

# 低能强流带电粒子束的非线性 空间电荷效应理论

郁庆长

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

本文用解析方法研究低能强流带电粒子束的非线性空间电荷效应。文中确定了粒子温度为零的束的发射度图形形状的变化和束的初始束流密度分布之间的关系，由此导出了计算粒子温度不很高的束在非线性空间电荷场作用下发射度图形变化和有效发射度增长的近似方法。

## 一、引 言

在设计强流带电粒子束的加速系统和输运系统时，我们必需考虑粒子束的空间电荷效应。强流带电粒子束一般都是不均匀的，因此由束的空间电荷产生的电场就包含着非线性成分。带电粒子束在运动过程中受这一非线性电场的作用其发射度图形（即束中粒子在相平面上所占据的区域）将逐渐被扭曲（图1），从而导致束的光学质量变坏。这一效应称为非线性空间电荷效应。在粒子能量较低时它更为严重。为了保证束的光学质量，我们必须使这一效应不超过容许的限度。

研究非线性空间电荷效应一般利用数值计算的方法<sup>[1-6]</sup>，这些计算是比较繁杂的。我们利用解析方法来进行研究，其优点是容易显示出各个物理量之间的数量关系。在本文中我们首先确定了粒子温度为零的束的束流密度分布积分曲线和其发射度图形变化之间的关系，由此导出了计算束的发射度图形变化的方法，并且把它推广到粒子温度不很高的束。在粒子温度为零时束的发射度图形缩成一条曲线，我们称之为发射度线，它在非线性空间电荷场作用下也同样被扭曲（图2）。

我们限于讨论带形束和轴对称束。在第二节到第四节中我们将假定束沿 $z$ 轴平行入射，入射点 $z=0$ ，还假定不存在任何横向外电场和磁场。在第五节中我们将把理论推广

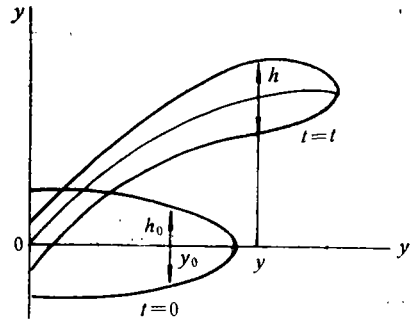


图 1

到其它情况。我们也不考虑纵向空间电荷效应。

## 二、带形束在运动过程中 发射度图形的变化

我们认为带形束在水平方向的宽度  $b$  远大于垂直方向的宽度  $Y(z)$ 。以  $y$  表示带电粒子束中粒子在垂直方向的坐标，假定束对  $y = 0$  平面对称。

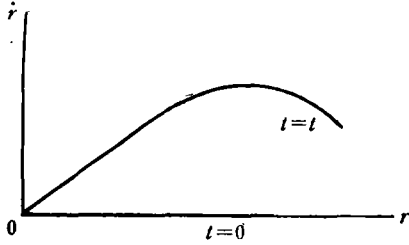


图 2

设  $I(y_0)$  为  $z = 0$  处束中  $|y| \leq y_0$  的那部分束流的强度，显然

$$I(y_0) = 2b \int_0^{y_0} j_0(y) dy. \quad (1)$$

$j_0(y_0)$  是束的初始束流密度，我们设它只与  $y_0$  有关。束的总束流强度  $I_s$  为

$$I_s = I(Y_0), \quad (2)$$

$Y_0$  是  $Y$  在  $z = 0$  处的值。

在粒子温度为 0 时，粒子在  $y$  方向的运动方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(y_0, t) = \frac{\eta I(y_0)}{2b\epsilon_0 v(t)}. \quad (3)$$

我们认为粒子在  $t = 0$  时  $z = 0$ ,  $y = y_0$ ,  $\dot{y} = 0$ 。此处  $t$  为时间， $\eta$  为粒子的荷质比， $\epsilon_0$  为真空介电常数， $v$  为粒子的纵向速度。方程 (3) 的解可写为

$$y(y_0, t) = A(t) I(y_0) + y_0. \quad (4)$$

当  $y_0 = Y_0$  时

$$Y(t) = y(Y_0, t) = A(t) I_s + Y_0, \quad (5)$$

$$A(t) = (Y(t) - Y_0) / I_s. \quad (6)$$

由此，

$$y(y_0, t) = \beta [Y(t) - Y_0] + \xi Y_0, \quad (7)$$

$$\dot{y}(y_0, t) = \beta \dot{Y}(t), \quad \beta = \frac{I(y_0)}{I_s}, \quad \xi = \frac{y_0}{Y_0}. \quad (8)$$

这里

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \quad \dot{Y} = \frac{dY}{dt}.$$

$Y$ ,  $\dot{Y}$  可以由求带形束发散的方法求出<sup>[8,9]</sup>。由式 (7), (8) 可以确定带形束任一时刻发射度线的形状。

实际上由  $\beta(\xi)$  曲线求  $y(y)$  曲线 (即发射度线) 相当于利用式 (7), (8) 进行线性变换。在图 3 中它相当于曲线  $OB$  变换为曲线  $OM$ ，而矩形  $OABC$  相应地变换为平行四边形  $ODMN$ 。

由式 (7), (8) 还可计算出发射度线上各点的斜率，

$$\frac{dy}{dy} = \frac{\dot{Y}}{Y - Y_0 \left(1 - \frac{1}{\frac{d\beta}{d\xi}}\right)}, \quad (9)$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{Y_0}{I_s} \frac{dI}{dy} = \frac{j_0(y_0)}{\bar{j}_0}, \quad (10)$$

$\bar{j}_0$  是束的初始平均束流密度,

$$\bar{j}_0 = \frac{I_s}{2bY_0}. \quad (11)$$

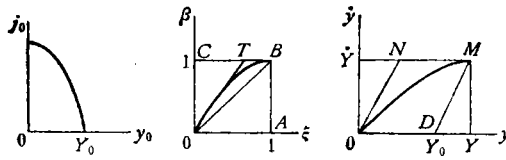


图 3

图 3 是初始束流密度按抛物线分布的带形束的  $j_0(y_0)$ ,  $\beta(\xi)$  和  $y(y)$  曲线. 对于这种束

$$j_0 = \frac{3}{2} \bar{j}_0 (1 - \xi^2), \quad (12)$$

$$\beta = \frac{3}{2} \xi \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right), \quad (13)$$

$$y = \frac{3}{2} \xi \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right) (Y - Y_0) + y_0, \quad (14)$$

$$\dot{y} = \frac{3}{2} \xi \left(1 - \frac{\xi^2}{3}\right) \dot{Y}. \quad (15)$$

注意在  $y = Y$  处  $\frac{dy}{dy} = 0$ . 这一点对于一切束边缘处束流密度连续下降到 0 的带形束都适合.

图 4 是束流密度遵循 Gauss 分布的带形束的  $j_0(y_0)$ ,  $\beta(\xi)$  和  $y(y)$  曲线. 对于这种束

$$j_0(y_0) = \frac{I_s}{\sqrt{2\pi\sigma b}} \exp\left(-\frac{y_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (16)$$

$\sigma$  为一常数. 这种束没有一个明确的边界, 我们以  $I(Y_0) = 0.95 I_s$  来确定它的边界. 此时

$$\beta = \frac{1}{0.95} \operatorname{erf}\left(\frac{y_0}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (17)$$

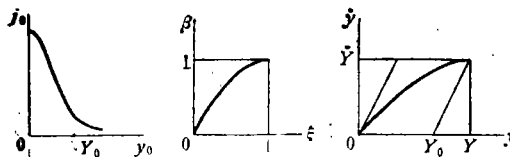


图 4

上述方法可以推广到粒子温度不很高的情况。我们可以认为上面求出的发射度线是束的发射度图形的中心线。假定在  $t = 0$  时束的发射度图形上  $y_0$  处图形宽度为  $h_0(y_0)$ ，则在任一时刻  $t$  发射度图形上  $y(y_0, t)$  处图形宽度  $h(y, t)$  为 (图 1)

$$h(y, t) = h_0(y_0) \left/ \frac{dy}{dy_0} \right., \quad (18)$$

$$\frac{dy}{dy_0} = \left( \frac{Y}{Y_0} - 1 \right) \frac{j_0(y_0)}{j_0} + 1. \quad (19)$$

利用这一方法计算束的发射度图形，图形的面积将保持恒定，这是符合 Liouville 定理的。

还可以计算束中各处的束流密度  $j$  和空间电荷密度  $\rho$ 。

$$j(y, z) = j_0 \left/ \frac{dy}{dy_0} \right., \quad (20)$$

$$\rho(y, z) = \frac{j(y, z)}{v(z)}. \quad (21)$$

随着  $z$  的增加， $Y \gg Y_0$ ，

$$j(y, z) = \frac{j_0 Y_0}{Y}. \quad (22)$$

这表明随着束的发散束流密度将逐渐趋向均匀。

### 三、非均匀带形束在运动过程中有效发射度的增长

由于非均匀束在运动过程中发射度图形受非线性空间电荷场的作用而扭曲，它的有效发射度不断增长。设某一时刻带形束在  $(y, y)$  相平面上的发射度图形为  $F$  (图 5)，能完全容纳  $F$  的最小椭圆面积为  $S$ ，则我们定义带形束在  $y$  方向的 (规一化) 有效发射度为

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi c} S, \quad (23)$$

式中  $c$  为真空中的光速。

我们先讨论粒子温度为 0 的情况。带形束的发射度线可以由  $\beta(\xi)$  曲线经过线性变换得到。现在我们作一个完全容纳  $\beta(\xi)$  曲线的最小椭圆，设其面积为  $S_\beta$ 。此椭圆经过同样的线性变换可以变成完全容纳发射度线的椭圆 (图 6)，因此

$$S = Y_0 \dot{Y} S_\beta. \quad (24)$$

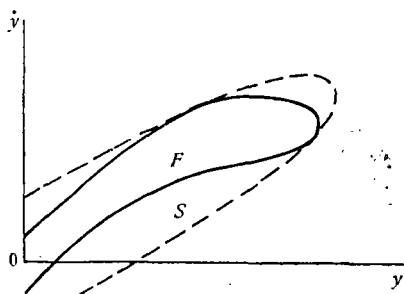


图 5

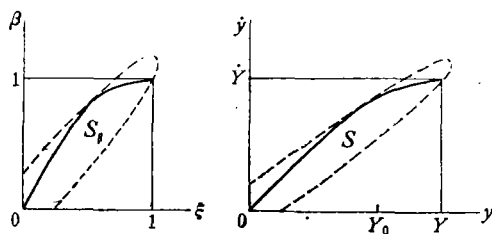


图 6

显然,束的有效发射度  $\varepsilon$  与  $Y_0$  成正比,并且随  $\dot{Y}$  成正比地增长。

$S_\beta$  的值与  $\beta(\xi)$  曲线的形状有关,亦即和束流密度的分布有关。例如对于初始束流密度按抛物线分布的带形束(图 3),  $S_\beta$  近似为三角形  $OTB$  面积的两倍,即  $\frac{1}{3}$ 。因此

$$\varepsilon = \frac{1}{\pi c} Y_0 \dot{Y} \times \frac{1}{3} = \frac{\nu Y_0}{3\pi c} \frac{dY}{dz}. \quad (25)$$

对于粒子温度不很高的情况,我们可以近似地认为

$$\varepsilon = \left[ \varepsilon_0^2 + \left( \frac{1}{\pi c} Y_0 \dot{Y} S_\beta \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (26)$$

$\varepsilon_0$  为带电粒子束的初始发射度。

#### 四、轴对称束

轴对称束的非线性空间电荷效应可以用类似的方法来研究。以  $R$  表示束的半径,  $r$  表示束中粒子的径向坐标,  $R_0$  和  $r_0$  表示  $t = 0$  ( $z = 0$ ) 时  $R$  和  $r$  的值。在粒子温度为 0 时,如果不考虑束中粒子轨迹的交叉,粒子的径向运动方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} r(r_0, t) = \frac{\eta I(r_0)}{2\pi \varepsilon_0 \nu(t) r(r_0, t)}, \quad (27)$$

$$I(r_0) = 2\pi \int_0^{r_0} j_0(r) r dr.$$

在  $R$  比  $R_0$  大不太多时方程 (27) 的解可近似写作

$$r(r_0, t) = \beta[R(t) - R_0] + \xi R_0, \quad (28)$$

$$\dot{r}(r_0, t) = \beta \dot{R}(t), \quad \beta = \frac{I(r_0)}{I_0 \xi}, \quad \xi = \frac{r_0}{R_0}. \quad (29)$$

这里

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \dot{R} = \frac{dR}{dt}.$$

$R, \dot{R}$  可由求轴对称束发散的方法求出<sup>[8-11]</sup>。由式 (28)、(29) 可以确定轴对称束任一时刻发射度线的形状。实际上式 (28)、(29) 和式 (7)、(8) 形式上是完全一样的,仅  $\beta$  的形式不同。图 7 是初始束流密度按抛物线分布的轴对称束的  $j_0(r_0)$ ,  $\beta(\xi)$  和  $\dot{r}(r)$  曲线。对于这种束

$$j_0(r_0) = 2\bar{j}_0(1 - \xi^2), \quad (30)$$

$$\beta(\xi) = 2\xi \left( 1 - \frac{\xi^2}{2} \right), \quad (31)$$

$$r = 2\xi \left( 1 - \frac{\xi^2}{2} \right) (R - R_0) + r_0, \quad (32)$$

$$\dot{r} = 2\xi \left( 1 - \frac{\xi^2}{2} \right) \dot{R}. \quad (33)$$

同样我们可以计算发射度线上各点的斜率

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{\dot{R}}{R - R_0 \left(1 - \frac{1}{\frac{d\beta}{d\xi}}\right)}, \tag{34}$$

$$\frac{d\beta}{d\xi} = \frac{1}{j_0} \left[ 2j_0(r_0) - \frac{I(r_0)}{\pi r_0^2} \right]. \tag{35}$$

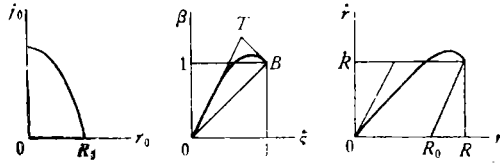


图 7

上述方法同样可以推广到粒子温度不很高的情况, 此时式(18)、(19)为下面二式所代替.

$$h(r, t) = \frac{h_0(r_0)}{\frac{dr}{dr_0}}, \tag{36}$$

$$\frac{dr}{dr_0} = \left(\frac{R}{R_0} - 1\right) \cdot \frac{1}{\frac{d\beta}{d\xi}} \cdot \left[ 2j_0(r_0) - \frac{I(r_0)}{\pi r_0^2} \right] + 1. \tag{37}$$

对于非均匀轴对称束在运动过程中有效发射度的增长, 式(23)、(24)同样适用, 但  $\dot{Y}, Y_0$  应以  $\dot{R}, R_0$  代替.

应当注意, 对于带形束  $\beta(\xi)$  总是单调上升的, 而对于轴对称束  $\beta(\xi)$  可以不是单调上升的. 如果一个轴对称束的  $\beta(\xi)$  曲线上有一段  $\frac{d\beta}{d\xi} < 0$ , 当  $R$  增大到一定程度时发射度线就会变为非单值的(图8). 这种非单值性表明粒子温度为 0 的带电粒子束中某些粒子的轨迹已经发生交叉.

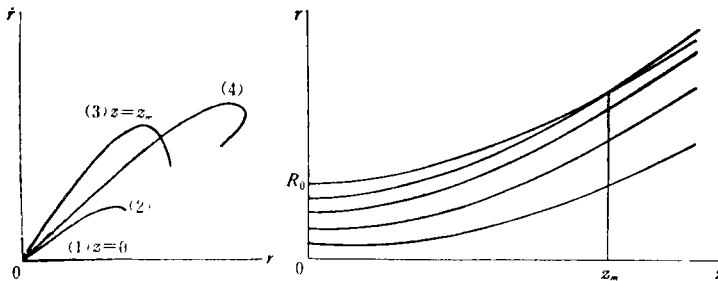


图 8

我们知道, 运动方程(27)不适用于粒子轨迹已经发生交叉的情况. 因此我们需要知道在什么情况下粒子轨迹开始发生交叉. 容易看出, 在粒子轨迹开始发生交叉时(图8中曲线(3))发射度线上交叉点处的斜率  $\frac{dr}{d\xi}$  应为无穷大. 由此可从式(34)导出粒子轨迹开始发生交叉的条件

$$d\beta/d\xi = -R_0/(R - R_0). \tag{38}$$

式(38)右端在  $z = 0$  处为  $-\infty$ ，随着束的发散逐渐趋于 0。由此可知：

1. 如果轴对称束  $\beta(\xi)$  曲线上各处  $\frac{d\beta}{d\xi} \geq 0$ ，则在粒子温度为 0 时束中粒子轨迹不可能发生交叉；

2. 如果轴对称束  $\frac{d\beta}{d\xi}$  在  $r = r_m$  处取最小值  $\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\min} < 0$ ，则粒子轨迹交叉最先发生于  $r_m$  处；

3. 设轴对称束在  $z = z_m$  处粒子轨迹开始发生交叉，则

$$R(z_m) = R_0 \left[ 1 - \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)_{\min}} \right]. \tag{39}$$

显然我们的理论仅适用于  $z \leq z_m$  处。

再看一下前面的例子(图 7)。对于初始束流密度按抛物线分布的轴对称束，

$$\frac{d\beta}{d\xi} = 2 - 3\xi^2. \tag{40}$$

当  $\xi = 1$  时  $\frac{d\beta}{d\xi}$  取最小值  $-1$ ，由式(39)可知束在  $R = 2R_0$  处粒子轨迹开始交叉。一般来说，轴对称束束流越集中在中心，粒子轨迹交叉就发生得越早。

### 五、理论的推广

在本节中我们将把上述理论推广到非平行入射束和存在线性聚焦力的情况，我们只讨论带形束。

先研究非平行入射束。在粒子温度为 0 时，设  $z = 0$  处粒子的初始  $y$  向速度  $y_0 = \xi \dot{Y}_0$ ，则方程(3)的解为

$$y(y_0, t) = \beta(Y - Y_n) + \xi Y_n, \tag{41}$$

$$\dot{y}(y_0, t) = \beta(\dot{Y} - \dot{Y}_0) + \xi \dot{Y}_0. \tag{42}$$

这里  $Y_n = \dot{Y}_0 t + Y_0$ ，在不存在空间电荷力情况下  $Y = Y_n$ 。利用线性变换(41)、(42)可由  $\beta(\xi)$  曲线求出任一时刻的  $y(y)$  曲线(图 9)。

下面研究存在线性聚焦力的情况，此时粒子的运动方程为

$$\frac{d^2}{dt^2} y(y_0, t) = \frac{\eta I(y_0)}{2b\epsilon_0 v(t)} - k(t)y, \tag{43}$$

$k(t)y$  表示线性聚焦力的作用。我们假定平行入射的带形束在此聚焦力作用下束的宽度保持不变，即  $Y(t) = Y_0$ 。显然

$$k(t) = \frac{\eta I_s}{2b\epsilon_0 v(t) Y_0}, \tag{44}$$

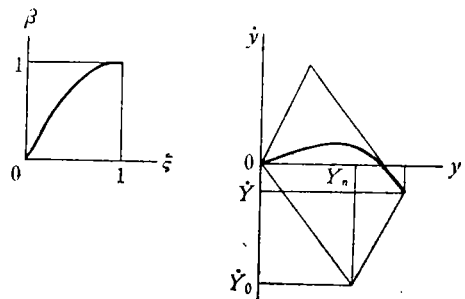


图 9

$$\frac{d^2}{dt^2} y(y_0, t) \approx \frac{\eta I_s}{2b\epsilon_0 v(t)} (\beta - \xi). \quad (45)$$

这里认为束中粒子的  $y \approx y_0$ . 方程 (45) 的解为

$$y(y_0, t) = \beta(Y_p - Y_0) + \xi(2Y_0 - Y_p), \quad (46)$$

$$\dot{y}(y_0, t) = \beta\dot{Y}_p - \xi\dot{Y}_p. \quad (47)$$

这里  $Y_p$  为不存在线性聚焦力时束的宽度. 利用式 (46)、(47) 可由  $\beta(\xi)$  曲线求出  $\dot{y}(y)$  曲线.

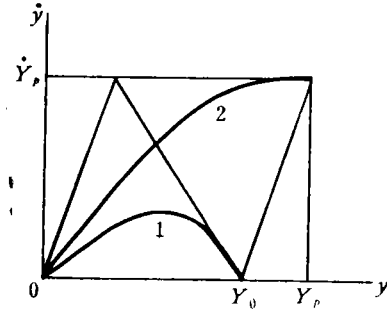


图 10

应当注意, 无论式 (41)、(42) 和式 (46)、(47), 都只适用于  $\dot{y}(y)$  为单值函数的情况, 这一点和上节是相同的.

作为一个例子, 图 10 表示粒子温度为 0 的非均匀强流带形束在两种加速电场中发射度线形状的变化. 束是平行入射的. 图中曲线 1 对应于 Pierce 加速电场, 束在此电场中受到线性聚焦作用使束宽度保持不变; 曲线 2 对应于均匀加速电场. 两电场纵向的平均电场强度是相同的. 可以看出, Pierce 电场虽然能使束保持不发散, 但并不能减少束的非线性空间电荷效应.

## 六、结 语

从以上研究中可以看出, 带电粒子束在非线性空间电荷场作用下发射度图形的变化与其束流密度分布有着密切关系. 粒子温度为 0 的带电粒子束任一时刻的发射度图形 (发射度线) 可由  $\beta(\xi)$  曲线经过线性变换得到. 由此可以作出粒子温度不太高的带电粒子束的发射度图形. 带电粒子束在运动过程中有效发射度的增长与  $\dot{Y}$  (或  $\dot{R}$ ) 成正比且与  $\beta(\xi)$  曲线的形状有关. 由于  $\beta(\xi)$  曲线是束流密度分布的积分曲线, 因此束流密度分布的细节对发射度图形的变化影响不大.

本文仅讨论了带形束和轴对称束, 在束流运输系统中还经常遇到椭圆截面束. 可以把它看作是居于带形束和轴对称束之间的粒子束. 因此根据对带形束和轴对称束的非线性空间电荷效应研究的结果, 可以对椭圆截面束在非线性空间电荷场作用下发射度图形的变化和有效发射度的增长作出大致的估计. 对带形束、轴对称束和椭圆截面束的非线性空间电荷效应还可以用矩阵方法来研究, 这一问题我们将另行讨论<sup>[12]</sup>.

在第四、五节中我们看到, 对于粒子温度为 0 的束在运动过程中也可能出现粒子轨迹的交叉, 此时  $\dot{y}(y)$  不再为单值函数. 解析方法可以指出何时发生这种交叉, 但在交叉发生后即不再适用. 一般来说, 在发生轨迹交叉后带电粒子束的有效发射度增长比较快. 在要求粒子束光学质量较高的情况下, 不允许出现这种情况.

这一工作得到了高能物理研究所赵忠尧、谢家麀先生的关心. 本文承北京大学陈佳洱先生、严声清同志和高能物理研究所方守贤、陈鉴璞、冯宝树同志校阅. 特此致谢.



## 参 考 文 献

- [1] C. S. Taylor, CERN MPS/Int. LIN 69—14.
- [2] A. J. Davies, *Nucl. Instr. Meth.*, **80** (1970), 45.
- [3] P. M. Lapostolle, Proc. 7th Inter. Conf. on High Energy Accelerators, Yerevan, 1969, Vol. 1, 205.
- [4] C. S. Taylor et al., Proc. 7th Inter. Conf. on High Energy Accelerators, Yerevan, 1969, Vol. 1, 213.
- [5] A. J. Davies, Proc. 1970 Proton Linear Accelerator Conf., Batavia, Vol. 2, 791.
- [6] P. Tanguy, Proc. 1970 Proton Linear Accelerator Conf., Batavia, Vol. 2, 771.
- [7] V. S. Kuznetsov et al., Proc. 8th Inter. Conf. on High Energy Accelerators, CERN, 1971, 384.
- [8] Н. С. Зинченко, Курс Лекций по Электронной Оптике, изд. Харьк. унив., 1958, (中译本: 电子光学教程, 人民教育出版社, 1961).
- [9] G. A. Nagy and M. Szilagyí, Introduction to the Theory of Space-Charge Optics, Akademiai Kiado, Budapest, 1974.
- [10] В. С. Кузнецов, Радиотехника и Электроника, **7**(1962), 1385.
- [11] E. Hara, *Nucl. Instr. Meth.*, **63** (1968), 313.
- [12] 郁庆长, 强流离子束的传输矩阵理论(待发表).

## THEORY OF NONLINEAR SPACE-CHARGE EFFECTS OF LOW ENERGY INTENSE CHARGED PARTICLE BEAMS

YU QING-CHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

Nonlinear space-charge effects of low energy intense charged particle beams are studied by analytical method. The relation between changes of emittance diagrams and initial current density distributions for zero temperature beams is determined. Approximate methods for calculating changes of emittance diagrams for beams of small temperature under the action of nonlinear space-charge field and increment of effective emittance of beams are obtained.