

# 多扇环形结构永磁多极系统的 二维场形分析

刘茂三 陈仁怀 吴文泰 李淑珍

(中国科学院高能物理研究所)

## 摘 要

根据“均匀磁化”原理,利用谐波分析方法,对多扇环形结构永磁多极系统( $L \rightarrow \infty$ )的场形进行了分析,并得到了二维解析表达式。分析了两种情况:一种是固定场强多极系统,二是场强可调的多极系统。

在文献[1]中,我们根据“均匀磁化”原理,利用谐波分析的方法,对如图所示的 $(n+2)N$ 扇环形结构的永磁多极系统的磁场形态进行了理论分析,得到了磁场分布的三维解析表达式。利用这些关系式,不仅可算出整个系统任意横截面上工作空间内部的磁场分布及其各高次谐波与主波模量的百分比,还可算出磁铁环形空间的场形及外部杂散磁场的分布。但要逐点详细计算,需要数字积分处理。它虽然比直接求解麦克斯韦方程容易,但一般仍需上机计算。

实际上,当 $L \rightarrow \infty$ 时,上述问题化为二维命题。此时整个积分可以全部积出。对于实际的多极系统,只要满足 $L \gg R_1$ 条件,就可应用这个二维表达式进行工程计算。

## 一、固定场强的多极系统

根据[1]所列的标量磁位表达式,当 $L \rightarrow \infty$ 时,可得角向磁场分布为

$$\begin{aligned}
 H_{\theta}(r, \theta) = & \frac{M}{r} \int_{R_1}^{R_2} r' dr' \left( \sum_{l=1}^N (-1)^{l-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r'} \left[ \int_{\frac{l-1}{N} 2\pi - \alpha}^{\frac{l-1}{N} 2\pi + \alpha} Z d\theta' \right. \right. \right. \\
 & + \sum_{P=1}^{n/2} \cos \varphi_P \left( \int_{\frac{(l-1)(n+2)+P}{(n+2)N} 2\pi - \gamma}^{\frac{(l-1)(n+2)+P}{(n+2)N} 2\pi + \gamma} Z d\theta' - \int_{\frac{(n+2)-P}{(n+2)N} 2\pi - \gamma}^{\frac{(n+2)-P}{(n+2)N} 2\pi + \gamma} Z d\theta' \right) \\
 & + \frac{1}{r'} \left[ \int_{\frac{2l-1}{N} \pi - \beta}^{\frac{2l-1}{N} \pi + \beta} \frac{\partial}{\partial \theta'} Z d\theta' + \sum_{P=1}^{n/2} \sin \varphi_P \left( \int_{\frac{(l-1)(n+2)+P}{(n+2)N} 2\pi - \gamma}^{\frac{(l-1)(n+2)+P}{(n+2)N} 2\pi + \gamma} \frac{\partial}{\partial \theta'} Z d\theta' \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_{\frac{(n+2)-P}{(n+2)N} 2\pi - \gamma}^{\frac{(n+2)-P}{(n+2)N} 2\pi + \gamma} \frac{\partial}{\partial \theta'} Z d\theta' \right) \right] \left. \right\} \right), \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r r' \sin(\theta - \theta') dz'}{[r^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2 r r' \cos(\theta - \theta')]^{\frac{3}{2}}}$$

利用谐波展开关系式<sup>[2]</sup>

$$\ln[1 - 2\zeta \cos(\theta - \theta') + \zeta^2] = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m} \cos m(\theta - \theta'), \quad (2)$$

便可得到如图示无限长的多扇环形结构多极系统在工作气隙内的角向磁场的解析表达式

$$\begin{aligned} H_{\theta}(r, \theta) = & -8NM \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{(2K-1)N-2} \left\{ \sin \frac{2K-1}{2} N\alpha - (-1)^K \sin \frac{2K-1}{2} N\beta \right. \\ & \left. - 2(-1)^K \sin \frac{2K-1}{2} N\gamma \cdot \sin \left[ \frac{K\pi}{2} + \frac{n+2}{4} \left( \varphi_0 - \frac{\pi}{n+2} \right) \right] \right. \\ & \times \frac{\sin \frac{n}{4} \left( \varphi_0 - \frac{2K-1}{n+2} \pi \right)}{\sin \frac{1}{2} \left( \varphi_0 - \frac{2K-1}{n+2} \pi \right)} \left. \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{2K-1}{2} N-1} \right] \left( \frac{r}{R_1} \right)^{\frac{2K-1}{2} N-1} \right. \\ & \left. \times \sin \frac{2K-1}{2} N\theta, \quad (\text{当 } N=2 \text{ 时, } K \neq 1) \right. \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$\varphi_p = P\varphi_0.$$

从上式可看出, 要使寄生高次谐波最大限度地自动相互抵消, 必须同时满足如下条件: (i) 每块扇面磁极的张角均需相等, 即  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\varepsilon\pi}{(n+2)N}$ , (ii) 斜向磁化强度  $\vec{M}$  与径向的夹角需始终保持  $\varphi_p = \frac{N}{2} P\delta$ . 此时, 残留的高次谐波数仅剩

$$m = \frac{2(n+2)j+1}{2} N, \quad j = 1, 2, \dots \quad (4)$$

从而上述多极系统在反对称平面上, 其磁场各残留的寄生谐波  $B_m$  与主波  $B_0$  之比为<sup>1)</sup>

$$\frac{B_m}{B_0} = \frac{2(N-2)(n+2) \sin \frac{2(n+2)j+1}{2(n+2)} \varepsilon\pi}{A[2(n+2)Nj + N-2]\pi} \left( \frac{r}{R_1} \right)^{(n+2)Nj} \times \frac{1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{2(n+2)j+1}{2} N-1}}{1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{N}{2}-1}}, \quad (5)$$

而

$$B_0 = -\frac{4N\pi M}{N-2} A \left[ 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^{\frac{N}{2}-1} \right] \left( \frac{r}{R_1} \right)^{\frac{N}{2}-1}, \quad (6)$$

1) 对磁场的径向分量, 在对称面上, 也可得到同样结果.

其中

$$A = \frac{2(n+2)}{\pi} \sin \frac{\varepsilon\pi}{2(n+2)}. \quad (0 < \varepsilon \leq 1), \quad \varepsilon \text{ 为填充系数,}$$

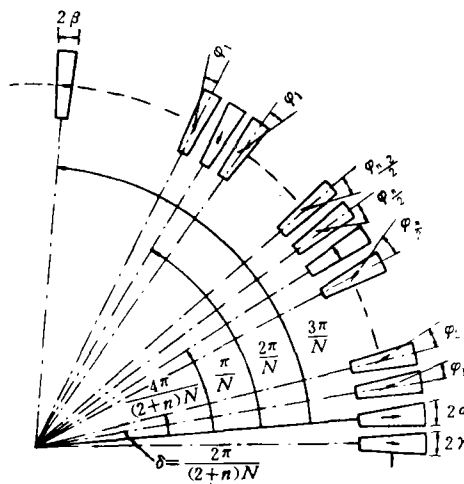
$$\delta = \frac{2\pi}{(n+2)N} \quad \text{为相邻两扇磁体中线间的夹角.}$$

从(5)式可明显看出,如适当选择磁体张角大小,使其填充系数  $\varepsilon = \frac{2(n+2)}{2n+5}$  时,残留的最低次寄生谐波  $B_{\frac{2n+5}{2}N}$  也可消除. 根据(4)式,下一级残留谐波便是  $B_{\frac{4n+9}{2}N}$ <sup>1)</sup>.

最后,从(6)式可看出,当  $n \rightarrow \infty$  时,主波振幅最大,且  $A \rightarrow \varepsilon$ . 另外,还可看出,当磁体高度  $\Delta R = (R_2 - R_1)$  不变时,多极系统主波幅值近似地同  $R_2 R_1^{\frac{N}{2}-1}$  因子成反比: 当  $R_1$  不变时,它近似地与  $\frac{\Delta R}{R_2}$  成正比.

## 二、场强可调的多极系统

场强可调的环形多极系统可有若干种结构形式,其中较简单的一种是由内外两环套装而成,其扇数及相应磁极的磁化方向均相同. 假设内环内径为  $R_1$ , 外径  $R_{1,2}$ ; 外环内径  $R_{2,1}$ , 外径  $R_2$ ,  $(n+2)N$  扇磁体均如图排布. 又假设内环系统相对原坐标绕轴逆时针旋转  $\theta_0$  角, 外环——顺时针旋转  $\theta_0$ , 则上述多极系统当  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\varepsilon\pi}{(n+2)N}$ ,  $\varphi_p = \frac{N}{2}p\delta$  时,它的可调角向磁场,根据(3)式可写成



1) 这两个结论与文献 [3—4] 指出的相符.

$$H_{\theta}(r, \theta) = -8NM \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{[2(n+2)j+1]N-2} \frac{\sin \frac{2(n+2)j+1}{2(n+2)} \varepsilon \pi}{2} \times A_{\frac{2(n+2)j+1}{2}N} \sin \frac{2(n+2)j+1}{2} N (\theta + \phi_{\frac{2(n+2)j+1}{2}N}), \quad (7)$$

其中

$$A_m = \left\{ \left[ \left( \frac{r}{R_1} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_{1,2}} \right)^{m-1} \right]^2 + \left[ \left( \frac{r}{R_{2,1}} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_2} \right)^{m-1} \right]^2 + 2 \left[ \left( \frac{r}{R_1} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_{1,2}} \right)^{m-1} \right] \left[ \left( \frac{r}{R_{2,1}} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_2} \right)^{m-1} \right] \cos 2m\theta_0 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\phi_m = \frac{1}{m} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\left[ \left( \frac{r}{R_{1,2}} \right)^{m-1} + \left( \frac{r}{R_{2,1}} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_1} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_2} \right)^{m-1} \right] \operatorname{tg} m\theta_0}{\left( \frac{r}{R_1} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_{1,2}} \right)^{m-1} + \left( \frac{r}{R_{2,1}} \right)^{m-1} - \left( \frac{r}{R_2} \right)^{m-1}},$$

$$m = \frac{2(n+2)j+1}{2} N. \quad (8)$$

一般可取  $R_{1,2} = R_{2,1}$ .

### 参 考 文 献

- [1] 刘茂三、陈仁怀、吴文泰、李淑珍, 多扇环形结构永磁多极系统场形的解析分析, 未发表。  
 [2] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, "Таблицы интегралов, сумм, Рядов и произведений" (1971) p. 59, Москва (изд. пятое).  
 [3] R. F. Holsinger, 1979 Proton Linear Accelerator Conference.  
 [4] K. Halbach. *IEEE, Trans.*, NS-26, No. 3(1979).

## PLANAR MULTIPOLE FIELD OF A PERMANENT MAGNET SYSTEM WITH MULTI-SEGMENTED RING STRUCTURE

LIU MAO-SAN CHEN REN-HUAI WU WEN-TAI LI SHU-ZHEN

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

### ABSTRACT

Expressions for the calculation of a planar permanent magnetic multipole with multi-segmented ring structure are derived under the assumption of homogeneous magnetization. Two types of magnets have been considered: the fixed-field type and the field adjustable type.