的求解远比非相对论的氘核波函数的求解要复杂得多。在参考文献[2]中,他们用 B-S 方程,在梯形图近似以及一个核子在质壳等近似条件下,讨论了氘核的相对论波函数的一些性质。我们也试图用场论中的 B-S 方程,结合一定的物理考虑,在瞬时作用的近似下^[3],来讨论氘核波函数的某些性质。在本文的第二部分我们将给出在瞬时作用条件下氘核波函数所满足的耦合方程。在瞬时作用条件下,相互作用势就变为一般三维空间而与第四分量无关的势了。因此波函数可用通常的球函数和矢量球函数展开,各项的物理意义明确,便于分析讨论。在本文的第三部分,我们从耦合方程出发,对氘核波函数进行了一些讨论。

二、瞬时作用条件下氘核波函数的耦合方程

1. 氘核波函数所满足的 B-S 方程

本文1978年8月5日收到。

在动量表象中,氘核结构波函数 $\chi_p(p)$ 满足的 B-S 方程可表为

$$(i\hat{p}_1 + m_1) \chi_p(p) (i\hat{p}_2 + m_2)^T = \Gamma_p(p), \quad (1)$$

$$\Gamma_p(p) = \sum_i \Gamma_i(P, p),$$

$$\Gamma_i(P, p) = \frac{1}{2\pi i} \int d p' U_i(P; p p') \Gamma_i \chi_p(p') \Gamma_i^T. \quad (2)$$

其中 p_1, p_2 分别为二个核子的四动量, m_1, m_2 分别为二个核子的质量, P 为氘核的四动量, p 为二个核子的相对四动量, 左上角的标号“ T ”表示矩阵的转置. $\Gamma_p(p)$ 为顶角函数, Γ_i 为表示相互作用耦合形式的 Dirac 矩阵, 在这儿我们只考虑标量、赝标、矢量、赝矢、张量这样五种耦合形式, 并且假设相互作用是对角耦合的形式. $U_i(P; p p')$ 可理解为 i 型作用的等效相互作用.

在参考文献[3]中,他们用瞬时作用近似探讨了由一对正反层子构成的介子结构波函数. 现在我们把瞬时作用近似用来讨论由一对核子组成的氘核结构波函数. 所谓瞬时相互作用就是说氘核中两个核子在质心系中相互作用的传播是瞬时的,即

$$U(x, x') = U(x) \delta(x - x') \delta(t). \quad (3)$$

x, x' 是指二个核子的相对坐标. 我们知道在氘核中核子间的相对运动速度是较小的, 因此瞬时假定可能是一个较好的近似. 在[3]中已指出, 在瞬时作用的假定下,

$$U(P; p p') = U(P; \mathbf{p} \mathbf{p}'), \quad (4)$$

即 U 是三维动量的函数而与四维 p_0 无关. 把(4)代入(1)式, 定义质心系三维波函数 $\phi_p(\mathbf{p})$ 为

$$\phi_p(\mathbf{p}) = \int d p_0 \chi_p(p). \quad (5)$$

略去两个核子的质量差并对 p_0 求积分, 最后可得到

$$\begin{aligned} \phi_p(\mathbf{p}) = \frac{\pi i}{E(4E^2 - m_d^2)} [2 B_1 \Gamma_p(\mathbf{p}) B_2^T + 2 E^2 \gamma_4 \Gamma_p(\mathbf{p}) \gamma_4 \\ + m_d \gamma_4 \Gamma_p(\mathbf{p}) B_2^T + m_d B_1 \Gamma_p(\mathbf{p}) \gamma_4]. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad B_1 = m - i\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad B_2 = m + i\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \\ E^2 = \mathbf{u}^2 + p^2, \quad m \equiv m_1 = m_2, \end{aligned} \quad (7)$$

m_d 为氘核的质量.

从(6)出发, 可以证明 $\phi_p(\mathbf{p})$ 还应满足下列方程

$$B_1 \gamma_4 \phi_p(\mathbf{p}) C + \phi_p(\mathbf{p}) C \gamma_4 B_1 = 0, \quad (8)$$

式中 $C = i\gamma_2 \gamma_4$ 是电荷共轭算符. (8)式称为瞬时相互作用条件, 它将对波函数旋量结构加以很强的限制. (6)式和(8)式与参考文献[3]中的(2.4)式和(2.5)式形式上是相似的.

2. 氘核波函数的一般形式

在参考文献[3]中给出了 1^- 介子波函数的形式. 1^- 介子态是由一对正、反层子构成的负宇称态, 而我们这儿讨论的氘核基态 1^+ 状态是一个由一对核子组成的正宇称态, 波函数所满足的时空对称条件和旋量结构对这两种情况是不同的, 因此波函数也是不同的. 类

似于 1^- 介子态的讨论, 可以把 $\phi_P(\mathbf{p})$ 按 16 个独立的 γ 矩阵作展开, 可以得到满足空间反射变换正宇称态波函数的普遍形式为,

$$\phi_P(\mathbf{p}) = iAC + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma}C + F\gamma_4C + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}\gamma_5C + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma}\gamma_4C + H^i\gamma_i\gamma_5C, \quad (9)$$

利用瞬时条件(8)式, 则质心系的三维波函数 $\phi_P(\mathbf{p})$ 可简化为

$$\phi_P(\mathbf{p}) = iAC + \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\gamma}C + \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\gamma}\gamma_5C + \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\gamma}\gamma_4C. \quad (10)$$

由此可见, 瞬时条件使波函数的旋量结构受到很大限制, 这将使计算量大为减少便于分析和讨论.

3. 氘核波函数满足的耦合方程

把(10)式代入(6)式, 按 γ 矩阵可以分解为下面四个耦合方程组:

$$A = \frac{1}{E(4E^2 - m_d^2)} [-2\mathbf{p}^2U^aA - 2m\mathbf{p} \cdot U^b\mathbf{B} + m_d\mathbf{p} \cdot U^c\mathbf{G}], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B = \frac{1}{E(4E^2 - m_d^2)} [2E^2U^b\mathbf{B} - 2\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot U^b\mathbf{B}) + 2m\mathbf{p}U^aA \\ - im_d(\mathbf{p} \times U^d\mathbf{D}) - mm_dU^c\mathbf{G}], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{E(4E^2 - m_d^2)} [im_d\mathbf{p} \times U^b\mathbf{B} - \mathbf{p}^2U^d\mathbf{D} + 2\mathbf{p}\mathbf{p} \cdot U^d\mathbf{D} \\ - i2m(\mathbf{p} \times U^c\mathbf{G})], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} G = \frac{1}{E(4E^2 - m_d^2)} [-m_d\mathbf{p}U^aA - m_d m U^b\mathbf{B} + i2m(\mathbf{p} \times U^d\mathbf{D}) \\ + 2m^2U^c\mathbf{G} + 2\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot U^c\mathbf{G})]. \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$U^a = U_s + U_p - 4U_v + 4U_A - 12U_T,$$

$$U^b = U_s - U_p + 2U_v + 2U_A,$$

$$U^d = U_s - U_p - 2U_v - 2U_A,$$

$$U^c = U_s + U_p + 4U_T, \quad (15)$$

$$U_i\phi_P(\mathbf{p}) = \int d^3p' U_i(P; \mathbf{p}\mathbf{p}') \phi_P(\mathbf{p}') = U_i(\mathbf{x}) \phi_P(\mathbf{p}). \quad (16)$$

$U_i(\mathbf{x})$ 是 $U_i(P; \mathbf{p}\mathbf{p}')$ 座标表象的位势, $\mathbf{x} = i \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$ 其只作用在波函数 $\phi_P(\mathbf{p})$ 上. 瞬时条件使方程成为四个三维空间的耦合方程了. 在具体计算时可以把 U_i 选为一个等效的唯象势, 这相当于包括了比梯形近似更多的图形.

4. $\phi_P(\mathbf{p})$ 的球面波展开

为了能更清楚地看到各分波在整个波函数中的地位, 我们把 $\phi_P(\mathbf{p})$ 用通常的球函数和矢量球函数展开

$$A(\mathbf{p}) = \sum_{JM} A(p; JM) Y_{JM}(Q_p), \quad (17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}) = \sum_{JLM} B(p; JLM) \mathbf{Y}_{JLM}(Q_p), \quad (18)$$

同理, \mathbf{D} , \mathbf{G} 可按照(18)式展开. Y_{JM} 是球函数; \mathbf{Y}_{JLM} 是矢量球函数; L 是轨道角动量; J , M 分别是总角动量和它的投影; \mathbf{Y}_{JLM} 的定义是:

$$Y_{JLM}(Q_p) = \sum_{\mu} C_{LM-\mu, \mu}^{JM} Y_{LM-\mu}(Q_p) \xi_{\mu}, \quad (19)$$

其中 ξ_{μ} 是球基矢量。设 $U_i(P, \mathbf{p}\mathbf{p}')$ 是球对称的标量函数, 因此可把 U_i 展成

$$U_i(P; \mathbf{p}\mathbf{p}') = \sum_{\lambda\mu} \Delta_i^{\lambda}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') Y_{\lambda\mu}(Q_p) Y_{\lambda\mu}^*(Q_{p'}), \quad (20)$$

利用球函数和矢量球函数的正交归一性, 由(11)–(14)式不难得到 A, B, D, G 各分波所满足的耦合方程。总角动量 J 及其投影量子数都是好的量子数, 对于 1^+ 态, 有贡献的分波共有六个

$B(p; 12M), B(p; 10M), G(p; 12M), G(p; 10M), A(p; 1M), D(p; 11M)$. (21) 为书写方便起见用 $A_{\lambda}(pM), \lambda = 1, 2, \dots, 6$ 依次表示(21)式的各分波, 以 $\Delta_{\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \mu = 1, 2, \dots, 6$ 分别表示 $\Delta_1^1(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \Delta_0^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \Delta_2^2(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \Delta_0^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \Delta_1^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \Delta_2^3(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. 在作了这些规定后可把各分波满足的耦合方程表为

$$A_{\lambda}(p; M) = \alpha \sum_{\mu} K_{\lambda\mu}(\mathbf{p}) \int_0^{\infty} p'^2 \Delta_{\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A_{\mu}(p'; M) dp' = \alpha \sum_{\mu} K_{\lambda\mu}(\mathbf{p}) I_{\mu}, \quad (22)$$

$$I_{\mu} = \int_0^{\infty} p'^2 \Delta_{\mu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') A_{\mu}(p'; M) dp'. \quad (23)$$

其中 $\alpha = [E(4E^2 - m_d^2)]^{-1}, \lambda, \mu = 1, 2, \dots, 6, K_{\lambda\mu}$ 是

$$K_{11} = 2E^2 - \frac{4}{3} p^2, \quad K_{12} = \frac{2}{3} \sqrt{2} p^2, \quad K_{13} = -mm_d,$$

$$K_{14} = 0, \quad K_{15} = -2\sqrt{\frac{2}{3}} m|\mathbf{p}|, \quad K_{16} = \frac{1}{\sqrt{3}} m_d |\mathbf{p}|,$$

$$K_{21} = \frac{2}{3} \sqrt{2} p^2, \quad K_{22} = 2E^2 - \frac{2}{3} p^2, \quad K_{23} = 0,$$

$$K_{24} = -mm_d, \quad K_{25} = \frac{2}{\sqrt{3}} m|\mathbf{p}|, \quad K_{26} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_d |\mathbf{p}|,$$

$$K_{31} = -mm_d, \quad K_{32} = 0, \quad K_{33} = 2m^2 + \frac{4}{3} p^2,$$

$$K_{34} = -\frac{2}{3} \sqrt{2} p^2, \quad K_{35} = \sqrt{\frac{2}{3}} m_d |\mathbf{p}|, \quad K_{36} = -\frac{2}{\sqrt{3}} m|\mathbf{p}|,$$

$$K_{41} = 0, \quad K_{42} = -mm_d, \quad K_{43} = -\frac{2}{3} \sqrt{2} p^2,$$

$$K_{44} = 2m^2 + \frac{2}{3} p^2, \quad K_{45} = -\frac{1}{\sqrt{3}} m_d |\mathbf{p}|, \quad K_{46} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2} m|\mathbf{p}|,$$

$$K_{51} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} m|\mathbf{p}|, \quad K_{52} = -\frac{2}{\sqrt{3}} m|\mathbf{p}|, \quad K_{53} = -\sqrt{\frac{2}{3}} m_d |\mathbf{p}|,$$

$$K_{54} = \frac{1}{\sqrt{3}} m_d |\mathbf{p}|, \quad K_{55} = -2p^2, \quad K_{56} = 0,$$

$$K_{61} = -\frac{1}{\sqrt{3}} m_d |\mathbf{p}|, \quad K_{62} = -\sqrt{\frac{2}{3}} m_d |\mathbf{p}|, \quad K_{63} = \frac{2}{\sqrt{3}} m|\mathbf{p}|,$$

$$K_{64} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{2} m |\mathbf{p}|, \quad K_{65} = 0, \quad K_{66} = -\mathbf{p}^2.$$

三、氘核基态波函数的简单讨论

结合一定的物理考虑, 简单的讨论波函数的一些性质.

1. 从耦合方程(11)–(14)可看到, 在 A, B, D, G 中只有一项不为零的解是不存在的. 两项为零两项不为零的解中只有 B, G 不为零, A, D 为零的解才是允许的. 在球面分波中可看到只有 B, G 中的 S 和 d 分波和 A, D 中的 P 分波对 1^+ 态有贡献, 因此只有 S 和 d 分波, 而 P 分波为零的解是可能的, 这与非相对论极限是一致的, P 波的存在是相对论效应的结果, 它没有非相对论对应.

2. P 波贡献的估计

从耦合方程(22)可看到, 各项的大小是由二个因子 $K_{i\mu}$ 和 I_μ 决定的. 对于 $K_{i\mu}$, 由于核子间的相对运动动量较小, 可以认为 $\frac{|\mathbf{p}|}{m}$ 比 1 要小得多. 对于 I_μ , 它是波函数 $A_\mu(\mathbf{p}')$ 与 U_i 展开式中径向部分 $\Delta_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ 乘积的积分. 对氘核在波函数的各分波中 S 波总是主要的分量, 同时展开式(20)中的 $\Delta_\mu(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, 低次波总是主要的, 因此可以认为 I_2, I_4 将比 I_1, I_3, I_5, I_6 大得多. 在作了上述两点考虑后, 我们可以近似估计 P 波的大小. 由(22)式, A_2, A_4 可近似写成

$$\begin{aligned} A_2 &= \alpha [2m^2 I_2 - mm_d I_4], \\ A_4 &= \alpha [-mm_d I_2 + 2m^2 I_4], \end{aligned} \quad (24)$$

消去 I_4 , 则有

$$2m A_2 + m_d A_4 = \alpha m [4m^2 - m_d^2] I_2.$$

由于氘核的结合能较小, $m_d \sim 2m$, 所以

$$2m A_2 + m_d A_4 \sim 2m (A_2 + A_4) \sim 0,$$

由此得到

$$A_2 \cong -A_4. \quad (25)$$

另外, 对 A_5, A_6 近似有

$$\begin{cases} A_5 \cong \alpha \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{3}} [-2m I_2 + m_d I_4] = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{|\mathbf{p}|}{m} A_2, \\ A_6 \cong \alpha \sqrt{\frac{2}{3}} |\mathbf{p}| [-m_d I_2 + 2m I_4] = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|\mathbf{p}|}{m} A_4 \cong -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|\mathbf{p}|}{m} A_2, \\ A_5 \cong \sqrt{2} A_6. \end{cases} \quad (26)$$

这个结果告诉我们 A_5, A_6 是同量级的, 但是与 S 波比较它们是个 $\frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}|^2}{m}$ 量级的一一个小量. 随着 \mathbf{p} 的增大 P 波的比例将增大. P 波在整个波函数中所占的比例虽然较小, 但它在氘核内部集中有比较大的几率, 因此对某些现象可能会起比较大的影响. 尤其是

当 p 较大时相对论的效应就更不能忽略了。当然,当 $\frac{|p|}{m} \sim 1$ 时上式并不正确,但可想像到此时 P 波的比例将大大增加, P 波的效应也将更明显地显示出来。

对于 d 波,它的关系式没有这样明显,在非相对论处理中它约是 S 波的 4%,在相对论处理中将会有所变化。但由于 $\frac{|p|}{m}$ 较小, d 波的比例可能不会改变很大。

3. 由(12)和(14)略去 $\frac{|p|}{m}$ 以后的项,则

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \alpha [2m^2 U^b \mathbf{B} - mm_d U^s \mathbf{G}], \\ \mathbf{G} &= \alpha [-mm_d U^b \mathbf{B} + 2m^2 U^s \mathbf{G}]. \end{aligned}$$

消去 $U^s \mathbf{G}$, 利用 $m_d \sim 2m$, 则有

$$2m \mathbf{B} + m_d \mathbf{G} \cong 2m (\mathbf{B} + \mathbf{G}) = 0, \quad \mathbf{B} \cong -\mathbf{G}, \quad (27)$$

以此代入(11),并略去小项近似有

$$(U^b + U^s) \mathbf{B} = (2U_s + 2U_v + 2U_A + 4U_T) \mathbf{B} \cong 0. \quad (28)$$

这个关系式告诉我们如果结合成氦核主要是由一种耦合相互作用项起主要作用的话,那么这个作用就是赝标作用,否则其它几类作用应同时出现,并且近似有(28)式。

4. \mathbf{B}, \mathbf{G} 所满足的近似方程式

若略去 P 波 A, D , 则由(12)和(14)可得到 \mathbf{G}, \mathbf{B} 所满足的方程

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \alpha [2E^2 U^b \mathbf{B} - 2\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot U^b \mathbf{B}) - mm_d U^s \mathbf{G}], \\ \mathbf{G} &= \alpha [2m^2 U^s \mathbf{G} + 2\mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot U^s \mathbf{G}) - mm_d U^b \mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (29)$$

并且由(11)知

$$2m \mathbf{p} \cdot U^b \mathbf{B} = m_d \mathbf{p} \cdot U^s \mathbf{G},$$

利用此式,立即得到下列方程组

$$\begin{aligned} \left(2m - \frac{m}{E} U^b\right) \mathbf{B} &= -m_d \mathbf{G}, \\ \left[\frac{2E^2}{m} - \frac{m}{E} U^s - \frac{1}{Em} \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot U^s)\right] \mathbf{G} &= -m_d \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (30)$$

消去 \mathbf{G} , 并以 $m_d = 2m - B$ 代入, B 为氦核结合能,则得 \mathbf{B} 所满足的方程式

$$\begin{aligned} \left[\frac{2E^2}{m} - \frac{m}{E} U^s - \frac{1}{Em} \mathbf{p}(\mathbf{p} \cdot U^s)\right] \left(2 - \frac{1}{E} U^b\right) \mathbf{B} &= \left(4m - 4B + \frac{B^2}{m}\right) \mathbf{B} \\ &\cong (4m - 4B) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (31)$$

式中 $E = \sqrt{m^2 + p^2}$, 对方程可按 $\frac{p^2}{m^2}$ 作小量展开,取到 p^2 项为止,这样就得到了 \mathbf{B} 所满足的方程。原则上只要给定了 U^s 和 U^b 则就可以求解 \mathbf{B} 和 \mathbf{G} 。并与非相对论薛定格方程的解相比较。为了得到一些定量的知识则须求解耦合方程(22)。

瞬时近似使得波函数和相互作用都是三维空间的量了,既简化了公式也使得它们的物理意义更为清楚,这在具体计算时是很有好处的。但是为了要得到一些定量的结果则需要求解耦合方程(22)式,我们将在以后的工作中再来研究它。本文仅以氦核为例推导了在瞬时作用下相对论波函数所满足的耦合方程,并且对波函数进行了一些定性的分析。

但是这个方法并不限于讨论氘核的相对论波函数，它可以推广来讨论相对运动速度不是很大的其它物理问题，至少它可以提供一个质心系中较好的近似波函数。

作者感谢何祚庠、黄涛同志有益的讨论。

参 考 文 献

- [1] E. E. Salpeter and H. H. Bethe, *Phys. Rev.*, 84(1951), 1232.
- [2] E. A. Remler, *Nucl. Phys.*, B42(1972), 56,
M. Gourdin, J. Tran Thanh Van, *Nuovo Cimento.*, 18(1960), 443.
- [3] 北京大学物理系基本粒子理论组, *物理学报*, 25 (1976), 316.

THE RELATIVISTIC DEUTERON WAVE FUNCTION

YU YOU-WEN WU HUI-FANG

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

Starting from the Bethe-Salpeter equation, the coupled equations for the bound states of the deuteron may be reduced to the ordinary three dimensional ones and the number of the components of the wave function is decreased by using the approximation of the instantaneous interaction in the center of mass system. The wave functions of the deuteron are expanded in terms of the spherical and the vector spherical harmonics and the radial coupling integral equations are obtained. Some properties of the deuteron wave functions are discussed also. Qualitative estimations indicate that the relative ratio of the probability of P wave to that of S wave is about the order of

$$\frac{1}{2} \left| \frac{p}{m} \right|^2$$