

原子核能级密度的半经验分析

金炳年

陆中道

陈星堃 王顺金

(中国科学院高能物理研究所) (中国科学院原子能研究所)

(兰州大学)

摘 要

本文运用统计热力学自洽场理论,分析了壳效应对原子核能级密度的影响以及这种影响随激发能变化的趋势,提出了一个原子核能级密度的半经验公式.该公式只含三个经验参数,却能对近200个核得到比较满意的结果.

能级密度是能级的统计平均,能级密度的规律体现着能谱的规律.为了解原子核能级密度的规律性,应当在能级密度的理论研究中运用核结构理论的概念与方法.本文打算在独立粒子模型的框架内,运用统计热力学自洽场理论,分析壳效应对原子核能级密度的影响以及这些影响随激发能变化的趋势.

在独立粒子模型假定下,采用光滑化技术、运用统计热力学方法,可求得原子核的能级密度公式^[1]:

$$\rho(A, \mathcal{E}) = \frac{1}{12\sqrt{2} \tilde{a}^{\frac{1}{2}} \tilde{U}^{\frac{3}{2}}} \exp\{2\sqrt{\tilde{a}\tilde{U}}\}, \quad (1)$$

其中

$$\tilde{a} = \frac{\pi^2}{6} \tilde{g} \left(\frac{\alpha_0}{\beta_0} \right), \quad (2)$$

$$\tilde{U} = \mathcal{E} - \int_0^{\alpha_0/\beta_0} \tilde{g}(\epsilon) \epsilon d\epsilon. \quad (3)$$

$g(\epsilon)$ 是单粒子能级密度, \tilde{g} 是 g 的适当光滑化的函数. \tilde{U} 是与光滑化相联系的有效激发能, U 是与模型相联系的原子核的实际激发能,

$$U = \mathcal{E} - \int_0^{\alpha_0/\beta_0} g(\epsilon) \epsilon d\epsilon. \quad (4)$$

比较(3)、(4)两式,可知

$$\tilde{U} = U + \Delta, \quad (5)$$

Δ 是光滑化引起的基态能量移动,

$$\Delta = \int_0^{\alpha_0/\beta_0} g(\epsilon) \epsilon d\epsilon - \int_0^{\alpha_0/\beta_0} \tilde{g}(\epsilon) \epsilon d\epsilon. \quad (6)$$

推导上述公式时,作了两种近似:(i)鞍点近似,(ii)光滑化近似,特别是假定 $\tilde{g}''/\tilde{g}\beta_0^2 \ll 1$.上述公式对于独立粒子模型普遍成立.若把核内核子设想为自由粒子,则得理想费密气体模型^[2].这时 \tilde{a} 、 \tilde{U} 不包含壳效应对效应.若把核内核子设想为在 Hartree-

Fock-Bogolyubov 自洽场中运动的粒子, 则得独立准粒子模型. 这时 \tilde{a} 、 \tilde{U} 包含壳效应对效应. 这正是 Newton^[3]、Cameron^[4] 和 Dilg^[5] 等人所达到的结果. H-F-B 自洽场表象对统计热力学问题并不是最好的表象, 最佳表象是统计热力学自洽场表象^[6]. 在这种表象中, 单粒子能级 ϵ_ν 是激发能或温度 Θ 的函数, 因而单粒子能级密度 $g_\theta(\epsilon)$ 也是温度的函数. 当 $\Theta \rightarrow 0$ 时, g_θ 趋于通常的 H-F-B 表象的结果. 随着 Θ 的增加, g_θ 更多地体现出激发态的特征, 壳效应对效应逐渐减弱, 当 Θ 很大时, 对效应和壳效应消失, g_θ 趋于费密气体模型的结果. 在对 g_θ 光滑化时, 要求光滑化函数的宽度正比于 Θ 而远小于 Θ , 这样得来的 \tilde{g}_θ 仍保留 g_θ 的基本特征. 上面的分析可写成下述两组渐近条件:

$$\Theta \rightarrow 0, \quad \begin{cases} \tilde{g}_\theta \rightarrow g, & \tilde{a} \rightarrow a, \\ \Delta \rightarrow 0, & \tilde{U} \rightarrow U; \end{cases} \quad (7)$$

$$\Theta \rightarrow \infty, \quad \begin{cases} \tilde{g}_\theta \rightarrow g_F, & \tilde{a} \rightarrow a_F, \\ \Delta \rightarrow S + \delta, & \tilde{U} \rightarrow U + S + \delta. \end{cases} \quad (8)$$

其中 S 、 δ 分别是基态的壳修正和对修正能量. g_F 、 a_F 是费密气体模型的参数. 满足上述渐近条件的 \tilde{a} 、 \tilde{U} 的可能形式是

$$\tilde{a}(U, S, \delta) = \alpha A(1 + \gamma_1 \delta e^{-\gamma_1 U} + \gamma_2 S e^{-\gamma_2 U}), \quad (9)$$

$$\tilde{U}(U, S, \delta) = \frac{U + \delta(1 - e^{-\gamma_1 U}) + S(1 - e^{-\gamma_2 U})}{(1 + \gamma_1 \delta e^{-\gamma_1 U} + \gamma_2 S e^{-\gamma_2 U})}. \quad (10)$$

上述分析表明, 在统计热力学自洽场表象中, 独立粒子模型所提供的能级密度公式不仅能反映壳效应对效应, 而且能反映这些效应随激发能的变化.

根据上述分析, 我们提出下述能级密度公式:

$$\rho(A, Z, U, J) = \frac{2J+1}{24\sqrt{2}} \left(\frac{\mathcal{J}}{\hbar^2} \right)^{-3/2} \tilde{a}^{1/2} (\tilde{U} + t)^{-2} \exp \left\{ 2\sqrt{\tilde{a}\tilde{U}} - \frac{J(J+1)}{2\sigma^2} \right\}, \quad (11)$$

$$\rho(A, Z, U) = \frac{1}{12\sqrt{2}} \left(\frac{\mathcal{J}}{\hbar^2} \right)^{-1/2} (\tilde{U} + t)^{-3/2} \exp \{ 2\sqrt{\tilde{a}\tilde{U}} \}, \quad (12)$$

$$\tilde{U} = \tilde{a}t^2 - t \geq 0, \quad \sigma^2 = \frac{\mathcal{J}}{\hbar^2} t = 0.0137 A^{3/2} t, \quad (13)$$

其中 \tilde{a} 、 \tilde{U} 分别由 (9)、(10) 两式给定. 参数 α 与费密气体模型相联系, 参数 γ_1 、 γ_2 分别表征对效应和壳效应随激发能增加而减弱的速率. 壳修正 S 和对修正 δ 由 Myers-Swiatecki^[7] 公式给出. 有了能级密度, 可计算

(i) 从中子结合能 B_n 到 $B_n + \Delta E$ 能量范围内的平均能级间隔 D :

$$\frac{2}{D} = \sum_{J=|I-\frac{1}{2}|}^{I+\frac{1}{2}} \rho \left(A, Z, B_n + \frac{\Delta E}{2}, J \right) \quad (\text{只考虑 } S \text{ 波}). \quad (14)$$

(ii) 激发能 U_0 以下的累计能级数 N :

$$N = \int_0^{U_0} \rho(A, Z, U) dU \quad (15)$$

计算所得的 D 、 N 是 α 、 γ_1 、 γ_2 的函数. 设第 i 个核的计算值为 D_i 、 N_i , 实验值为 D_{0i} 、 N_{0i} , 实验误差为 ΔD_{0i} 、 ΔN_{0i} , 则方差函数为

$$\chi^2 = \omega_D \sum_{i=1}^n \left(\frac{D_i - D_{0i}}{\Delta D_{0i}} \right)^2 + \omega_N \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_i - N_{0i}}{\Delta N_{0i}} \right)^2, \quad (16)$$

权重 ω_D, ω_N 分别表示对两类实验数据的置信度, 在计算中, 我们取 $\omega_D = 0.75, \omega_N = 0.25$. 根据 Dilg^[5] 等人的估计, 取 $\Delta N_{0i} = 0.3N_{0i}$. 根据 189 个核的实验数据^{[8]1)}, 用最小二乘法定出最佳参数值为:

$$\alpha = 0.124 \text{ MeV}^{-1}, \quad \gamma_1 = 0.65 \text{ MeV}^{-1}, \quad \gamma_2 = 0.057 \text{ MeV}^{-1}, \quad (17)$$

α 接近费密气体模型的值. 由 γ_1 估算出对效应消失(减弱到 1%)的激发能为 6—7 MeV, 由 γ_2 估算出壳效应消失的激发能为 70 MeV, 与核结构理论的估计值(分别 10 MeV 和 50 MeV)接近. 运用最佳参数, 计算了 189 个核的 $\chi_{D_i} = \frac{D_i - D_{0i}}{\Delta D_{0i}}, \chi_{N_i} = \frac{N_i - N_{0i}}{\Delta N_{0i}}$

以及能量从 0 到 60 MeV 的 $\ln \rho$ 值. 所得结果介绍如下:

(i) D, N 的计算值对实验值的平均偏差为

$$\left| \frac{\Delta D}{D_0} \right| = 46\%, \quad \left| \frac{\Delta N}{N_0} \right| = 89\%.$$

(ii) 有 27 个核 D, N 的计算值与实验值基本符合 ($|\chi_D|, |\chi_N| \leq 1.2$), 有 55 个核 D 的计算值与实验值基本符合 ($|\chi_D| \leq 1.2$). 有 50 个核 N 的计算值与实验值基本符合 ($|\chi_N| \leq 1.2$).

(iii) 有 13 个核 $\left| \frac{\Delta D}{D_0} \right| > 100\%$, 有 26 个核 $\left| \frac{\Delta N}{N_0} \right| > 100\%$ (其中 20 个是奇 A 核, 其 $\delta = 0$, γ_1 失去调节作用).

(iv) 对 $^{41}\text{Ca}, ^{55}\text{Mn}, ^{56}\text{Fe}, ^{60}\text{Co}, ^{62}\text{Ni}, ^{170}\text{Tm}, ^{208}\text{Pb}, ^{240}\text{Pu}$ 等八个核, 将计算的 $\ln \rho$ 与实验值或 Dilg 等人的计算值作了比较: 对 $^{41}\text{Ca}, ^{55}\text{Mn}, ^{56}\text{Fe}, ^{60}\text{Co}, ^{62}\text{Ni}$, 在有数据的能区, 计算值与实验值符合较好(见图 1—5); 对 $^{170}\text{Tm}, ^{240}\text{Pu}$, 与 Dilg 等人的计算值比较, 在 10 MeV 以下基本一致, 在 10 MeV 以上本公式的计算值稍大(见图 6); 对 ^{208}Pb , 与 Dilg 等人的计算值比较, 在 10 MeV 以下相差不大, 在 10 MeV 以上相差较大, Dilg 的 $\ln \rho$ 上升太慢, 本公式上升较快(见图 6).

从理论分析与计算结果可以看出, 运用统计热力学自洽场理论分析原子核能级密度, 使我们得以恰当地处理反映原子核个性的壳效应对效应, 适当地表述壳效应对效应随激发能的变化关系; 因而能够突出原子核能级密度的共性, 抽取出一组与 A, Z, U 无关的参数来概括这些共性, 使能级密度公式具有一定的普适性. 虽然只有三个参数, 却能对 189 个核在 20 MeV 以下的能区得到与 Dilg 等人基本一致的结果. Dilg 等人根据每个核的实验数据个别调节能级密度参数. 由于他们过分强调了原子核能级密度的个性, 忽视了共性, 使得他们所确定的参数难于推广到无数据的核素和较高的能区. 本文给出的半经验公式克服了 Dilg 等人的缺点, 不但可以内插外推, 而且在 20 MeV 以上的能区比 Dilg 公式有明显的改进.

本文的半经验公式的低能行为仍有待改进. 壳修正和对修正能量的划分, 对能级密

1) 实验数据主要取自 [8], 也参考了 [4, 5, 9].

度的低能行为有显著的影响,这一问题尚待今后探讨。

感谢徐躬耦教授和卓益忠同志对本工作的耐心指导。感谢兰州大学数力系李忠信同志在计算中给予的大力帮助。

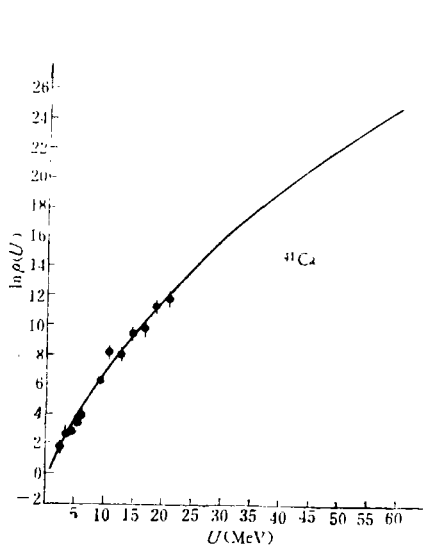


图 1 ● 实验数据 (Dilg; N. P. A217 (1973) 269) —— 计算曲线

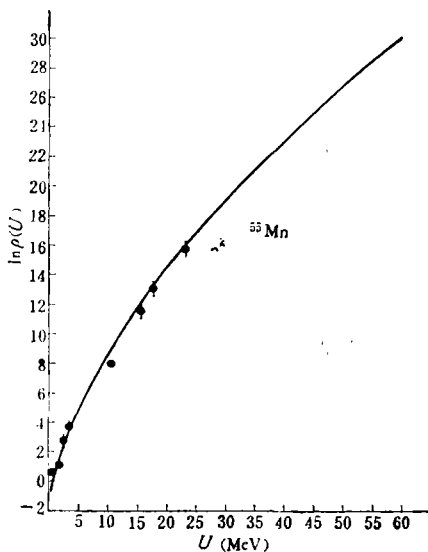


图 2 ● 实验数据 (Dilg; N. P. A217 (1973) 269) —— 计算曲线

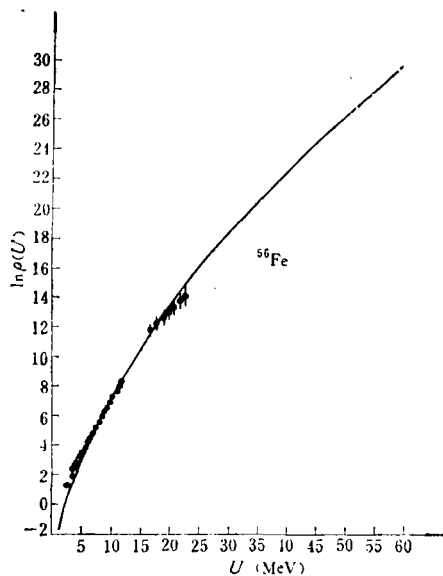


图 3 ● 实验数据 (Dilg; N. P. A217 (1973) 269) —— 计算曲线

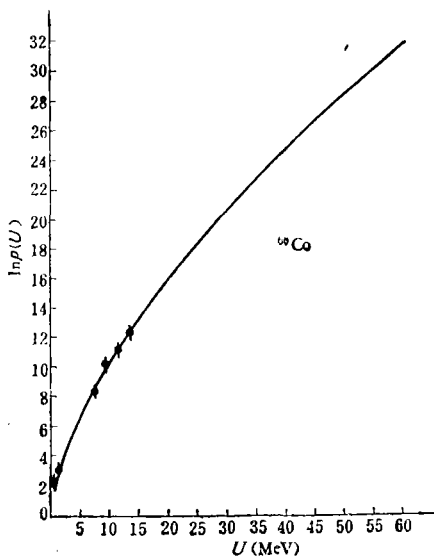


图 4 ● 实验数据 (Dilg; N. P. A217 (1973) 269) —— 计算曲线

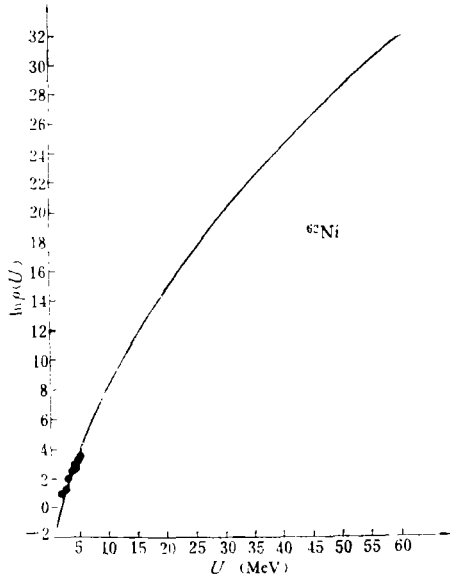


图5 ● 实验数据 (L. u; N. P. A190(1972)229) —— 计算曲线

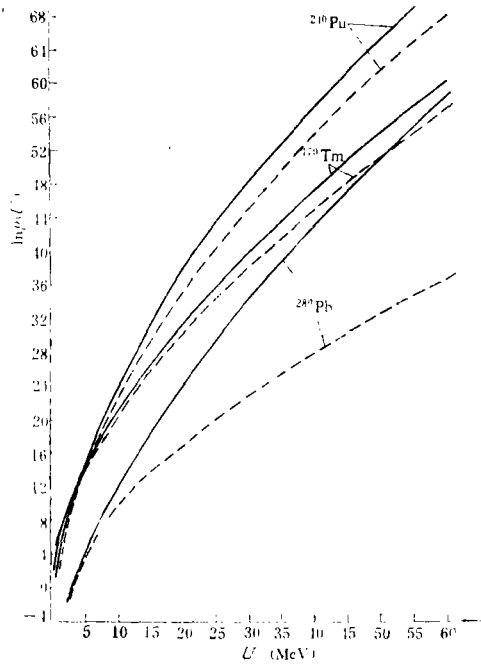


图6 —— 计算曲线
----- Dilg 等的计算

参 考 文 献

- [1] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Nuclear Structure*, Vol. 1.
- [2] H. A. Bethe, *Rev. Mod. Phys.*, **9**(1937), 69.
- [3] T. D. Newton, *Can. J. Phys.*, **34**(1956), 804.
- [4] A. Gilbert and A. G. W. Cameron, *Can. J. Phys.*, **43**(1965), 1446.
- [5] W. Dilg, W. Schantl and H. Vonach, *Nucl. Phys.*, **A217**(1973), 269.
- [6] M. Sano and S. Yamasaki, *Progr. Theor. Phys.*, **29**(1963), 397.
- [7] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Ark. Fys.*, **36**(1967), 343; *Nucl. Phys.*, **81**(1966), 1.
- [8] S. F. Mughabghab and D. I. Garber, *Neutron Cross Sections*, Vol. 1, Resonance Parameters.
- [9] H. Baba, *Nucl. Phys.*, **A159**(1970), 625.

THE SEMI-EMPIRICAL ANALYSIS OF NUCLEAR LEVEL DENSITIES

JIN BING-NIAN

LIU ZHONG-DAO

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*) (*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

CHEN XING-QI

WANG SHUN-JIN

(*Lanzhou University*)

ABSTRACT

From the viewpoint of the self-consistent field theory of statistical thermodynamics, the shell effects and pairing effects on nuclear level densities and their relations with excitation energies are analyzed. On the basis of the above analysis, a Semi-empirical formula of nuclear level density is proposed. Three empirical parameters are used, and the results for about 200 nuclei are satisfied.