第4卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 4, No. 2
1980年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1980

零质量玻色场，自发破缺与 Goldstone 定理

伍经元 鞠长胜
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文讨论零质量玻色场 $\phi(x)$ 在动量空间的零频部分，它不是动量趋于零时的极限，所以并不代表粒子的产生和湮灭算符．由于正则量子化得到一连续量子数，因此所有物理态都不能归一．真空变成一个无穷宽能带中的任意一个态．当 $\phi(x)$ 是厄米场时，真空并不存在简并，因此没有真空自发破缺；当 $\phi(x)$ 是复数场时，每一真空都是无穷地分立简并，因此也没有连续对称的自发破缺．利用这些态容易验证 Goldstone 定理证明中所插入的零动量零能量中间态并非代表不同数目的 Goldstone 粒子的相干迭加，也不一定与原来的真空态正交．文章亦讨论了 $\phi(x)\to\phi(x)+\eta$ 的生成元，它作用在 $\phi(x)$ 上的真空平均值及作用在真空态上的结果．

一、引 言

在近代场论研究中经常用到连续对称性的自发破缺与 Goldstone 定理[1]．所谓连续对称性的自发破缺是指无穷多个连续真空态的简并，而 Goldstone 定理则预言系统中存在零质量的玻色子．一般认为[2,3]，如果选定了某一真空态 |真空〉，它定义为

$$a_{\boldsymbol{k}}|\text{真空}\rangle=0,\quad b_{\boldsymbol{k}}|\text{真空}\rangle=0, \tag{1.1}$$

那末其他真空态 |真空〉′ 可以看成不同数目的零动量零能量 Goldstone 粒子态的相干迭加，也即

$$|\text{真空}\rangle'=\sum_m C_m(a^\dagger_{\boldsymbol{k}=0})^m|\text{真空}\rangle. \tag{1.2}$$

这里 $a_{\boldsymbol{k}}$ 和 $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ 为带动量 $\boldsymbol{k}$ 的 Goldstone 粒子的湮灭和产生算符，$b_{\boldsymbol{k}}$ 代表带动量 $\boldsymbol{k}$ 的其他粒子的湮灭算符，C_m 为一组归一化系数．事实上这种说法是有毛病的，因为在无质量玻色场 $\phi(x)$ 的展开式里并不存在湮灭算符 $a_{\boldsymbol{k}=0}$ 和产生算符 $a^\dagger_{\boldsymbol{k}=0}$，而 $\boldsymbol{k}\to 0$ 的湮灭和产生算符却和 |真空〉′ 无关．另一方面，$\phi(x)$ 的零频部分可写成

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\int_V d^3x\,\phi(\boldsymbol{x},t)=Q+Pt \tag{1.3}$$

其中 V 为箱归一体积，Q 和 P 是时空无关的算符，代表场的集体振幅和它的广义动量．

本文 1979 年 4 月 10 日收到．

如果 $\phi(x)$ 是厄米算符，则 Q、P 也是厄米算符，并且满足对易关系

$$[Q, P] = i, \tag{1.4}$$

自由哈密顿量可表为

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} k\left(N_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}P^2, \tag{1.5}$$

其中 $N_{\boldsymbol{k}} = a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}a_{\boldsymbol{k}}$ 是动量为 $\boldsymbol{k}$ 的粒子数算符，$k = |\boldsymbol{k}|$. 因此，P 和 $N_{\boldsymbol{k}_1}, N_{\boldsymbol{k}_2}, \cdots\cdots$ 可以用来描写一组完备的本征态，由于 P 的本征态是连续的，所以这些态不能归一.

第二节我们将详细讨论无质量自由玻色场 $\phi(x)$，它的零频部分的态没有简并. 利用 P 的本征值的连续性，以及在有限空间上定义的

$$\mathscr{Q} = \int_V d^3x\dot{\phi}(x),$$

我们计算了

$$e^{i\eta\mathscr{Q}}\phi(x)e^{-i\eta\mathscr{Q}}$$

的真空平均值与 $\phi(x)$ 的真空平均值之差，解决了文献中指出的矛盾性[2-4].

第三节我们讨论了 Goldstone 定理的证明. 我们对这个定理的证明有了新的认识，这时关系 (1.2) 不成立，算符 $\mathscr{Q}$ 不一定自发破缺，且真空退化有新的含义.

第四节讨论了复值零质量玻色场. 相应零频部分的每个态除了用连续量子数 p 描写外，还包含了描写零频部分"电荷"的分立量子数 n. 当 $p^2 \neq 0$ 时，相应于不同的 n，真空是退化的.

第五节讨论了加进相互作用项后仍保持零质量的玻色场，并指出在任何跃迁中量子数 p 与 n 是不改变的，我们在物理上测量不出零频部分的"电荷"与 p 值.

最后对零质量费米子场的零频部分作了讨论.

二、厄米零质量玻色场

1. 动量空间展开 厄米零质量玻色场 $\phi(x)$ 的拉氏函数密度为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi. \tag{2.1}$$

我们先假定系统在一个有限体积 V 中，有周期性边界条件. 显然，在分立的动量空间中

$$\phi(x) = V^{-\frac{1}{2}}\sum_{\boldsymbol{k}} q_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}. \tag{2.2}$$

由运动方程，当 $\boldsymbol{k} \neq 0$ 时，

$$\ddot{q}_{\boldsymbol{k}}(t) = -k^2 q_{\boldsymbol{k}}(t), \tag{2.3}$$

因此，

$$q_{\boldsymbol{k}}(t) = (2k)^{-\frac{1}{2}}(a_{\boldsymbol{k}}e^{-ikt} + a_{\boldsymbol{k}}^{\dagger}e^{ikt}). \tag{2.4}$$

当 $\boldsymbol{k} = 0$ 时，

$$\ddot{q}_0(t) = 0, \tag{2.5}$$

因此，

$$q_0(t) = Q + Pt, \tag{2.6}$$

Q 和 P 是时空无关的厄米算符. 由于 $\phi(x)$ 的正则动量为

$$\pi(x)=\dot{\phi}(x), \tag{2.7}$$

其在动量空间的展开式为

$$\pi(x)=V^{-\frac{1}{2}}\sum_{\boldsymbol{k}} p_{\boldsymbol{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}, \tag{2.8}$$

所以

$$p_{\boldsymbol{k}}(t)=\dot{q}_{\boldsymbol{k}}(t). \tag{2.9}$$

于是正则量子化条件

$$[\phi(\boldsymbol{x},t),\pi(\boldsymbol{x}',t)]=i\delta^3(x-x') \tag{2.10}$$

导致

$$[q_{\boldsymbol{k}},p_{\boldsymbol{k}'}]=i\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{2.11}$$

也即

$$[a_{\boldsymbol{k}},a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}'}]=\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \tag{2.12}$$

$$[Q,P]=i. \tag{2.12$'$}$$

哈密顿量 H 与动量算符 $\mathscr{P}$ 分别为

$$H=\sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} k\left(N_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}P^2 \tag{2.13}$$

$$\mathscr{P}=\sum_{\boldsymbol{k}\neq 0}\boldsymbol{k}\left(N_{\boldsymbol{k}}+\frac{1}{2}\right) \tag{2.14}$$

我们确实看到只存在着 $\boldsymbol{k}\neq 0$ 的湮灭和产生算符．当 $V\to\infty$ 时，存在 $a_{\boldsymbol{k}\to 0}$ 和 $a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}\to 0}$，但没有 $a_{\boldsymbol{k}=0}$ 和 $a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}=0}$，也即零频部分和粒子谱没有关系．这是很自然的，因为 Lorentz 群是非紧致的，由 Lorentz 变换，一个零质量粒子的动量只能接近零而不能等于零（静止）．

由 (2.12)′ 与 (2.13) 可知 Q 与 P 相当于单位质量粒子的坐标及动量．其实

$$Q+Pt=V^{-\frac{1}{2}}\int_V d^3x\phi(x), \tag{2.15}$$

$$P=V^{-\frac{1}{2}}\int_V d^3x\pi(x) \tag{2.16}$$

正好是场的集体振幅与它的广义动量，但这个广义动量与 (2.14) 中场所代表的粒子的动量 $\mathscr{P}$ 无关．就好象一条一维的弦，不同的 $a_{\boldsymbol{k}}$、$a^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}$ 表示的是沿弦方向运动的各个具不同动量 $\boldsymbol{k}$ 的波的湮灭和产生算符，而 Q 和 P 却表示垂直于弦方向的集体振幅及其广义动量．

2. 真空　由于 $N_{\boldsymbol{k}_1}, N_{\boldsymbol{k}_2},\cdots$ 与 P 是一组互相对易而又与 H、$\mathscr{P}$ 对易的算符，相应于本征值 $n_{\boldsymbol{k}_1}, n_{\boldsymbol{k}_2},\cdots$ 与 p 的本征态为 $|n_{\boldsymbol{k}_1}, n_{\boldsymbol{k}_2},\cdots;p\rangle$；因 p 是连续的，这些态不能归一，但借助于分布[1]可以定义它们的正交性

$$\langle n'_{\boldsymbol{k}_1}, n'_{\boldsymbol{k}_2},\cdots;p'|n_{\boldsymbol{k}_1}, n_{\boldsymbol{k}_2},\cdots;p\rangle=\left(\prod_i\delta_{n_{\boldsymbol{k}_i}n'_{\boldsymbol{k}_i}}\right)\delta(p-p') \tag{2.17}$$

这里我们只对零频部分感兴趣，为方便起见，定义不含任何粒子的态：

$$|p\rangle=|n_{\boldsymbol{k}_1}=0, n_{\boldsymbol{k}_2}=0,\cdots;p\rangle, \tag{2.18}$$

于是对不同的 p，它们是正交的：

---

1) 广义泛函的一种．

$$\langle p|p'\rangle=\delta(p-p'). \tag{2.19}$$

尽管这些零频态的"能量" $\frac{1}{2}p^2$ 都不等，但只要引进相互作用项后仍使 $\phi(x)$ 保持零质量，则不同的零频态 $|p\rangle$ 之间没有跃迁（见第五节）. 因此，任何一个 $|p\rangle$ 都可以看作真空，且彼此间正交，但这无穷多个正交的真空态并不退化，它们连接成无穷宽的能带. 我们无论从哪个真空出发都能建立一套正交完备的物理态，原因是真空的 p 值在物理上不能测量.

3. 场的真空平均值 我们知道拉氏函数密度 (2.1) 有如下对称性

$$\phi(x)\to\phi(x)+\rho, \tag{2.20}$$

ρ 为与时空无关的 c 数. 所以我们要谈 $\phi(x)$ 的真空平均值是没有意义的. 事实上，从 $\phi(x)$ 的动量展开式 (2.2) 看出，对 $\phi(x)$ 的真空平均值给出非零贡献的仅是

$$q_0=Q+Pt;$$

亦即

$$Q\to Q+V^{\frac{1}{2}}\rho \tag{2.21}$$

使哈密顿量 H 不变. Q 的真空平均值的不确定正好相当于固定动量的自由粒子的坐标是不能确定的.

由于在零频本征态 $|p\rangle$ 与 $|p+\xi\rangle$ 之间，因正交性可以存在一个任意的相对位相 $\delta(\xi)$，以使

$$e^{iQ\xi}|p\rangle=e^{i\delta(\xi)}|p+\xi\rangle. \tag{2.22}$$

为方便起见我们选 ρ 使

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\delta(\xi)\Big|_{\xi=0}=0, \tag{2.23}$$

于是便可以推出[5] Q 的真空平均值为

$$\langle p'|Q|p\rangle=i\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p), \tag{2.24}$$

场 $\phi(x)$ 的真空平均值为

$$\langle p'|\phi(x)|p\rangle=V^{-\frac{1}{2}}\left\{i\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p)+pt\delta(p'-p)\right\}, \tag{2.25}$$

波函数为

$$\langle q|p\rangle=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ipq}, \tag{2.26}$$

其中 $|q\rangle$ 为相应于本征值 q 的 Q 的本征态.

4. 平移生成元 保持拉氏函数密度 (2.1) 不变的平移 (2.20) 的生成元为

$$\mathscr{Q}=\int_V d^3x\pi(x)=V^{\frac{1}{2}}P, \tag{2.27}$$

有

$$e^{i\eta\mathscr{Q}}\phi(x)e^{-i\eta\mathscr{Q}}=\phi(x)+\eta. \tag{2.28}$$

因此平移后的场 $\phi'(x)$ 的真空平均值与 $\phi(x)$ 的真空平均值就会相差 η〈真空|真空〉. 可是 $\mathscr{Q}$ 与 N_k 和 H 都对易，于是若先使 $e^{\pm i\eta\mathscr{Q}}$ 作用在真空上，则所得两因子抵消，就产生明显的矛盾:

$$\langle 真空|\phi'(x)|真空\rangle=(\langle 真空|e^{i\eta\mathscr{Q}})\phi(x)(e^{-i\eta\mathscr{Q}}|真空\rangle)=\langle 真空|\phi(x)|真空\rangle,$$

它们在文献上是这样解释的[2-4]：Ω 这个算符并不存在，而 $e^{-i\eta\Omega}$ 并不么正，所以当后者作用在|真空〉上不可能简单地得出单一的相位．由于 Ω 只包含 $\phi(x)$ 的零频部分，文献 [2, 3] 把 $e^{-i\eta\Omega}$|真空〉看成为很多不同数目的其能动量为零的粒子态的相干迭加，且与|真空〉正交．

但是我们已经说过根本不存在能动量为零的粒子态的湮灭、产生算符，因而不能认为上述的解释是合理的．

按我们的方案，真空是带有连续量子数 p 的态 $|p\rangle$，就能很好地解释这个实际上并不存在的矛盾．我们认为在有限空间里 $\mathscr{Q}$ 是存在的，而且可以作用在任何能态上，特别

$$\mathscr{Q}|p\rangle = V^{\frac{1}{2}}P|p\rangle$$

因此

$$\begin{aligned}\langle p'|e^{i\eta\mathscr{Q}}\phi(x)e^{-i\eta\mathscr{Q}}|p\rangle &= e^{i\eta V^{\frac{1}{2}}(p'-p)}\langle p'|\phi(x)|p\rangle \\ &= V^{-\frac{1}{2}}e^{i\eta V^{\frac{1}{2}}(p'-p)}\left\{i\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p)+pt\delta(p'-p)\right\} \\ &= \eta\delta(p'-p)+V^{-\frac{1}{2}}\left\{i\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p)+pt\delta(p'-p)\right\} \\ &= \eta\delta(p'-p)+\langle p'|\phi(x)|p\rangle\end{aligned}$$

这里我们没有引进带零能动量粒子的真空态，而且 $e^{-i\eta\mathscr{Q}}|p\rangle$ 也不与 $|p\rangle$ 正交．

三、Goldstone 定理

Goldstone 定理说：若体系存在一守恒流 $j_\mu(x)$，相应的荷 $\mathscr{Q}=-i\int_V j_4(x)d^3x$ 与某一个不依赖于时空的算符 A 的对易子之真空平均值〈真空|$[\int_V j_0(x)d^3x, A]$|真空〉不为零，且与时间 t 无关的话，则荷算符 $\mathscr{Q}$ 自发破缺且系统中存在着零质量粒子．

通常的证明方法[3]是在 $j_0(x)$ 与 A 之间插入一组正交完备的物理态 $|\boldsymbol{k}, \alpha\rangle$，平移 $j_0(x)$ 至 $j_0(0)$，再对 $\int d^3x$ 积分，但积分范围 Ω 小于 V，即

$$\begin{aligned}\sum_{k\alpha}\int_\Omega d^3x e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\{&\langle 真空|j_0(0)|\boldsymbol{k},\alpha\rangle\langle\boldsymbol{k},\alpha|A|真空\rangle e^{-i\omega_\alpha t} \\ &-\langle 真空|A|\boldsymbol{k},\alpha\rangle\langle\boldsymbol{k},\alpha|j_0(0)|真空\rangle e^{i\omega_\alpha t}\},\end{aligned} \tag{3.1}$$

因而所有带动量 $\boldsymbol{k}$ 的中间态都有贡献，显然当 $\boldsymbol{k}$ 接近于零时贡献大，中间态 $|\boldsymbol{k},\alpha\rangle$ 的能量 $\omega_\alpha(\boldsymbol{k})$ 一般是不知道的，唯独可以知道的是 $\omega_\alpha(\boldsymbol{k}=0)=0$．事实上，在 $\Omega=V$ 时，仅 $\boldsymbol{k}=0$ 的中间态有贡献，又由(3.1)与时间无关，所以得到：存在着这样一个态 $|\boldsymbol{k}=0,\alpha\rangle$，其能量 $\omega_\alpha(\boldsymbol{k}=0)=0$，也即代表了一个零质量粒子．

我们知道，在相对论情形下，

$$\lim_{\boldsymbol{k}\to 0}\omega_\alpha(\boldsymbol{k})=0 \tag{3.2}$$

才代表存在一个零质量粒子．上述证明的毛病就在于此，因为第二节中我们已经说过，对零质量粒子态来说，$\boldsymbol{k}=0$ 的态并不包含任何粒子，而且也不必是 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时的极限态，也

即尽管 $\omega_\alpha(\boldsymbol{k}=0)=0$，但 $\omega_\alpha(\boldsymbol{k}\to 0)$ 却可以与它无关[1].

但是 Goldstone 定理仍然成立，只不过荷算符不一定自发破缺．让我们来个反证，假设系统中不存在零质量粒子，当 $\boldsymbol{k}\to 0$ 时，各种粒子态都等于 $\boldsymbol{k}=0$ 的态．（带质量的场，$\boldsymbol{k}\to 0$ 的产生或湮灭算符等于 $\boldsymbol{k}=0$ 的产生或湮灭算符.）但由证明中已知 $\omega_\alpha(\boldsymbol{k}=0)=0$，可见 (3.2) 是满足的,因此就有一个零质量粒子存在,适与假设矛盾.

现在让我们看一下厄米的自由标量场 $\phi(x)$ 是怎样实现 Goldstone 定理的．这里

$$A=\phi(0),$$

$$j_\mu(x)=\partial_\mu\phi(x), \tag{3.3}$$

$$\mathscr{Q}=-i\int_V d^3x\partial_4\phi(x)=-V^{\frac{1}{2}}P. \tag{3.4}$$

所以

$$\langle p'|[\mathscr{Q}(t),\phi(0)]|p\rangle=\langle p'|[-V^{\frac{1}{2}}P,V^{-\frac{1}{2}}Q]|p\rangle=i\delta(p'-p) \tag{3.5}$$

与时间显然无关．(3.5) 的左边在插入中间态时变为

$$\begin{aligned}&\int d^3p''\{\langle p'|-P|p''\rangle\langle p''|Q|p\rangle-\langle p'|Q|p''\rangle\langle p''|-P|p\rangle\}\\&=\int d^3p''\left\{-p''\delta(p'-p'')i\frac{\partial}{\partial p''}\delta(p''-p)\right.\\&\qquad\left.+i\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')p\delta(p''-p)\right\}=i\delta(p'-p),\end{aligned}$$

因而可知插入的中间态不包含任何零动量的无质量粒子，它只包含我们所定义的真空，Goldstone 定理指的零质量粒子就是原来的 $\phi(x)$ 场．而对称性的生成元作用在 $|p\rangle$ 上确实既不为零也不等于别的真空态,因此对称性没有自发破缺.

四、自由复标量场

自由复标量场的拉氏函数密度为

$$\mathscr{L}_0=-\partial_\mu\phi^\dagger\partial_\mu\phi. \tag{4.1}$$

在动量空间 $\phi(x)$ 的零频部分为

$$V^{-\frac{1}{2}}\int_V d^3x\phi(x)=Q+Pt. \tag{4.2}$$

这里 Q 和 P 为时间无关的复值算符,它们可以记成厄米算符 Q_1，Q_2,P_1 和 P_2 的如下组合:

$$Q=2^{-\frac{1}{2}}(Q_1+iQ_2), \tag{4.3}$$

$$P=2^{-\frac{1}{2}}(P_1+iP_2). \tag{4.4}$$

由 $[Q,P^\dagger]=i$ 可知

$$[Q_i,P_j]=i\delta_{ij},\quad \text{其他对易子为零}; \tag{4.5}$$

因此理论包含着连续量子数.

(4.1) 在 $\phi(x)\to\phi(x)+\eta$ 下不变，η 是复值,其生成元为 $Q_i=V^{\frac{1}{2}}P_i$，$i=1,2$．该

1) 按相对论协变理论,上述困难不存在,(3.1) 的谱表示清楚地说明有贡献的中间态的质量都为零.

理论还有一个守恒的"电流"：

$$j_\mu^{EM}(x) = i(\partial_\mu\phi^\dagger\phi - \phi^\dagger\partial_\mu\phi) \tag{4.6}$$

相应的守恒"电荷"是

$$Q^{EM} = -i\int_V d^3x j_4^{EM}(x) = (Q_1P_2 - Q_2P_1) + \sum_{k\neq 0}(a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k), \tag{4.7}$$

a_k, $a_k^\dagger$, b_k 和 $b_k^\dagger$ 分别是粒子反粒子的湮灭和产生算符．相应的哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}(P_1^2 + P_2^2) + \sum_{k\neq 0}(a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k + 1)k, \tag{4.8}$$

注意到 Q^{EM} 不与 $Q_{1,2}$ 对易，因此只能把 H 与 Q^{EM} 同时对角．它们的零频部分刚好等价于两维空间中一个自由粒子的能量和角动量算符；因此，不包含任何正反粒子的态能够用量子数 p 和 n 描写，记成 $|p, n\rangle$，于是

$$H|p, n\rangle = \frac{1}{2}p^2|p, n\rangle, \tag{4.9}$$

$$Q^{EM}|p, n\rangle = n|p, n\rangle, \tag{4.10}$$

其中 p 连续，取值范围由零至无穷，n 是整数，由 (4.7) 知道当 $p = 0$ 时，n 只能取零值．

在 Q_1、Q_2 表象中，即 $Q_i|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle$，我们可以令

$$P_i \to -i\frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{4.11}$$

于是有波函数

$$\langle q, \theta|p, n\rangle = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{in\theta}J_n(pq), \tag{4.12}$$

其中 q 和 θ 是极坐标：$q = (q_1^2 + q_2^2)^{\frac{1}{2}}$，$\theta = \tan^{-1}q_2/q_1$，$J_n(pq)$ 为 n 阶贝塞尔函数．态 $|p, n\rangle$ 的"归一"定义成

$$\langle p', n'|p, n\rangle = \delta_{nn'}\{p^{-1}\delta(p' - p)\}. \tag{4.13}$$

对任意 p, $p' \geqslant 0$，分布 $\{p^{-1}\delta(p' - p)\}$ 的性质如下：

$$\int_0^\infty qdqJ_n(p'q)J_n(pq) = \{p^{-1}\delta(p' - p)\}, \quad \int_0^\infty pdp\{p^{-1}\delta(p' - p)\}f(p) = f(p'). \tag{4.14}$$

下节将证明对不同的 p, n 互相间没有跃迁，因而任一 $|p, n\rangle$ 态均可当作物理真空，由它出发可建立一套物理态．

除去 $p = 0$，对每个 p，由于 n 取分立谱，真空 $|p, n\rangle$ 是无穷多重简并的；固定 n，则由于 p 连续使真空 $|p, n\rangle$ 组成能带．

"平移"生成元 Q_i 或 P_i 作用在真空态上并不为零，但与原来的真空态正交：

$$P_1|p, n\rangle = \frac{1}{2}ip(|p, n-1\rangle - |p, n+1\rangle), \tag{4.15}$$

$$P_2|p, n\rangle = -\frac{1}{2}p(|p, n-1\rangle + |p, n+1\rangle), \tag{4.16}$$

相应的"平移"么正算符作用在真空上给出

$$|p, n\rangle_\eta \equiv e^{-i\eta^* P - i\eta P^\dagger}|p, n\rangle = \sum_m |p, m\rangle J_{m-n}(|\eta|p)e^{-i(m-n)\alpha}, \tag{4.17}$$

α 为复数 η 的相角．与厄米场情况不同，平移后的真空态与原来的真空态不同，但又不与

原来的真空态正交，可是新的真空态并不包含任何零能动量的 Goldstone 粒子。如果 $p=0$ 的话，真空是"平移"不变的. 和第二节完全一样，利用 (4.17) 易证

$$_{\eta}\langle p', n'|Q|p, n\rangle_{\eta} = \langle p', n'|Q|p, n\rangle + \eta\langle p', n'|p, n\rangle. \tag{4.18}$$

在这里 Goldstone 定理是这样实现的，在真空平均值里插入的中间态仅 $|p'', n\pm 1\rangle$ 才有贡献:

$$\int_0^{\infty} p''dp'' \sum_m \{\langle p'n|\dot{\phi}(x)|p'', m\rangle\langle p'', m|\phi^{\dagger}(0)|p, n\rangle - \langle p'n|\phi^{\dagger}(0)|p'', m\rangle\langle p'', m|\dot{\phi}(x)|p, n\rangle\}.$$

这里 p'' 与 p' 或者 p 相差一个无穷小. 有趣的是如果选定 $|p=0, m=0\rangle$ 为物理真空态的话，给出贡献的态是 $|p'', m=\pm 1\rangle$，这里 $p''\neq 0$，原因是 $m\neq 0$，但 p'' 离 $p=0$ 太远不行，因此，Goldstone 定理是靠 p'' 离开 $p=0$ 一个无穷小实现的，在这个新的意义下，可以说 $|p'', m=\pm 1\rangle$ 与 $|p=0, m=0\rangle$ 简并并且正交；正因为这种有贡献的中间态的出现，表明了 p 必定是连续量子数.

五、跃迁问题

1. S 矩阵　引进相互作用后，能态的不归一并不妨碍我们定义相互作用表象以及时间发展算符 $U(t, t_0)$，它满足

$$U^{\dagger}(t, t_0)U(t, t_0) = U(t, t_0)U^{\dagger}(t, t_0) = 1, \tag{5.1}$$

可是连续量子数 p 的存在使 $U(+\infty, -\infty)$ 产生的矩阵并不么正，如果以 $|i\rangle$, $|f\rangle$ 表示初末态波函数，那末

$$\sum_f \int dp_f \langle i|U^{\dagger}(\infty, -\infty)|f\rangle\langle f|U(\infty, -\infty)|i\rangle = \langle i|i\rangle \tag{5.2}$$

不等于 1，式中 p_f 代表末态 $|f\rangle$ 的连续量子数，为着保证几率的意义，定义散射矩阵元 S_{fi} 模的平方为

$$\int dp_f \langle i|U^{\dagger}(\infty, -\infty)|f\rangle\langle f|U(\infty, -\infty)|i\rangle = |S_{fi}|^2\langle i|i\rangle, \tag{5.3}$$

于是有

$$\sum_f |S_{fi}|^2 = 1, \tag{5.4}$$

这样就可以进行跃迁的计算.

2. 有相互作用时的零质量玻色场　引进相互作用后只要能保持拉氏函数密度 $\mathscr{L}$ 在

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \eta \tag{5.5}$$

下的不变性，便有守恒流的存在，按 Goldstone 定理，$\phi(x)$ 代表的粒子就是零质量的；因此在拉氏函数密度中，我们只对包含 $\partial_{\mu}\phi(x)$ 那样的相互作用感兴趣.

对于第四节的复标量场，假设相互作用为

$$\mathscr{L}_I = ig(\bar{\psi}_p\gamma_{\mu}\psi_n\partial_{\mu}\phi + \bar{\psi}_n\gamma_{\mu}\psi_p\partial_{\mu}\phi^{\dagger}), \tag{5.6}$$

其中 ψ_p 和 ψ_n 表示质子场和中子场，运动方程为

$$\partial_{\mu}(\partial_{\mu}\phi - ig\bar{\psi}_n\gamma_{\mu}\psi_p) = 0, \tag{5.7}$$

所以 $j_\mu(x) = \partial_\mu\phi - ig\bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_p$ 是守恒流，因为

$$[j_4(x),\ \phi^\dagger(0)] \neq 0, \tag{5.8}$$

$\phi(x)$ 仍为零质量场.

在相互作用表象中，哈氏量为

$$H_I = -ig(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n\partial_\mu\phi - \bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_p\partial_\mu\phi^\dagger) + (ig\bar{\psi}_p\gamma_4\psi_n)(ig\bar{\psi}_n\gamma_4\psi_p), \tag{5.9}$$

最后一项显然是非协变的，但是被 $\partial_\mu\phi(x)\,\partial_\nu\phi(0)$ 的编时乘积中的非协变项抵消掉[6]，即微扰论的结果将等价于

$$H_I = -ig(\bar{\psi}_p\gamma_\mu\psi_n\partial_\mu\phi - \bar{\psi}_n\gamma_\mu\psi_p\partial_\mu\phi^\dagger), \tag{5.10}$$

以及 $\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi^\dagger$ 的 Wick 收缩只包含协变部分

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi(x)\frac{\partial}{\partial y_\nu}\phi(y)} = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial y_\nu}(\underbrace{\phi(x)\phi(y)}). \tag{5.11}$$

考虑 $\partial_\mu\phi$ 的零频部分对三顶点图的贡献

$$-ig\gamma_4 PV^{-\frac{1}{2}},\quad ig\gamma_4 P^\dagger V^{-\frac{1}{2}} \tag{5.12}$$

明显非协变并能改变真空的分立量子数 n. 但当 V 趋于无穷时，这个非协变的相互作用就没有贡献，也即在相互作用引入后量子数 p 和 n 不改变，这就是说在我们定义的真空意义下，任一 $|p, n\rangle$ 都可以作为物理真空态，可由此建立一组物理态，这个真空本身的“电荷”与 p 值是不可测量的.

六、讨　　论

(1) 对于零质量费米子场 $\psi(x)$，其零频部分为

$$V^{-\frac{1}{2}}\int d^3x\psi(x) = a_0u_0 + b_0^\dagger v_0, \tag{6.1}$$

这里 u_0 和 v_0 表示两个相互正交的 2×1 矩阵，因为 $\psi(x)$ 的正则动量为 $i\psi^\dagger(x)$ 而不是 $\dot{\psi}(x)$，且 a_0，$b_0^\dagger$ 是时间无关的算符，它们满足反对易关系

$$\{a_0, a_0^\dagger\} = \{b_0, b_0^\dagger\} = 1,\ \{a_0, b_0\} = \{a_0, b_0^\dagger\} = 0, \tag{6.2}$$

因此它们仍然具有湮灭算符和产生算符的意义，虽然它们对哈氏量和系统的总动量没有贡献，但却影响系统的费米子数 F:

$$F = \int d^3x\psi^\dagger(x)\psi(x) = a_0^\dagger a_0 - b_0^\dagger b_0 + \text{非零频部分}, \tag{6.3}$$

其中零频部分的贡献 $(a_0^\dagger a_0 - b_0^\dagger b_0)$ 虽有粒子数含义，但完全不表示物理粒子，因为当 $V\to\infty$ 时我们已有动量趋于零的粒子态了. 和玻色子情况相同，$a_0^\dagger a_0$ 和 $b_0^\dagger b_0$ 仍可被视作集体振幅，但在费米子量子化理论里，振幅的大小 $a_0^\dagger a_0$ 与 $b_0^\dagger b_0$ 只能取值为零或一，而完全不同于玻色体系中的连续值 p，也即我们可以定义真空为 $|\xi^a, \xi^b\rangle$:

$$a_{k\neq 0}|\xi^a, \xi^b\rangle = b_{k\neq 0}|\xi^a, \xi^b\rangle = 0, \tag{6.4}$$

这样的真空是四度简并的，并满足

$$\begin{aligned} &a_0|0, 0\rangle = b_0|0, 0\rangle = 0, \qquad a_0|0, 1\rangle = b_0^\dagger|0, 1\rangle = 0,\\ &a_0^\dagger|1, 0\rangle = b_0|1, 0\rangle = 0, \qquad a_0^\dagger|1, 1\rangle = b_0^\dagger|1, 1\rangle = 0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

相应的 $F_0 \equiv a_0^\dagger a_0 - b_0^\dagger b_0$ 的值分别为 0，−1，1，0，也即真空的角动量可取零或 ±1/2. 这里显然有

$$H|\xi^a, \xi^b\rangle = 0, \quad \xi^a, \xi^b = 0, 1. \tag{6.6}$$

H 代表哈密顿量，我们相信在引进相互作用后，费米子数的零频部分 F_0 还是守恒量，因此不出现费米子数不守恒的物理现象，就是说真空的费米子数 F_0 不能激发也不能观测.

(2) 真实世界里存在着零质量的光子，于是所有物理态都会带有光子的零频率的量子数，注意这是一个连续量子数，同时我们也不可能在哈氏量中加上限制集体振幅 Q 的部分，以使集体正则动量 P 变成分立谱，因为这将回到原来的矛盾，如第二节中指出的不可能满足

$$(\langle 真空|e^{i\eta\mathscr{Q}})\phi(x)(e^{-i\eta\mathscr{Q}}|真空\rangle) - \langle 真空|\phi(x)|真空\rangle = \eta\langle 真空|真空\rangle \tag{6.7}$$

和

$$\langle 真空|[Q, P]|真空\rangle = i\langle 真空|真空\rangle; \tag{6.8}$$

而 (6.8) 在第三节中已表明在证 Goldstone 定理时是关键的，而我们使 (6.7)、(6.8) 成立的方式都是依靠在选定物理真空态的无穷小邻处存在另一真空，一则它们可以当作同一个态，另一方面它们是彼此简并和正交的. 意味着我们的真空带有连续量子数. 因此所有的物理态只可以用分布来"归一".

(3) 从 (2.2)、(2.6) 及 (2.13)、(2.14) 来看，我们的推导并不是相对论协变的，理由是因为假定了空间是有限的，在时间方向却未加限制. 例如在 2 维时空的标量场 $\phi(x)$ 按动量空间展开：

$$\phi(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n L}}(a_n(t)e^{i\boldsymbol{k}_n x} + h.c.), \quad \boldsymbol{k}_n = \frac{2\pi n}{L}, \quad \omega_n = \sqrt{\boldsymbol{k}_n^2 + m^2},$$

L 是空间的大小，这种展开式都是非协变的. 对某固定能级 n 作一个 Lorentz 变换就得

$$k_n' = \frac{2\pi n}{L'} - \gamma\left[\frac{2\pi n}{L} - \beta\sqrt{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 + m^2}\right],$$

γ, β 为 Lorentz 变换参量. 当 $m \neq 0$ 时，我们从这个式子解不出与 n 无关的 L 和 L' 的关系；即使当 $m = 0$，L 与 L' 的关系也非简单的 Lorentz 收缩. 事实上，只要用了周期性边界条件，就相当于在一个非相对论性的位阱中讨论问题. 这样算出的能量、动量为

$$H = \sum_n \omega_n\left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2}\right), \quad \mathscr{P} = \sum_n \boldsymbol{k}_n\left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2}\right),$$

其中零点能量是不能测量的，所以需要减除，但零点能不是不变量，不同的 Lorentz 系其减除是不同的. 在我们的情形也一样，因为空间有限，自然就有象 $q_0(t) = Q + Pt$ 的非协变解，在减除后 (2.13)，(2.14) 才是可观测量. 这里同样是零点能和动量在不同坐标系是不同的，减除后便协变了.

值得指出的是，既然在同一坐标系内 P 是不变的，它可能是零或某一个值，为什么我们仍然讨论这个不可观察量？因为算子 P 本身不能是零算符或 c 数，否则 $[P, Q] = 0$，就不会有

$$[\phi(x), \dot\phi(x')]_{t=t'} = i\delta^3(x - x').$$

另一方面，即使 $p = 0$，在 Lorentz 变换下，变换后 p 亦不能为零. 以上说明了 P 不是可

观测量，我们定义的真空的确是 Lorentz 不变的.

（4）本文仅讨论了以定域算符描写的零质量粒子. 问题可以反过来提出，如果原始的场都是带质量的，而由于相互作用的引入产生了零质量束缚态，是否仍存在连续量子数呢？这个问题很有探讨的必要. 此外，零频量子数在规范物理论、自发破缺的规范场理论、自发破缺的一些模型（如 σ 模型）中都是很有趣的. 关于这些问题我们将另文给以讨论.

注　记

当该工作接近完成时，看到了一个讨论类似问题的预印本[1) LBL-8399. 作者 Eylon 也认为零质量场的零频部分需要用一个连续量子数来表示. 但他认为 Q 是个不能明确定义的算符，所以不能讨论 $\mathscr{Q}$ 对真空态的作用及它的真空平均值，因此并未讨论

$$\langle 真空|e^{i\eta\mathscr{Q}}\phi(x)e^{-i\eta\mathscr{Q}}|真空\rangle - \langle 真空|\phi(x)|真空\rangle = \eta\langle 真空|真空\rangle$$

和 Goldstone 定理. 我们却利用 δ-函数对这些问题给出满意解释. Eylon 认为连续量子数只能取 $p=0$，且没有论证 p 为什么不能激发. 我们认为 p 能取任意连续值并证明了量子数 p 不能跃迁.

参　考　文　献

[1] J. Goldstone, *Nuovo Cimento*, **19**(1961), 154, J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **127**(1962), 965.

[2] G. S. Guralnik, *Phys. Rev. Letter.*, **13**(1964), 295.

[3] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, "Advances in Particle Physics". Ed. by R. L. Cool, Interscience Publisher (1968).

[4] R. F. Streater, *Proc. Roy. Soc.*, (London), **A287**(1965), 510.

[5] See for example Albort Messiah. "Quantum Mechanics", Vol. I, p. 302. North-Holland, John Wiley and Sons, Inc.

[6] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 885.

A NEW LOOK AT MASSLESS BOSON FIELDS, SPONTANEOUSLY BROKEN SYMMETRY AND GOLDSTONE THEOREM

Wu Jing-yuan Ju Chang-sheng

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

The sponstaneous breakdown of a continuous symmetry implies the infinite degeneracy of continuous vacuum states, while Goldstone theorem implies the existence of zero mass Goldstone bosons. When a particular vacuum state satisfying

$$a_k|\text{vac}\rangle = 0, \quad b_k|\text{vac}\rangle = 0$$

1) 我们感谢张子贤同志向我们介绍了这篇预印本.

is chosen, other degenerate vacuum states $|\text{vac}\rangle'$ of the broken symmetry are usually viewed as the superposition of states containing different number of zero energy and zero momentum Goldstone bosons, i.e.,

$$|\text{vac}\rangle' = \sum_m C_m \left(a^\dagger_{\boldsymbol{k}=0}\right)^m |\text{vac}\rangle$$

with $a_{\boldsymbol{k}}$ and $a^\dagger_{\boldsymbol{k}}$ representing annihilation and creation operators of Goldstone bosons carrying momentum $\boldsymbol{k}$, while $b_{\boldsymbol{k}}$ representing the annihilation operator of other particles. But actually such a consideration is not correct, because the zero frequency part of a free hermitian massless scalar field $\phi(x)$ can be written as

$$V^{-\frac{1}{2}} \int_V d^3x \phi(\boldsymbol{x}t) = Q + Pt$$

where V is the size of the normalization box and Q, P are space-time independent operators. Due to cannonical quantization, they satisfy $[Q, P] = i$. Thus no zero frequency annihilation and creation operators $a_{\boldsymbol{k}=0}$, $a^\dagger_{\boldsymbol{k}=0}$ can be defined. The free Hamiltonian becomes

$$H = \sum_{\boldsymbol{k}\neq 0} k\left(N_{\boldsymbol{k}} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}P^2$$

with $N_{\boldsymbol{k}} = a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}}$, $k = |\boldsymbol{k}|$. Thus P and $N_{\boldsymbol{k}}$ form a complete commuting set of operators describing the eigenstates. Since the eigenvalues of P are continuous all these eigenstates are not normalizable and all calculation has to be done with the aid of distribution (i.e., the delta function.)

It can be shown that there is no transition between states with different eigenvalues of P, if $\phi(x)$ is to remain massless. Thus the vacuum state is not degenerate, but can be chosen as any one state in an infinitely wide energy band. As a result the eigenvalues of P are not measurable.

The free Lagrangian of $\phi(x)$ has the continuous symmetry

$$\phi(x) \longrightarrow \phi(x) + \eta$$

where η is any number, the generator being $\mathscr{Q} = \int_V d^3x \dot{\phi}(x)$ We discover that $e^{i\eta\mathscr{Q}}|\text{vac}\rangle$ is not orthogonal to $|\text{vac}\rangle$; thus there is no sponstaneously breaking of this symmetry. Using distribution, the difficulty of

$$(\langle\text{vac}|e^{i\eta\mathscr{Q}})\phi(x)(e^{-i\eta\mathscr{Q}}|\text{vac}\rangle) - \langle\text{vac}|\phi(x)|\text{vac}\rangle = \eta\langle\text{vac}|\text{vac}\rangle$$

can easily be resolved. When $\phi(x)$ is complex, each chosen vacuum state is infinitely but discretely degenerate. Thus there is still no spontaneously broken symmetry.

Using these vacuum states, it is easy to verify that in proving Goldstone theorem, the inserted zero momentum and zero energy states do not represent the coherent superposition of states containing different number of Goldstone bosons, and do not necessarily orthogonal to the chosen vacuum state.