

弱耦合近似下量子色动力学中层子传播函数 Schwinger-Dyson 方程及其解

周咸建 薛丕友

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文在弱耦合近似下,讨论了四维 QCD 中层子传播函数及层子禁闭性问题。我们证明:在选取 Landau 规范后,可以把所得到的层子传播函数满足的 Schwinger-Dyson 积分方程,化成非常简洁的形式。然后把它化成非线性一阶微分方程。由此得到两类解,其中一类解相应于层子的禁闭解,另一类解是不禁闭层子的。

我们用泛函方法计算和讨论了 QCD 中有效势,即计算相应于这两类解的基态能量,在我们这种近似下,对基态能量有贡献的真空图算到二圈图,四维 QCD 中层子传播函数的解中,不禁闭的解看来是现实的。

一、引 言

量子色动力学(QCD)理论是一种描述强相互作用的规范理论。最近的实验与理论分析表明,无争疑的实验结果与 QCD 的理论不矛盾。因此, QCD 作为强相互作用理论的一个可能候选者而引起了人们的重视。

虽然 QCD 与量子电动力学(QED)都是一种规范理论,但是,由于 QCD 是一种非阿贝尔规范理论,“色群” $SU_c(3)$ 的生成元不可对易性以及色胶子具有非线性自相互作用,使得 QCD 比 QED 复杂得多。许多研究者^[1-3]在大的 $1/N$ 拓扑展开下,对 $1+1$ 维 QCD 中层子传播函数作了许多讨论,并求得了层子传播函数的解析表达式,由此讨论了 QCD 红外结构及层子禁闭性等问题。

本文是在弱耦合近似下,讨论四维 QCD 中层子传播函数以及层子禁闭性问题。我们首先写出 QCD 中关于层子传播函数的 Schwinger-Dyson 方程。然后引入弱耦合近似,得到了层子传播函数所满足的 Schwinger-Dyson 方程。我们证明:在选取 Landau 规范后,这一积分方程化成非常简洁形式。然后通过四维的 Laplace 算子作用,把这个简洁的非线性积分方程化成了非线性一阶微分方程。由此可以得到层子传播函数的两类解。其中

一类解相应于层子的禁闭解,另一类解是不禁闭层子的。为了确定,究竟那一类解在自然界中是现实的,我们用泛函方法计算和讨论了 QCD 中有效势,即计算相应于这两个解的基态能量,因为理论的真正基态,相应于有效势为绝对极小值。值得指出,虽然用泛函方法计算标量场的有效势已有许多工作,但是 QCD 中有效势讨论还尚未见到过。

计算和讨论表明,在我们这种近似下,对基态能量有贡献的真空图算到二圈图,四维 QCD 中层子传播函数的解中,不禁闭的解是现实的。

二、层子传播函数在弱耦合近似下所满足的积分方程

由 N 个“味”的夸克通过 $SU_c(3)$ “色规范群”相互作用的 QCD 拉氏密度为:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \bar{\psi}^A (i\gamma^\mu D_\mu - M_0^A) \psi^A + \mathcal{L}_{g,f} + \mathcal{L}_g, \quad (2.1)$$

其中 $a = 1, 2, \dots, 8$; $A = 1, 2, \dots, N$ 。而每一种“味”层子有三种不同的“色”,构成 $SU_c(3)$ 的基础表示,我们用列矩阵表示:

$$\psi^A \equiv \begin{pmatrix} \psi_1^A \\ \psi_2^A \\ \psi_3^A \end{pmatrix},$$

其中 ψ_j^A 是带色荷为 j 的层子 Dirac 旋量, $j = 1, 2, 3$ 。

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.2)$$

规范协变导数为:

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a, \quad (2.3)$$

λ^a 是 $SU_c(3)$ 矩阵,它满足

$$[\lambda^a, \lambda^b] = 2if^{abc}\lambda^c, \quad (2.4)$$

f^{abc} 是 $SU_c(3)$ 群的结构常数。

$\mathcal{L}_{g,f}$ 是规范确定项,我们选为:

$$\mathcal{L}_{g,f} = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^{\mu a})^2, \quad (2.5)$$

式中 α 是规范确定参数。

\mathcal{L}_g 为 Faddeev-Popov 鬼态项:

$$\mathcal{L}_g = -\partial_\mu C_a^+ \partial^\mu C_a + g f^{abc} (\partial^\mu C^{+a}) \cdot C^b A_\mu^c, \quad (2.6)$$

这里我们按惯例,重复指标代表对该指标求和。

为了简单,但对于本文讨论仍不失一般性,我们假定 QCD 中只有一种“味”层子。即下文中,我们将略去(1.1)式中的“味”指标 A 。

定义 QCD 中层子传播函数

$$iS_F^j(x-y) = \langle 0 | T \{ \psi^j(x) \bar{\psi}^j(y) \} | 0 \rangle,$$

或简写成矩阵形式

$$iS_F(x-y) = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle. \quad (2.7)$$

用类似于 QED 中定义固有自能图和非固有自能图方法, 我们用图 1 表示层子完全传播函数 $iS_F(p)$ (即 $iS_F(x-y)$ 在动量空间的表示), 而层子的固有自能部份或质量算符 ($-i\Sigma(p)$) 用图 2 表示.



图 1 完全层子传播函数



图 2 层子质量算符

同样, 用图 3 表示胶子的完全传播函数 $iD_F(p)$. 用图 4 表示层子与胶子相互作用 (截腿) 的固有顶角 $ig\Gamma_\mu^a(p', p)$, 其最低次微扰为 $\frac{ig}{2}\lambda^a\gamma^\mu$.



图 3 胶子完全传播函数

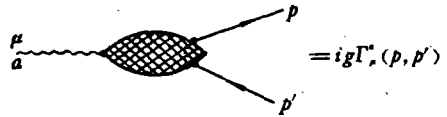


图 4 层子与胶子(截腿)固有顶角

则我们用文献[4]中讨论 QED 的类似方法, 可以得到层子固有自能所满足的 Schwinger-Dyson 积分方程(见图 5).

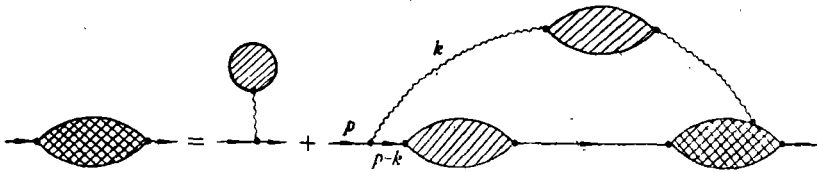


图 5 Schwinger-Dyson 方程

其中 M_0 是层子质量参数矩阵.

图 5 中第一项为“蝌蚪”图, 相应的传播函数在坐标空间为:

$$S'_{mn}(y-x) = \int d^4z S_F^0(y-z) \left(ig\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \right) S_F^0(z-x) \langle 0 | A_\mu^a(x) | 0 \rangle.$$

则利用 $A_\mu^a(x)$ 平移不变性, 并作 Fourier 变换, 可以算得蝌蚪图在动量表象空间去腿后的贡献为

$$(2\pi)^4 (ig)\gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} \langle 0 | A_\mu^a(0) | 0 \rangle.$$

于是我们可以写出层子传播函数所满足的 Schwinger-Dyson 方程为

$$-i\Sigma(p) = ig(2\pi)^4 \frac{\lambda^a}{2} \gamma^\mu \langle 0 | A_\mu^a(0) | 0 \rangle + \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k D_{F,\mu\nu}^{ab}(k) \Gamma^{\mu\nu}(p-k, p) S_F(p-k) \sigma^b \gamma^\nu, \quad (2.8)$$

这里为了下面方便,使 $\sigma = \lambda^2/2$. 式(2.8)中 $S_F(p)$ 与质量算符 $\Sigma(p)$ 关系是显然的(见图6).

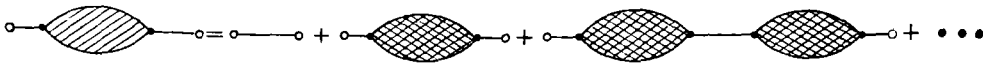


图6 $S_F(p)$ 与 $\Sigma(p)$ 间关系

即有

$$iS_F(p) = \frac{i}{S_F^0(p) - \Sigma(p)},$$

$$S_F^0(p) = \frac{1}{p - M_0}. \quad (2.9)$$

与(2.8)式类似,还有 Γ^μ 和 $D_{F\mu\nu}^{ab}$ 所满足的积分方程^[5],比较复杂,这里就不写出来了.但是,如果我们假定:QCD中的 g 是一个小量,亦即取弱耦合近似,把(2.8)中 $D_{F\mu\nu}^{ab}$ 和 Γ^μ 用最低次微扰近似表示式来代替:

$$D_{F\mu\nu}^{ab}(k) \rightarrow D_{F\mu\nu}^{0ab}(k) = (-1)\delta_{ab} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right], \quad (2.10)$$

$$\Gamma^\mu \rightarrow \sigma^\mu \gamma^\mu$$

式(2.10)中 α 与固定规范形式有关.这种弱耦合近似,在研究非阿贝尔规范理论动力学自发破缺中常用的^[6].

把(2.10)代入(2.8),则得到弱耦合近似下的四维 QCD Schwinger-Dyson 积分方程:

$$-i\Sigma(p) = ig(2\pi)^4 \sigma^\mu \gamma^\mu \langle 0 | A_\mu^a(0) | 0 \rangle$$

$$+ \frac{g^2}{(2\pi)^4} \int d^4k D_{F\mu\nu}^{0ab}(p-k) \gamma^\mu \sigma^\alpha S_F(k) \sigma^b \gamma^\nu. \quad (2.11)$$

再考虑到(2.9),这就是 $\Sigma(p)$ 所满足的非线性积分方程了.

令

$$M'_0 = M_0 - (2\pi)^4 g \sigma^\mu \gamma^\mu \langle 0 | A_\mu^a(0) | 0 \rangle$$

$$\Sigma'(p) = \Sigma(p) + M_0, \quad (2.12)$$

得到:

$$\Sigma'(p) = M'_0 - \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(p-k)^2 + i\epsilon} \left[g^{\mu\nu} - (1 - \alpha) \frac{(p-k)^\mu (p-k)^\nu}{(p-k)^2} \right]$$

$$\times \gamma_\mu \sigma^\alpha \frac{1}{p - \Sigma'(p)} \sigma^\alpha \gamma_\nu. \quad (2.13)$$

方程(2.13)与 QED 中类似方程^[7]的最大不同是:QCD 中 $\Sigma'(p)$ 是色空间的 3×3 矩阵,因而(2.13)相应应有 9 个方程,表面看来,是相当复杂的.但是,如果考虑到规范群没有自发破缺,由真空的 $SU(3)$ 不变性,可以得到 $\Sigma(p)$ 正比于色空间的单位矩阵.我们利用

$SU_c(3)$ 群生成元 $\sigma_i = \frac{1}{2} \lambda^i$ 满足

$$[\sigma_i, \sigma_j] = if_{ijk} \sigma_k,$$

并选取如下形式

$$\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j) = a \delta_{ij}$$

归一化后, 就可以推得两个等式:

$$\begin{aligned} f_{ijk} &= \frac{1}{a} \text{Tr}[\sigma_i \sigma_j \sigma_k - \sigma_k \sigma_j \sigma_i] \\ \frac{1}{a} (\sigma_i)_b^a (\sigma_i)_a^c &= \delta_a^c \delta_b^a - \frac{1}{3} \delta_b^a \delta_a^c, \end{aligned} \quad (2.14)$$

再利用 (2.14) 式也可以证明: $\Sigma'(p)$ 或 $S_F(p)$ 在色空间是色指标单位矩阵与某个因子的乘积:

$$[S_F(p)]_{ab} = K(p) \delta_{ab},$$

其中 $K(p)$ 是与色指标无关的因子.

因为 QCD 中任何矩阵元可以分成两个因子的乘积^[8], 一个是 $SU_c(3)$ 群中的权重因子, 它由各种 $(\sigma_i)_a^b$ 和 f_{ijk} 构成, 另一个因子来自内部动量积分. 这样对于 S_F 的任何一费曼图, 它总是由一条费米子线、一些费米子环线、其它粒子线和各种顶角组成. 对于费米子线而言, 出现 $\sigma_i \sigma_j \cdots \sigma_k$ 这样的乘积项; 对于费米子环线出现 $\text{Tr}(\sigma_l \cdots \sigma_m)$ 这样求迹项; 对于三胶子线、四胶子线、胶子线和鬼态线顶角出现的 f_{ijk} , 可以借助于 (2.14) 式, 化为 $\text{Tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k)$ 形式. 因此, 这个任意的 $S_F(p)$ 图, 从色指标矩阵来看, 必定是下面一些项的代数和:

$$(\sigma_i \sigma_j \cdots \sigma_k) \text{Tr}(\sigma_l \cdots \sigma_m) \text{Tr}(\sigma_n \cdots \sigma_s) \text{Tr}(\cdots) \cdots \quad (2.15)$$

考虑到该图中胶子线和鬼态线都是内线, 对每一条这样内线, 一定有一个相应的 δ_{ii} 出现, 所以 (2.15) 式的 a 行 b 列矩阵元为:

$$(\sigma_i)_b^a (\sigma_i)_a^c \cdots (\sigma_k)_f^g [(\sigma_l)_g^h \cdots (\sigma_m)_h^i] \cdots \quad (2.16)$$

矩阵指标每两个、两个求和.

再利用 (2.14) 2 式, (2.16) 就化成 δ 函数乘积的代数和:

$$c \delta_b^a \delta_c^b \cdots \delta_f^g \delta_h^f \cdots \delta_i^h \cdots \quad (2.17)$$

其中 c 是与色指标无关的常数. 这里的 δ 函数指标, 只有上标 a 和下标 f 不求和, 其余指标总是一个下标与一个上标求和. 于是 (2.17) 一定可以写成

$$c' \delta_f^a$$

由于 $S_F(p)$ 的群因子是形式为 (2.17) 的代数和, 结果一定可以写成 $c'' \delta_f^a$.

这样使我们的问题大大简化了. 因为 (2.13) 中, $\Sigma'(p)$ 在色空间是某常数乘单位矩阵, 而积分号内 $1/(p - \Sigma'(p))$ 也具有同样性质, 从色指标而言, 这就使方程被大大简化了.

根据 $S_F^{-1}(p)$ 的 Lorentz 变换性质和空间反演性质, 可以设:

$$\begin{aligned} S_F^{-1}(p) &= A(p^2)p - B(p^2) \\ \Sigma'(p) &= [A(p^2) - 1]p - B(p^2) \end{aligned} \quad (2.18)$$

这里 $A(p^2)$ 、 $B(p^2)$ 对色指标而言是单位矩阵乘某因子, 而且对 γ 矩阵而言, 也是单位矩阵乘某因子. 这样可以把 $A(p^2)$ 和 $B(p^2)$ 看作某个数, 把 (2.18) 代入 (2.13), 则方程 (2.13) 变为:

$$\begin{aligned}
& [A(p^2) - 1]p - B(p^2) \\
&= M'_0 - \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(p-k)^2} \left[g^{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{(p-k)^\mu(p-k)^\nu}{(p-k)^2} \right] \\
&\quad \times \gamma_\mu \sigma^\alpha \frac{1}{A(p^2)p - B(p^2)} \sigma^\alpha \gamma_\nu \\
&= M'_0 - \frac{4ig^2}{3(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{(p-k)^2} \left[g^{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{(p-k)^\mu(p-k)^\nu}{(p-k)^2} \right] \\
&\quad \times \gamma_\mu \frac{1}{A(p^2)p - B(p^2)} \gamma_\nu \tag{2.19}
\end{aligned}$$

注意, 这里 $M'_0 = M^0 + F_\mu \gamma^\mu$.

式中 $F_\mu \equiv -(2\pi)^4 g \sigma^\alpha \langle 0 | A_\mu^\alpha(0) | 0 \rangle$, 它是与 p_μ 无关的. 根据真空的 Lorentz 不变性和 A_μ 的变换性质, $\langle 0 | A_\mu^\alpha(0) | 0 \rangle = 0$, 所以 $F_\mu = 0$.

我们现在来证明, 当选取 Landau 规范后, 即在(2.13)中令

$$\alpha = 0, \tag{2.20}$$

则方程(2.19)中

$$A(p^2) = 1.$$

相对论告诉我们, 当 p_μ 为类空时, 总可以选择一个参考系, 或通过适当的 Lorentz 变换, 使得 $\mathbf{p} = 0$; 当 p_μ 为类时情形, 总可以选择参考系使得 $p_0 = p_2 = p_3 = 0$ 而 $p_1 \neq 0$.

先讨论(2.19)中 $\Sigma'(p)$ 的宗量 p 是类空情形. 作 Wick 转动, 把(2.19)中 k, p 视为四维欧氏空间矢量, 并取极坐标:

$$\begin{aligned}
k_1 &= |k| \sin \Phi \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\
k_2 &= |k| \sin \Phi \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\
k_3 &= |k| \sin \Phi \cdot \cos \theta \\
k_0 &= |k| \cos \Phi \tag{2.21}
\end{aligned}$$

此时可取 p 的方向与“0”指标方向一致, 则有

$$p = ip_0 \gamma_0$$

然后对 θ 和 ϕ 作积分, 并考虑到 γ^0 矩阵与 I (单位矩阵) 是线性无关的, 我们就可以得到如下二个方程:

$$\begin{aligned}
A'(p^2) &= 1 + \frac{g^2}{12\pi^4} \cdot \frac{1}{p} \int d^4k \left\{ \frac{A'(k^2)}{k^2 A'^2(k^2) + B'^2(k^2)} \cdot \frac{1}{(p-k)^4} \right. \\
&\quad \left. \times [(p^2 - 4pk \cos \Phi + 3k^2)k \cos \Phi + 2(pk \cos \Phi - k^2)p] \right\}, \tag{2.22}_1
\end{aligned}$$

$$B'(p^2) = M_0 + \frac{g^2}{4\pi^4} \int d^4k \frac{B'(k^2)}{k^2 A'^2(k^2) + B'^2(k^2)} \cdot \frac{1}{(p-k)^2}. \tag{2.22}_2$$

这样我们得到 Landau 型规范下, 层子所满足的 Schwinger-Dyson 方程为:

$$\begin{aligned}
A'(p^2) &= 1 + \frac{g^2}{12\pi^4} \frac{1}{p} \int d^4k \left\{ \frac{A'(k^2)}{k^2 A'^2(k^2) + B'^2(k^2)} \cdot \frac{1}{(p-k)^4} \right. \\
&\quad \left. \times [(p^2 - 4p \cdot k \cos \Phi + 3k^2)k^2 \cos \Phi + 2(p \cdot k \cos \Phi - k^2)p] \right\}, \tag{2.23}_1
\end{aligned}$$

$$B'(p^2) = M_0 + \frac{g^2}{4\pi^4} \int d^4k \frac{B'(k^2)}{k^2 A''(k^2) + B''(k^2)} \cdot \frac{1}{(p-k)^2}. \quad (2.23)_2$$

这里我们令

$$B'(p^2) = B(-p^2),$$

$$A'(p^2) = A(-p^2),$$

利用

$$\cos \Phi = \frac{1}{2p \cdot k} [(p^2 + k^2) - (p-k)^2]$$

和两个积分公式

$$\int_0^\pi \frac{2 \sin^2 \Phi \cos \Phi d\Phi}{(p-k)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \begin{cases} \frac{k}{p^3} & p > k \\ \frac{p}{k^3} & k > p, \end{cases}$$

和

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 \Phi d\Phi}{(p-k)^2} = \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{1}{p^2} & p > k \\ \frac{1}{k^2} & k > p, \end{cases}$$

经过一定的冗长计算, 可以算得(2.23)₁中积分为零. 于是我们有

$$A'(p^2) = 1 \quad (2.24)_1$$

$$B'(p^2) = M_0 + \frac{g^2}{4\pi^4} \int d^4q \frac{B'(q^2)}{q^2 + B''(q^2)} \cdot \frac{1}{(p-q)^2} \quad (2.24)_2$$

这就是在选取 Landau 型规范后, 弱耦合近似下的层子所满足的非常简洁的积分方程形式. 当然, 这仍然是很复杂的非线性积分方程. 在下一节, 我们进一步把它化成微分方程来求解.

三、 $B'(p)$ 所满足的微分方程及其解

由于四维 Laplace 算符

$$\square_p \equiv \sum_{i=0}^3 \frac{\partial^2}{p_i^2}$$

有如下性质:

$$\square_p \frac{1}{(p-q)^2} = -4\pi^2 \delta(p-q). \quad (3.1)$$

把(3.1)作用到(2.24)₂式两边得到

$$\square_p B'(p^2) = -3c' B'(p^2) / [p^2 + B''(p^2)], \quad (3.2)$$

$$c' = g^2 / 3\pi^2.$$

如果把 Laplace 算符只表示为 p 或 p^2 的函数, 很容易验证

$$\begin{aligned} \square_p &= \left(\frac{d}{dp}\right)^2 + \frac{3}{p} \frac{d}{dp} \\ &= 4p^2 \left(\frac{d}{dp^2}\right)^2 + 8 \frac{d}{dp^2}. \end{aligned}$$

方程(3.2)可以写成

$$\frac{d^2 B'(p^2)}{dp^2} + \frac{3}{p} \frac{dB'(p^2)}{dp} = \frac{-3cB'(p^2)}{p^2 + B'^2},$$

相应的边界条件是

$$\left. \begin{aligned} \lim_{p^2 \rightarrow \infty} \left[p^2 \frac{dB'}{dp^2} + B'(p^2) \right] &= M_0 \\ \lim_{p^2 \rightarrow 0} \left(p^4 \frac{dB'}{dp^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

作变量变换,可以把方程(3.2)化为一阶微分方程.

令

$$u(p) = B'(p^2)/p, \quad (3.4)$$

$$t = \ln p, \quad (3.5)$$

则方程(3.2)变为

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{4du}{dt} = -3u \left[1 + \frac{c'}{1+u^2} \right]. \quad (3.6)$$

再令

$$\frac{du}{dt} = g(u), \quad (3.7)$$

我们得到

$$g \frac{dg}{du} + 4g = -3u \left[1 + \frac{c'}{1+u^2} \right]. \quad (3.8)$$

相应地边界条件变为

$$\lim_{u \rightarrow 0} (g + 3u) = M_0, \quad (3.9)$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (g + u) = 0. \quad (3.10)$$

因为这个方程与文献[7]完全相同,我们将用文献[7]的结果对方程(3.8)作讨论.

由边界条件和所得方程,一个显然的解是: M_0 必须为零,而 $B'(p^2) = 0$, 这是正常的层子不禁闭的解.

另一类解,可以从求解非线性一阶微分方程(3.8)得到. 我们指出: 这个方程相当于特殊情况下的第二类阿贝尔方程.

作代换:

$$g(u) \rightarrow y(x),$$

令

$$f_0(x) = -3x \left[1 + \frac{c'}{1+x^2} \right],$$

则方程(3.8)可以写成

$$yy' = -4y + f_0(x).$$

此方程经过如下变换

$$y(x) = v(x) - 4x$$

后,可以化成

$$(v - 4x)v'(x) = f_0(x).$$

当 $x \neq 0$ 或 $1 + \frac{c'}{1+x^2} \neq 0$ (即 $f_0(x) \neq 0$) 时,

可以假设 $v(x) = \eta(\xi)$,

$$\xi = \int f_0(x) dx,$$

就得到

$$(\eta(\xi) - 4x(\xi))\eta'(\xi) = 1. \quad (3.11)$$

此方程虽然不能用初等积分求解, 但一定有另一个非平庸的解存在. 这另一个解, 文献 [7] 中已求得.

在 $p^2 > 0$ 的区域, 我们要求满足方程(3.8)、边界条件(3.9)和(3.10)的解, 这时存在着唯一的一个解. 但用 (3.7), 再求 $B'(p^2)$ 的解, 显然不是唯一的. 但是如果要求 $B'(p^2)$ 满足积分方程, 则 $B'(p^2)$ 是唯一确定的, 此解记为 $B'^{\infty}(p^2)$, 它的渐近形式为

$$B'^{\infty}(p^2) \underset{p^2 \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} p^{-1+\sqrt{1-3c'}} & c' \leq \frac{1}{3} \\ p^{-1} \cos(\sqrt{3c'-1} \ln p) & c' > \frac{1}{3} \end{cases} \quad (3.12)$$

$$B'^{\infty}(p^2) \underset{p^2 \rightarrow 0}{\sim} 1 - \frac{3}{8} c' p^2 - \frac{c'}{64} (3c' - 8) p^4 + \dots \quad (3.13)$$

在 $p^2 < 0$ 的区域, 方程(3.2)的解应满足在 $p^2 = 0$ 处与 $p^2 > 0$ 时的解平滑地连接.

这时令 $k^2 \equiv -p^2$, 作如下变量代换

$$u(k) = \frac{B'(-k^2)}{k}, \quad t = \ln k, \quad \frac{du}{dt} = g(u)$$

后, 可以得到一阶微分方程

$$g \frac{dg}{du} + 4g = -3u \left(1 + \frac{c'}{1-u^2} \right). \quad (3.14)$$

为了使得此方程的解在 $p^2 = 0$ 处与 $p^2 > 0$ 时的解 $B'^{\infty}(p^2)$ 平滑连接, 其解需满足边界条件

$$\lim_{u \rightarrow \infty} (g + u) = 0. \quad (3.15)$$

文献[7]中得到了满足(3.14)和(3.15)的唯一解, 并由此得到唯一的 $B'(p^2)$ 在 $p^2 < 0$ 时的解.

由方程(3.14)我们看到线 $|u| = 1$ 是 dg/du 的不依赖于 g 的奇异线. 因此 (3.14) 的每一解 $g(u)$ 或者是限制在 $|u| < 1$ 的区域, 或者是限制在 $|u| > 1$ 的区域, 而不会从一个区域越过 $|u| = 1$ 线到另一区域, 而满足(3.14)和(3.15)的唯一解是在 $|u| > 1$ 的区域内. 这样, 对于这个解有

$$u^2(k) = B''(-k^2)/k^2 > 1, \quad (k^2 > 0) \quad (3.16)$$

或

$$k^2 - B''(-k^2) < 0.$$

由(2.18), 并注意到 $B'(p^2) = B(-p^2)$, $A(p^2) = 1$, 层子传播函数

$$S_F(p) = \frac{1}{p - B'(-p^2)} = \frac{p + B'(-p^2)}{p^2 - B''(-p^2)}, \quad (3.17)$$

这样由(3.16)知,当 $p^2 > 0$ 时,亦即在类时区域内, $S_F(p)$ 不存在极点. 另外,由(3.13)知 $B'(0) \neq 0$, 这样,更有 $p^2 \geq 0$ 时, $S_F(p)$ 不存在极点. 这就意味着,夸克子不可能具有某个质量而自由存在,也就是夸克子是禁闭的.

这样我们得到了 $S_F(p)$ 的两个仅有的解: 一个是 $S_F(p) = \frac{1}{p}$, 这是非禁闭解,夸克子质量为 0; 另一个就是上面求得的禁闭解.

四、有效势与层子禁闭性

我们已经得到了两类解,一类是禁闭层子的,另一类解层子是不禁闭的. 究竟哪类解是现实物理世界的真实解呢? 为此,可以计算 QCD 有效势,即计算相应于这两类解的有效势,然后作比较,因为理论的真正可以实现的基态,相应于有效势为绝对极小值. 我们采用文献[9]中的方法来计算 QCD 的有效势.

我们从拉氏密度(2.1)式出发. 定义经典作用量

$$I[A_\mu^a, \phi, \bar{\psi}, C^a, C^{a+}] = \int d^4x \mathcal{L}(A_\mu^a, \phi, \bar{\psi}, C^a, C^{a+}),$$

为了符号简单,我们以场 ϕ 表示胶子场 A_μ^a , 层子场 $\psi, \bar{\psi}$, 鬼态场 C^a, C^{a+} , 这些场的总体. 这样例如 $I[A_\mu^a, \phi, \bar{\psi}, C^a, C^{a+}]$ 简记作 $I[\phi]$. 同样我们把外流 $\kappa^{a\mu}, \eta, \bar{\eta}, x^a$ 和 x^{a+} 的总体记作 J , 它与场的线性相互作用简写成

$$J\phi \equiv \int [\kappa^{a\mu} A_\mu^a + \eta\psi + \bar{\psi}\eta + x^{a+}C^a + x^a C^{a+}] d^4x \quad (4.1)$$

我们定义连通格林函数产生泛函 $W[J]$,

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} W[J] \right\} = \int [d\phi] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \{I[\phi] + J\phi\} \right], \quad (4.2)$$

利用(4.2)中平移积分变量而不改变积分值,得到

$$Z[J] = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [I[\phi^0] + J\phi^0] \right\} Z_1[J, \phi^0], \quad (4.3)$$

$$Z_1[J, \phi^0] = \int [d\phi] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \{I[\phi + \phi^0] - I[\phi^0] + J\phi\} \right], \quad (4.4)$$

$\phi^0[A_\mu^{a0}, \phi^0, \bar{\psi}^0, C^{a0}, C^{a0+}]$ 是平移的场量.

定义

$$W_1[J, \phi^0] \equiv -i\hbar \ln Z_1[J, \phi^0], \quad (4.5)$$

就有

$$W[J] = I[\phi^0] + J\phi^0 + W_1[J, \phi^0]. \quad (4.6)$$

定义

$$\tilde{A}_\mu^a \equiv \frac{\delta W}{\delta \kappa_\mu^a}, \quad \tilde{\psi} \equiv \frac{\delta W}{\delta \eta}, \quad \tilde{\bar{\psi}} \equiv \frac{\delta W}{\delta \bar{\eta}}, \quad \tilde{C}^a \equiv \frac{\delta W}{\delta x^{a+}}, \quad \tilde{C}^{a+} \equiv \frac{\delta W}{\delta x^a} \quad (4.7)$$

以后以 $\tilde{\phi}$ 简记上述这些量的总体.

利用泛函微分方程

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\kappa}_\mu^a &\equiv \kappa_\mu^a + \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta A_\mu^{a0}} + \frac{\delta W_1[J, \phi^0]}{\delta A_\mu^{a0}} = 0, \\ \tilde{\eta} &\equiv \eta + \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta \bar{\phi}^0} + \frac{\delta W_1[J, \phi^0]}{\delta \bar{\phi}^0} = 0, \\ \tilde{\bar{\eta}} &\equiv \bar{\eta} + \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta \phi^0} + \frac{\delta W_1[J, \phi^0]}{\delta \phi^0} = 0, \\ \tilde{x}^a &\equiv x^a + \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta C^{a0+}} + \frac{\delta W_1[J, \phi^0]}{\delta C^{a0+}} = 0, \\ \tilde{x}^{a+} &\equiv x^{a+} + \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta C^{a0}} + \frac{\delta W_1[J, \phi^0]}{\delta C^{a0}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

可以确定 ϕ^0 与 J 之间的泛函关系。易得

$$\tilde{A}_\mu^a = A_\mu^a, \quad \tilde{\phi} = \phi^0, \quad \tilde{\bar{\phi}} = \bar{\phi}^0, \quad \tilde{C}^a = C^{a0}, \quad \tilde{C}^{a+} = C^{a0+}. \quad (4.9)$$

借助于勒让德变换, 定义有效作用量

$$\Gamma[\tilde{\phi}] = W[J] - \tilde{\phi}J \quad (4.10)$$

其中 $\tilde{\phi}$ 代表 $\tilde{A}_\mu^a, \tilde{\phi}, \tilde{\bar{\phi}}, \tilde{C}^a$ 和 \tilde{C}^{a+} 的总体, 而

$$\tilde{\phi}J \equiv \int d^4x [\kappa^{a\mu} \tilde{A}_\mu^a + \bar{\eta} \tilde{\phi} + \tilde{\bar{\eta}} \phi + x^{a+} \tilde{C}^a + x^a \tilde{C}^{a+}]. \quad (4.11)$$

由(4.6)和(4.8)得

$$\Gamma[\tilde{\phi}] = I[\phi^0] + W_1[J, \phi^0], \quad (4.12)$$

这样由(4.4)和(4.8)可以得到

$$Z_1[J, \phi^0] = \int [d\phi] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ I[\phi + \phi^0] - I[\phi^0] - \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta \phi^0} \phi - \frac{\delta W_1}{\delta \phi^0} \phi \right\} \right], \quad (4.13)$$

其中

$$\frac{\delta F}{\delta \phi^0} \phi \equiv \int d^4x \left[\frac{\delta F}{\delta A_\mu^a} A_\mu^a + \bar{\phi} \frac{\delta F}{\delta \bar{\phi}^0} + \frac{\delta F}{\delta \phi^0} \phi + \frac{\delta F}{\delta C^{a0}} C^a + \frac{\delta F}{\delta C^{a0+}} C^{a+} \right].$$

现令 $I'(\phi^0, \phi) \equiv \int d^4x \mathcal{L}'(\phi^0, \phi) = I[\phi + \phi^0] - I[\phi^0] - \frac{\delta I[\phi^0]}{\delta \phi^0} \phi,$

则

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\phi^0, \phi) &= \mathcal{L}(\phi + \phi^0) - \mathcal{L}(\phi^0) - \frac{\delta \mathcal{L}(\phi^0)}{\delta A_\mu^a} \cdot A_\mu^a - \bar{\phi} \frac{\delta \mathcal{L}(\phi^0)}{\delta \bar{\phi}^0} \\ &\quad - \frac{\delta \mathcal{L}(\phi^0)}{\delta \phi^0} \phi - \frac{\delta \mathcal{L}(\phi^0)}{\delta C^{a0}} C^a - \frac{\delta \mathcal{L}(\phi^0)}{\delta C^{a0+}} C^{a+}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

令

$$Z'[\phi^0, J'] = \int [d\phi] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \{ I'[\phi^0, \phi] + J'\phi \} \right], \quad (4.15)$$

$$W'[\phi^0, J'] = -i\hbar \ln Z'[\phi^0, J'], \quad (4.16)$$

其中 J' 是外流 $\kappa_\mu^a, \eta', \bar{\eta}', x'^a$ 和 x'^{a+} 的总体缩写。由(4.5), (4.13), (4.15)和(4.16)知

$$W_1[J, \phi^0] = W' \left[\phi^0, J' = -\frac{\delta W_1}{\delta \phi^0} \right], \quad (4.17)$$

其中 $J' = -\frac{\delta W_1}{\delta \phi^0}$ 是

$$\kappa_\mu^{a'} = -\frac{\delta W_1}{\delta A_\mu^{a0}}, \quad \eta' = -\frac{\delta W_1}{\delta \bar{\phi}^0}, \quad \bar{\eta}' = -\frac{\delta W_1}{\delta \phi^0}, \quad x'^a = -\frac{\delta W_1}{\delta C^{a0+}}, \quad x'^{a+} = -\frac{\delta W_1}{\delta C^{a0}}$$

的总体缩写.

完全可以按照文献[9]中的方法证明, $J' = -\frac{\delta W_1}{\delta \phi^0}$ 等价于 $\frac{\delta Z'}{\delta J'} = 0$, 即等价于

$$\frac{\delta Z'}{\delta \kappa_\mu^{a'}} = 0, \quad \frac{\delta Z'}{\delta \eta'} = 0, \quad \frac{\delta Z'}{\delta \bar{\eta}'} = 0, \quad \frac{\delta Z'}{\delta x'^a} = 0, \quad \frac{\delta Z'}{\delta x'^{a+}} = 0.$$

同样可以对 W' 引入勒让德变换:

$$\Gamma'[\phi^0, \tilde{\phi}'] \equiv W'[\phi^0, J'] - J'\tilde{\phi}', \quad (4.18)$$

其中 $\tilde{\phi}'$ 是以下量的简写

$$\tilde{A}_\mu^{a'} \equiv \frac{\delta W'}{\delta \kappa_\mu^{a'}}, \quad \tilde{\phi}' \equiv \frac{\delta W'}{\delta \eta'}, \quad \tilde{\bar{\phi}}' \equiv \frac{\delta W'}{\delta \bar{\eta}'}, \quad \tilde{C}^{a'} \equiv \frac{\delta W'}{\delta x'^{a'}}, \quad \tilde{C}^{a'+} \equiv \frac{\delta W'}{\delta x'^{a'+}}.$$

由 $\tilde{\phi}' = \frac{\delta W'}{\delta J'} = 0$ 与 $\frac{\delta Z'}{\delta J'} = 0$ 是等价的, 则有

$$\Gamma'[\phi^0, \tilde{\phi}' = 0] = W'[\phi^0, J'] \Big|_{\frac{\delta Z'}{\delta J'}=0} = W'[\phi^0, J' = -\frac{\delta W_1}{\delta \phi^0}] = W_1[J, \phi^0]. \quad (4.19)$$

由此可以看到, W_1 的物理意义是, 除了一个归一化因子外, 它是由(4.14)式表示的拉氏密度 \mathcal{L}' 所描述的真空连通不可约图.

把(4.14)的 \mathcal{L}' 分为自由和相互作用两部分

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_{\text{free}} + \mathcal{L}'_i \quad (4.20)$$

按 Jackiw 方法^[9], 取

$$Z'' = \frac{Z'}{\int [d\phi] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}'_{\text{free}} \right\}}. \quad (4.21)$$

Z'' 是归一化了的. 确切地说, 应是

$$-i\hbar \ln Z'' \Big|_{\frac{\delta Z'}{\delta J'}=0}.$$

是拉氏密度 \mathcal{L}' 所描述的真空连通不可约图.

这样由(4.12), (4.19), (4.16)和(4.21), 可以得到 QCD 中的有效作用量

$$\Gamma[\tilde{\phi}] = I[\phi^0] - i\hbar \ln \int [d\phi] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}'_{\text{free}} \right\} - i\hbar \ln Z'' \Big|_{\frac{\delta Z'}{\delta J'}=0}. \quad (4.22)$$

QCD 的有效势是, 当 $\tilde{\phi}$ 取不依赖于时空坐标的 $\hat{\phi}$ 时, 由下式定义

$$V[\hat{\phi}] \equiv -\Gamma[\hat{\phi}] / \int d^4x, \quad (4.23)$$

我们知道, 有效势驻点位置 $\hat{\phi}_0$, 相当于场 ϕ 在无外场时的真空期望值 $\langle \phi \rangle_0$. 一般认为对层子场和鬼态场, 这个真空期望值为零^[9,10]; 对于胶子场, 在选取“好”的规范下, 它亦为零^[10]. 我们选取的朗道规范属于“好”的规范类. 这样在驻点处, 有效势的值为

$$V[\hat{\phi} = 0] = -\Gamma[\hat{\phi} = 0] / \int d^4x, \quad (4.24)$$

它相当于基态的平均能量密度. 我们想知道, 对于层子的传播函数的哪个解, (4.24) 这个值更小些, 从而决定哪个解应为现实世界实现的解. 我们从 (4.22) 看到, 树图近似 [即 (4.22) 中的第一项] 是与取什么层子传播函数无关. 事实上, 在我们计算 (4.24) 时, 第一项 $I[\tilde{\phi} = \phi^0 = 0] = 0$; 至于单圈近似, 即为 (4.22) 中第二项, 因为只与由 $\mathcal{L}'_{\text{free}}$ 决定的自由传播函数有关, 因此对我们的两种层子传播函数解, 有效势在单圈图近似下也是一样的. 因此对于两种不同的层子传播函数, 有效势 (2.24) 值的不同来自于二圈图和二圈以上图的贡献, 即来自 (4.22) 的第三项. 在我们这种弱耦合近似, 略去高于二圈以上图, 只需考虑二圈图. 在计算 (4.24) 的二圈图时, 易见, 这时 $\mathcal{L}'(\phi^0 = 0, \phi)$ 即为 QCD 时的拉氏密度 $\mathcal{L}(\phi)$, 因此我们只需考虑 QCD 的真空二圈图 (见图 7).

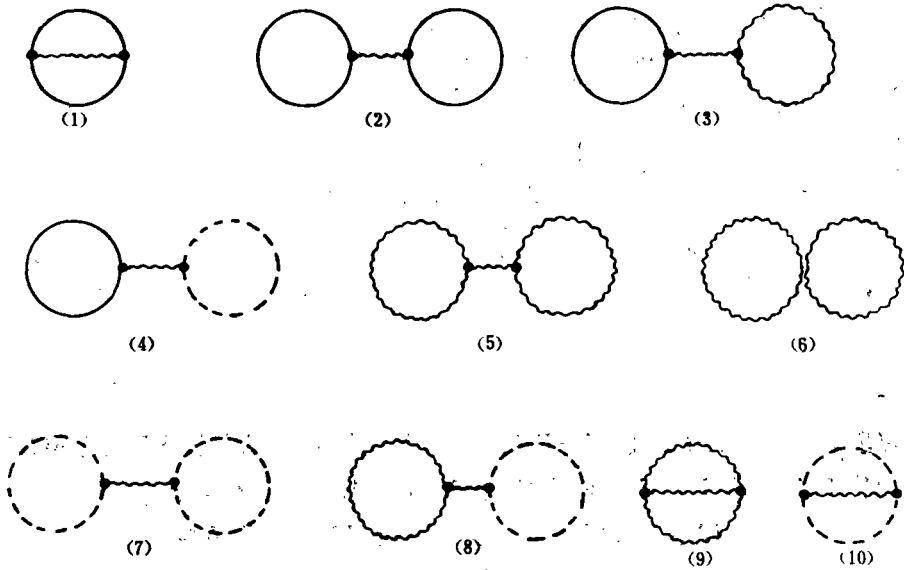


图 7 所有的二圈真空图

图 7 给出了 QCD 的所有连通二圈真空图. 由于只有不可约的二圈图对 (4.24) 才有贡献, 图 7 的 (2), (3) 和 (4) 图, 虽有费米子圈, 但是可约的, 所以不需要考虑. 而图 7 (5)、(6)、(7)、(8)、(9) 和 (10), 不涉及到层子的传播函数, 因而不会引起基态能量的差别, 因此由于两种不同的层子传播函数, 引起基态能量差别的, 仅有图 7 (1).

这种情况与 QED 时^[7]非常相似. 在 QED 情形, 也有非禁闭的平庸解和禁闭解, 并且在决定哪一个为现实世界的解时, 也仅需考虑图 7 (1) 对基态能量差别的贡献.

但是, 由于非线性费米子自能方程不能得到解析形式的解, 对图 7 (1) 需作数值计算. R. Fukuda 和 T. Kugo^[7] 借助于 Cornwall, Jackiw 和 Tomboulis 所用的 Rayley-Ritz 方法^[11], 计算了相应于禁闭解和非禁闭解的两个真空的能量差, 得到

$$\Delta E_{\text{QCD}} = E_{\text{unconf}} - E_{\text{conf}} < 0.$$

从上面分析知, 我们的情况也只是计算图 7 (1), 在这种情况下, QCD 与 QED 所不同的只是多了一个由于 $SU(3)$ 群产生的权重系数 4, 故也有:

$$\Delta E_{\text{QCD}} = E_{\text{unconf}} - E_{\text{conf}} < 0,$$

这表明,在上述这种弱耦合近似下,实现的也是非禁闭解。

由此可以看到,当胶子传播函数和固有顶角取最低次近似时,从层子传播函数的讨论和有效势的计算,表明层子是不禁闭的。当然,这只是一个近似模型。因为目前对于处理强耦合的 Schwinger-Dyson 方程还没有很好的方法。值得指出,在我们所做的近似下,层子传播函数的求解和有效势二圈图计算中,实际上都没有涉及到色胶子的非线性相互作用。由此,我们认为:如果现实世界中层子是禁闭的,而作为描写强相互作用的动力学理论确实 QCD 具有禁闭性质,那可能与强耦合或非阿贝尔规范群中色胶子的非线性相互作用有关。

参 考 文 献

- [1] t'Hooft, *Nucl. Phys.*, **B72** (1974), 461; **B75** (1974), 461.
- [2] t'Hooft, C. G. Callen and D. J. Gross, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 1649.
- [3] 黄涛、薛丕友, *高能物理与核物理*, **3**(1979), 188.
- [4] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, 290, McGraw-Hill Book Company, 1965.
- [5] E. J. Eichten and F. L. Feinberg, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 3254.
- [6] 邝宇平, 动力学自发破缺, 广州会议评述报告, (1978).
- [7] R. Fukuda and T. Kugo, *Nucl. Phys.*, **B117** (1976), 250.
- [8] Predrag Cvitanović, *Phys. Rev.*, **D14** (1976), 1536.
- [9] R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D9** (1974), 1686.
- [10] R. Fukuda and T. Kugo, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3469.
- [11] J. M. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 2428.

WEAK COUPLING APPROXIMATE SCHWINGER-DYSON EQUATION OF THE STRATON'S PROPAGATOR IN QUANTUM CHROMODYNAMICS AND ITS SOLUTIONS

ZHOU XIAN-JIAN XUE PEI-YOU
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The weak coupling approximate Schwinger-Dyson equation of the straton's propagator in 4-dimensional QCD theory and the problem of the straton's confinement are discussed. It is proved that, when we choose Landaugauge, the obtained Schwinger-Dyson integral equation of the straton's propagator can be transformed into a very simple form. Then we change it into a first order non-linear differential equation. It has two solutions: a confining solution and a solution that has no confinement for the stratoms.

The effective potential in QCD is derived by functional method, and the ground-state energy difference between these two solutions is discussed. In our approximation, we calculate the vacuum graph to the 2-loop diagrams. We may conclude that stratoms are not confined in our approximation.