第4卷 第3期　　高能物理与核物理　　Vol. 4, No. 3
1980年5月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　May, 1980

裂变的布朗运动模型

胡济民　钟云霄
（北京大学）

摘　要

本文将裂变过程看成为一多维的布朗运动，求得普朗克-福克方程适合于这一核过程的稳定解，并计算了单位时间内的裂变几率，将计算结果与玻尔-惠勒理论作了比较。对 ^{236}U 裂变所作的数值计算表明：此模型主要特点在于考虑了粘滞性对裂变几率的影响，据现有对裂变粘滞性的估计，这种影响将使裂变几率减小 20%—40%。

从经典物理看，在裂变过程中，复合核只能通过无规的变形运动而到达鞍点，这种无规运动是由核的内部运动和集体运动的耦合而引起的。如果只研究在给定的形变（如鞍点）附近的运动，并且认为在运动方程式中形变速率的平方项可以忽略时，则可选择适当的形变参数 $\xi_1\cdots\xi_n$，使 ξ_i 的运动方程可以写成下述简单的朗之万方程：

$$\ddot{\xi}_i + Z_i\dot{\xi}_i + \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = F_i(t), \quad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

式中 $F_i(t)$ 为无规力，$Z_i\dot{\xi}_i$ 为粘滞力，V 为形变位能。如以 $W(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ 表示形变及形变速率的几率分布函数，则 $W(\xi_i, \dot{\xi}_i)$ 满足普朗克-福克方程[1]：

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_i \dot{\xi}_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - \Sigma \frac{\partial V}{\partial \xi_i}\frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}_i} = \Sigma \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_i}(Z_i\dot{\xi}_i W) + T\Sigma Z_i \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{\xi}_i^2}. \tag{2}$$

方程（1）和（2）和布朗运动的方程式是相同的，因而很早就有人提出用这种模型来处理裂变[2]，并在稳态的近似下解决了一维位垒的穿越问题。

在我们的工作中，将进一步考虑下面两个问题：1. 核的变形运动是和内部运动紧密联系在一起的，因此要考虑总的能量守恒和总的相空间（包括内部运动）的体积问题。这和一般的布朗运动有区别，只有考虑到这一点，才能和玻尔-惠勒理论[3]做确切的比较。2. 核的形变是一多自由度的运动，应考虑在多维情况下方程式（2）的解。

在平衡情况下，根据经典统计，原子核处于形变 ξ，动量 P_ξ 的几率正比于

$$\rho_\xi(\varepsilon) \prod_{i=1}^{N} d\xi_i dP_i, \tag{3}$$

式中 $\rho_\xi(\varepsilon)$ 为核处于形变 ξ，激发能为 ε 时的内部运动能级密度，P_i 为与 ξ_i 相对应的动量，对于我们所采用的形变参量 ξ，$P_i = \dot{\xi}_i$。

本文1978年12月23日收到。

$$\varepsilon=\varepsilon_0-\frac{1}{2}\sum_i\dot{\xi}_i^2-V(\xi),\tag{4}$$

式中 ε_0 为核的总激发能．如定义

$$T=\left(\frac{\partial\rho(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right)^{-1}\rho(\varepsilon),\tag{5}$$

并忽略 T 关于 ξ_i 及 $\dot{\xi}_i$ 的微分，则很容易证明

$$W=\rho(\varepsilon),\tag{6}$$

即为式(2)的近似平衡解．正因为这样，才使得布朗运动模型和平衡统计计算的裂变几率联系起来．

现在我们仿照[1, 2]的方法来求对应于穿越裂变位垒的解．令在鞍点处的形变对应于 $\xi_i=0$；并以足标 s 表示对应于鞍点处的各种物理量．则在鞍点附近：

$$V=V_s+\frac{1}{2}\Sigma V_{ij}\xi_i\xi_j,\tag{7}$$

$$\rho(\varepsilon)=\rho(\varepsilon_0-V_s)\exp\left[-\frac{1}{2}(\Sigma\dot{\xi}_i^2+\Sigma V_{ij}\xi_i\xi_j)/T_s\right].\tag{8}$$

在鞍点附近，令

$$W=c\rho(\varepsilon)F(\xi,\dot{\xi}),\tag{9}$$

F 应满足的边界条件是在鞍点的两侧应分别趋近于 1（鞍点的里侧）及 0（鞍点的外侧）．以(9)代入(2)得：

$$\sum_i\dot{\xi}_i\frac{\partial F}{\partial\xi_i}-\sum_{ij}V_{ij}\xi_j\frac{\partial F}{\partial\dot{\xi}_i}=T\sum_i Z_i\frac{\partial^2F}{\partial\dot{\xi}_i^2}-\sum_i Z_i\dot{\xi}_i\frac{\partial F}{\partial\dot{\xi}_i}.\tag{10}$$

令

$$\eta=\Sigma a_i\dot{\xi}_i-\Sigma b_i\xi_i$$

并设 F 为 η 的函数，则(10)式化为：

$$\left[-\sum_i\dot{\xi}_ib_i-\sum_{ij}a_iV_{ij}\xi_j+\sum_i Z_i\dot{\xi}_ia_i\right]\frac{dF}{d\eta}=T\left(\sum_i Z_ia_i^2\right)\frac{d^2F}{d\eta^2}.\tag{11}$$

令

$$-\sum_i\dot{\xi}_ib_i-\sum_{ij}a_iV_{ij}\xi_j+\sum_i Z_i\dot{\xi}_ia_i=\kappa[\Sigma a_i\dot{\xi}_i-\Sigma b_i\xi_i],\tag{12}$$

比较系数可以定出 κ 及 a_i、b_i 的值来．不难证明 κ 应满足一个 $2n$ 阶的代数方程．由于是鞍点，行列式 $\|V_{ij}\|<0$，κ 一定有负的实数解，我们应选取一个 κ 的绝对值最大的负解．(此解对裂变几率的贡献最大)为了以后计算方便，我们取归一化条件为

$$\sum_i a_i^2=1,$$

并选择 a_i, b_i 的符号，令在鞍点里侧 $\eta\to\infty$，在鞍点外侧 $\eta\to-\infty$，并令

$$G=-\frac{\kappa}{\Sigma a_i^2Z_i},$$

我们得到

$$F(\eta)=\sqrt{\frac{G}{2\pi T}}\int_{-\infty}^{\eta}e^{-\frac{G}{2T}u^2}du.\tag{13}$$

为了计算越过位垒的几率，我们需要用一组固定的形变参量 ζ_i，我们将假设在鞍点处 $\zeta_i = 0$，这并不影响计算的普遍性，则对应于这组形变参量，在鞍点处的质量矩阵为 M'_{ij}，粘滞系数矩阵为 Z'_{ij}，位能系数矩阵为 V'_{ij}. ζ_i 与 ξ_i 之间的关系为:

$$\zeta_i = \Sigma a_{ij}\xi_j, \quad \Sigma a_{ij}M'_{jk}a_{ks} = \delta_{is}, \quad \Sigma a_{ij}Z'_{jk}a_{ks} = \delta_{is}Z_i, \quad \Sigma a_{ij}V'_{jk}a_{ks} = V_{is}. \tag{14}$$

在鞍点处经过一个正交转换，可将矩阵 V'_{ij} 对角化.

$$\zeta_i = \sum_i b_{ij}X_j, \quad \sum_{j,k} b_{ij}V'_{jk}b_{ks} = V''_i\delta_{is}, \text{ 式中 } \sum_j b_{ij}b_{js} = \delta_{is}. \tag{15}$$

由于是鞍点，我们得到 $V''_1 < 0$，而所有其它 V''_i 均大于零.

$$X_i = \Sigma b_{is}a_{sj}\xi_j, \quad \xi_l = \Sigma A_{is}b_{sj}X_j, \tag{16}$$

A_{is} 为 a_{is} 的逆矩阵.

我们对 ξ_i 进行一次正交变换 $\xi_i = \sum_j C_{ij}\eta_j$，也可以使 V_{ij} 对角化:

$$\sum_{ij} V_{ij}\xi_i\xi_j = -\omega_1^2\eta_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \omega_i^2\eta_i^2, \tag{17}$$

$\omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n$ 为在鞍点的振动频率.

体系处于 $d\xi_i$, $d\dot{\xi}_i$ 间的几率为

$$P = W \prod_{i=1}^{n} d\dot{\xi}_i \prod_{i=1}^{n} d\xi_i = W \prod_{i=1}^{n} d\dot{\xi}_i \prod_{i=1}^{n} dX_i \sqrt{\|M'_{ij}\|};$$

单位时间内流过鞍点的几率流为:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \dot{X}_1 W \sqrt{\|M'_{ij}\|} \prod_{i=1}^{n} d\dot{\xi}_i \prod_{i=2}^{n} dX_i \\ &= \sum_{sj} b_{1s}a_{sj}\dot{\xi}_j W \sqrt{\|M'_{ij}\|} \prod_{i=1}^{n} d\dot{\xi}_i \prod_{i=2}^{n} dX_i; \end{aligned} \tag{18}$$

式中 $\|M'_{ij}\|$ 为质量矩阵 M'_{ij} 的行列式，对 $\dot{\xi}_i$ 及 X_i 积分，我们得到单位时间的裂变几率

$$\begin{aligned} P_f &= \int\cdots\int \sum_{s,j} b_{1s}a_{sj}\dot{\xi}_j W \sqrt{\|M'_{ij}\|} \prod_{i=1}^{n} d\dot{\xi}_i \prod_{i=2}^{n} dX_i \\ &= c\left(\sum_{i,j} b_{1i}a_{ij}a_j\right)\rho(\varepsilon_0 - V_s)\frac{(2\pi T_s)^n}{2\pi}\sqrt{\frac{f}{1+Bf}}\sqrt{\frac{\|M'_{ij}\|}{V''_2\cdots V''_n}}. \end{aligned} \tag{19}$$

式中

$$f = \frac{G}{1+G}, \quad B = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{V''_i}\left(\sum_{s,j} b_s A_{sj} b_{ji}\right)^2,$$

$$\frac{\sqrt{\|M'_{ij}\|}}{\sqrt{V''_2\cdots V''_n}} = \frac{\sqrt{|V''_1|}}{|\omega_1|}\frac{1}{\omega_2\cdots\omega_n}.$$

核处于力学平衡态 $\zeta_i = \zeta_{i0}$(即位能极小处)附近的几率为(据式(13)，这里 $F(\eta)\to 1$):

$$W = c\rho(\varepsilon_0 - \varepsilon) = c\rho(\varepsilon_0)e^{-\varepsilon/T_0},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_i\left(\frac{P_i^2}{m_i} + m_i\omega_{i0}^2(\zeta_i - \zeta_{0i})^2\right).$$

规定

$$\int W \prod_{i=1}^{n} dP_i d\zeta_i = 1,$$

得到

$$\frac{1}{c} = \rho_0(\varepsilon_0)\frac{(2\pi T_0)^n}{\omega_{10}\cdots\omega_{n0}}. \tag{19'}$$

式中 ω_{i0} 为平衡态附近的振动频率. 代入 (19) 式得

$$P_f = \sum_{ij} b_{1i}a_{ij}a_j \frac{\rho(\varepsilon_0 - V_s)}{\rho_0(\varepsilon_0)} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{T_s}{T_0}\right)^n \sqrt{\frac{f}{1+fB}} \frac{\sqrt{|V_1''|}}{|\omega_1|} \frac{\omega_{10}\cdots\omega_{n0}}{\omega_2\cdots\omega_n}. \tag{20}$$

根据玻尔-惠勒理论,单位时间的裂变几率为

$$P_{fB} = \frac{1}{h\rho_0(\varepsilon_0)}\rho(\varepsilon_0 - V_s)T_s. \tag{21}$$

考虑到集体振动自由度，$\rho_0(\varepsilon_0)$ 应变为 $\rho_0(\varepsilon_0)\left(\frac{T_0}{\hbar}\right)^n \frac{1}{\omega_{10}\cdots\omega_{n0}}$, $\rho(\varepsilon_0 - V_s)$ 应改为$\rho(\varepsilon_0 - V_s)\left(\frac{T_s}{\hbar}\right)^{n-1}\frac{1}{\omega_2\cdots\omega_n}$, 因此，(21) 应改为

$$P_{fB} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{T_s}{T_0}\right)^n \frac{\omega_2\cdots\omega_n}{\omega_{10}\cdots\omega_{n0}}.$$

故

$$\frac{P_f}{P_{fB}} = \left(\sum_{ij} b_{1i}a_{ij}a_j\right)\sqrt{\frac{f}{1+fB}}\frac{\sqrt{|V_1''|}}{|\omega_1|}. \tag{22}$$

在一维的近似下:

$$\frac{P_f}{P_{fB}} = (\sqrt{1+\alpha^2} - \alpha), \quad \alpha = \frac{Z}{2|\omega_1|}. \tag{23}$$

这就是 Kramers 的结果[2].

为了获得一些数值上的概念，我们对复合核 ^{236}U 的裂变用液滴模型进行了具体的计算，选用了 Myers-Swiatecki 的质量公式和参数[4]. 关于形变选用了文献 [5] 的选参量的方法,用柱坐标

$$\rho^2 = A(\zeta_1^2 - z^2)[\zeta_2 z^2 - 2\zeta_1\zeta_3 z + \zeta_1^2(1 + \zeta_3^2 - \zeta_2)],$$

式中

$$A = \frac{1}{\zeta_1^3}(1 + \zeta_3^2 - 0.8\zeta_2)^{-1}$$

是保持体积为 $\frac{4\pi}{3}$ 的因子，ζ_3 为非对称形变的参数，它的值决定断裂时两碎块的质量比. 我们只考虑 ζ_1 和 ζ_2 两维的布朗运动,把 ζ_3 取为一系列固定值，来研究不同碎块质量比时的裂变几率. 计算所得 P_f/P_{fB} 的值如表所示

表中 η 的单位为

$$\sqrt{核质量 \times 球形核表面能}/(球形核半径)^2$$

对 ^{236}U，η 的单位为 6.73×10^{17} MeV-sec-cm^{-3}. 有人估计这类裂变核的粘滞系数为 10^{16}MeV-sec-cm^{-3}，相当于 0.015 个单位；γ 为对应于 ζ_3 值的碎片质量比. 表上最后一行

P_f/P_{fB} 值

ξ_3	r \ 粘滞系数 η	0	0.01	0.015	0.02	0.025	0.03
0	1	1.012	0.871	0.810	0.751	0.698	0.648
0.02	1.16	1.011	0.869	0.807	0.748	0.694	0.644
0.04	1.35	1.005	0.869	0.808	0.749	0.703	0.645
0.06	1.58	1.014	0.871	0.808	0.750	0.696	0.647
0.08	1.86	1.014	0.873	0.811	0.753	0.699	0.650
0.10	2.20	1.016	0.876	0.815	0.757	0.703	0.654
一维近似		1	0.842	0.773	0.713	0.657	0.601

为用公式(23)计算的结果，对不同的 ξ_3 值计算结果基本是相同的，因此表上只列了一行.

从表上可以看出：(i) 当 $\eta=0$ 时，布朗运动模型的结果基本上和玻尔-惠勒的平衡统计理论是一致的，仅当粘滞系数较大时，才有较大的差别，而这种差别估计不过在 20%—40% 之间. 能够考虑粘滞力对裂变几率的影响是这模型的特点. (ii) 对不同的碎块质量比，比值 P_f/P_{fB} 是基本上相同的，并且和一维近似也很接近. 由此可以推测，碎块质量比例不同时裂变几率的差别似乎主要由位垒高度不同引起的.

应当指出，这种近似计算，仅当 V_s 比 T_s 大，单位时间内裂变几率较小的情况下才能应用，因此如文献 [6] 中将这种近似应用于高激发态或裂变位垒很低的情况是不合理的，这一点已有人指出来了，在后一种情况下，应该解含时间的普朗克-福克方程[7]. 这类问题还有待于进一步探讨.

附录 关于穿越鞍点几率

为了说明方便，我们采用布朗粒子运动的说法. 以 n 维矢量 $\boldsymbol{X}$ 及 $\boldsymbol{P}$ 分别表示粒子的位置及广义动量. 设 0 为鞍点（取作座标原点），C 为位能极小点（力学平衡点），并令 X_1 为在 0 点位能极大的方向，在 0 点，其他方向位能均为极小，则在 0 点附近穿越 $X_1=0$ 平面的粒子均可以为是越过鞍点的粒子. 如粒子的分布函数为 $W(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})$，则在区间

$$\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{X}+d\boldsymbol{X} \text{ 及 } \boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}+d\boldsymbol{P}$$

的粒子数为:

$$W(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})d\boldsymbol{X}d\boldsymbol{P}.$$

设粒子在 X_1 方向运动的速度为 $\dot{X}_1$（为 $P_1\cdots P_n$ 的函数），则在 Δt 时间间隔内穿越 $X_1=0$ 平面的粒子数为:

$$W(\boldsymbol{X},\boldsymbol{P})_{X_1=0}d\boldsymbol{P}(\dot{X}_1\Delta t)\prod_{i=2}^{n}dX_i,$$

因此在单位时间内穿越 $X_1=0$ 平面的粒子总数为:

$$P_f=\int\cdots\int \dot{X}_1W(\boldsymbol{P},\boldsymbol{X})_{X_1=0}d\boldsymbol{P}\prod_{i=2}^{n}dX_i, \tag{A1}$$

此即文中式(19). 严格说 $X_2\cdots X_n$ 的积分区间应限于鞍点附近，但因在 $X_1=0$ 的平面上，对任何远离鞍点的 $X_2\cdots X_n$ 的值，W 都很快趋近于 0，因此可将积分区间扩展到 $-\infty$

$-\infty$.

为了使 (A1) 表示单位时间穿越鞍点的几率，W 应满足归一化条件:

$$\iint_{PX} W d\boldsymbol{P} d\boldsymbol{X} = 1 \tag{A2}$$

上式积分应包括所有在鞍点里侧的区间，但实际上 W 只在 C 点(力学平衡点)附近取较大的值，因此在 (A2) 中可以近似地取 C 点附近的 W 值. 根据我们约定的 $F(\eta)$ 的边界条件，在 C 点附近 $F(\eta)\to 1$，因此 $W = c\rho$. 以此代入式 (A2) 完成积分，就得到文中式 (19′). 以由 (A2) 定出的 c 值代入 (A1)，即求得 P_f.

实际上，如果不加归一化，则 (A2) 左方的积分表示粒子总数，而 (A1) 表示单位时间穿越鞍点的粒子数，则单位时间穿越鞍点的几率为

$$\frac{\int\cdots\int \dot{X}_1 W(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{X})_{X_1=0} d\boldsymbol{P} \prod_{i=2}^{n} dX_i}{\int\cdots\int W(\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{X}) d\boldsymbol{P} d\boldsymbol{X}},$$

结果与上述相同.

参　考　文　献

[1] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.*, **15**(1943), 1.
[2] H. A. Kramers, *Physica*, **7**(1940), 284.
[3] N. Bohr, A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **56**(1939), 426.
[4] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Arkiv Fysik*, **36**(1968), 343.
[5] J. Schirmer, S. Knaak, G. Sussmann, *Nucl. Phys.*, **199A**(1973), 31.
[6] V. M. Strutinsky, *Physics Letters*, **47B**(1973), 120.
[7] 吴锡真、卓益忠，«从布朗运动观点研究裂变速率问题»，1978 年中国物理学会报告.

BROWNIAN MOTION MODEL OF THE FISSION PROCESS

Hu Ji-min　　Zhong Yun-xiao

(*Peking University*)

ABSTRACT

Fission process is considered as a multidimensional Brownian motion. The Planck-Fokker equation is solved and the fission probability in the steady state approximation is calculated. The results is compared with the Bohr-Wheeler theory. Numerical calculations are performed for the fission of ^{236}U and the results are discussed.