

用生成坐标方法处理对振动与表面 振动之间的耦合

傅德基 夏克定

(中国科学院上海原子核研究所)

摘 要

本文在生成坐标方法的框架内研究了核的对振动和表面振动之间的相互影响,这一方法能从一个统一的出发点来处理这两类不同的集体运动。通过扩展子空间,我们对 ^{208}Pb 估算了它的八极表面振动对于对振动(1, 1)态所产生的耦合效应。

运用生成坐标方法(GCM)在特定的子空间中研究原子核的集体运动形态已在文献[1]中进行了一般的讨论,它使我们能够以一种统一的方式来处理核的不同类型的集体运动,因而也就给处理不同集体自由度之间的相互耦合带来了方便。

近年来从理论上处理不同类型集体激发之间的耦合已经有了一系列的工作^[2],这方面的兴趣主要来自于对某些过渡区核的第一 0^+ 激发态的研究,即研究所谓非谐效应的微观结构问题。这些研究表明,对振动与表面四极振动之间的耦合对于解释这些核的第一 0^+ 激发态的特征行为起了重要的作用,由于双声子的 0^+ 态受到对振动的强烈耦合而表现出不同于双声子的 2^+ 态和 4^+ 态的特点。

同样,这种耦合效应反过来也会引起对于对振动能级的修正。本文就是通过扩大子空间的办法在GCM的框架内讨论了两类不同声子之间的耦合,并以 ^{208}Pb 为例估计了由于 3^- 态(2.61 MeV)的存在而引起的表面八极振动的双声子态对于中子对振动(1, 1)态所产生的影响。用生成坐标方法来讨论原子核的集体运动(如 2^+ 极振动)在于选择一个正则群,它使自洽场中的单粒子态从一组正交系 $|p\rangle$ 变换到另一组正交系 $|p'\rangle$,

$$|p'\rangle = \exp\left[i \sum_{\mu} \bar{\alpha}_{1\mu} Q_{1\mu}\right] |p\rangle$$

如果生成元 $Q_{1\mu}$ 是 2^+ 极集体激发算符,那么生成坐标 $\alpha_{1\mu}$ 就是相应的集体坐标,而 $|p'\rangle$ 就是在 2^+ 极形变势中的单粒子态,这样我们就选定了由集体坐标 $\alpha_{1\mu}$ 所规定的子空间,它反映了所要描写的集体运动形态和激发机制。为了在生成坐标方法中处理对振动与表面振动之间的耦合,需要选择某种特定类型的态 $|\phi(\alpha, \alpha_{\mu})\rangle$ 来表示扩大了子空间,其中 α, α_{μ} 分别表示与对振动和表面振动有关的生成坐标,于是在这个子空间中核的波函数 $|\psi\rangle$ 可以表示为:

$$|\Psi\rangle = \int f(\alpha, \alpha_\mu) |\phi(\alpha, \alpha_\mu)\rangle d\alpha d\alpha_\mu, \quad (1)$$

其中 $f(\alpha, \alpha_\mu)$ 是权重函数, 它满足 Hill-Wheeler 方程

$$\int [H(\alpha, \alpha_\mu; \alpha', \alpha'_\mu) - EN(\alpha, \alpha_\mu; \alpha', \alpha'_\mu)] f(\alpha', \alpha'_\mu) d\alpha' d\alpha'_\mu = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} N(\alpha, \alpha_\mu; \alpha', \alpha'_\mu) &= \langle \phi(\alpha, \alpha_\mu) | \phi(\alpha', \alpha'_\mu) \rangle, \\ H(\alpha, \alpha_\mu; \alpha', \alpha'_\mu) &= \langle \phi(\alpha, \alpha_\mu) | H | \phi(\alpha', \alpha'_\mu) \rangle \\ &= N(\alpha, \alpha_\mu; \alpha', \alpha'_\mu) \langle \phi(\alpha, \alpha_\mu) | H | \phi(\alpha', \alpha'_\mu) \rangle_L, \end{aligned}$$

我们是通过选择一个正则变换群 $g(\alpha, \alpha_\mu)$, 使之作用在原子核基态波函数 $|\phi(0)\rangle$ 上来构成子空间 $|\phi(\alpha, \alpha_\mu)\rangle$ 的,

$$|\phi(\alpha, \alpha_\mu)\rangle = g(\alpha, \alpha_\mu) |\phi(0)\rangle, \quad (3)$$

$$g(\alpha, \alpha_\mu) = \exp \left\{ i \left(\alpha p^+ + \bar{\alpha} p + \sum_\mu \bar{\alpha}_\mu Q_\mu \right) \right\},$$

其中 p^+ , p 和 Q_μ 分别表示与对作用性质和表面多极作用性质有关的无穷小生成算符.

$$\begin{aligned} P^+ &= \sum_{j_n m_n} \frac{V_n}{\sqrt{2(2j_n + 1)}} (-1)^{j_n - m_n} a_{j_n m_n}^+ a_{j_n - m_n}^+ + \sum_{j_i m_i} \frac{V_i}{\sqrt{2(2j_i + 1)}} (-1)^{j_i - m_i} a_{j_i m_i}^+ a_{j_i - m_i}^+, \\ Q_\mu &= \sum_{\substack{j_p m_p \\ j_q m_q}} c_{p q}^{(\lambda)} c_{j_p m_p; j_q m_q}^{\lambda, \mu} (-1)^{j_q - m_q} a_{j_p m_p}^+ a_{j_q m_q}, \end{aligned} \quad (4)$$

这里 λ 表示振动的多极性, n, p 和 i, q 分别是费米面以上和费米面以下的单粒子态的指标, V_n, V_i 和 $C_{p q}^{(\lambda)}$ 为展开系数. 体系的哈密顿量表示为单粒子项 $H_{i.p.}$ 、对相互作用项 H_p 和多极相互作用项 H_λ 之和

$$H = H_{i.p.} + H_p + H_\lambda. \quad (5)$$

我们在计算中采用高斯重迭近似 (GOA), 即重迭积分 N 可以表示为:

$$N(\alpha, \alpha_\mu; \alpha', \alpha'_\mu) = \exp \left[-\frac{1}{2} (\alpha - \alpha') (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}') - \frac{1}{2} \sum_\mu (\alpha_\mu - \alpha'_\mu) (\bar{\alpha}_\mu - \bar{\alpha}'_\mu) \right] \quad (6)$$

如用费曼图表示, 则如图 1 所示为所有成对收缩图形的和.

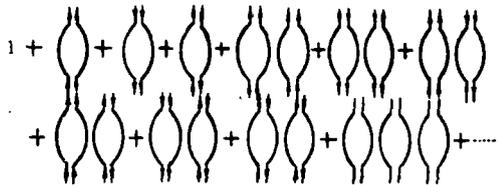


图 1 高斯重迭近似所表示的所有成对收缩图形的贡献

当用 GOA 近似下的 GCM 方法来讨论原子核的集体运动时, 如果我们在计算 $\langle \phi(\alpha, \alpha_\mu) | H | \phi(\alpha', \alpha'_\mu) \rangle_L$ 时仅保留到生成坐标的二次项, 这样得到的结果就相当于 RPA 的结果, 但是 GCM 方法的优点在于当讨论非谐效应或不同种类声子之间的耦合时可以通过计算二次以上的有关项来方便地引进这些效应. 于是我们有

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\alpha, \alpha_\mu) | H | \phi(\alpha', \alpha'_\mu) \rangle_L \\ &= a_0 + a_{11} \alpha \bar{\alpha}' + a_{11}^+ \bar{\alpha} \alpha' + a_{11}^0 \sum_\mu \alpha_\mu \bar{\alpha}'_\mu - a_{20} (\alpha \bar{\alpha} + \alpha' \bar{\alpha}'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} a_{20}^0 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (\alpha_{\mu} \alpha_{-\mu} + \bar{\alpha}'_{\mu} \bar{\alpha}'_{-\mu}) + a_{22}^{-} \alpha \bar{\alpha}' \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \bar{\alpha}'_{\mu} \\
 & + a_{22}^{+} \bar{\alpha} \alpha' \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \bar{\alpha}'_{\mu} + \frac{1}{2} a_{22}^0 \left[\alpha \bar{\alpha} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \bar{\alpha}'_{\mu} \bar{\alpha}'_{-\mu} \right. \\
 & \left. + \alpha' \bar{\alpha}' \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \alpha_{\mu} \alpha_{-\mu} \right] - \frac{1}{2} a_{31}^{-} \alpha \bar{\alpha}' \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (\bar{\alpha}'_{\mu} \bar{\alpha}'_{-\mu} + \alpha_{\mu} \alpha_{-\mu}) \\
 & - \frac{1}{2} a_{31}^{+} \bar{\alpha} \alpha' \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (\bar{\alpha}'_{\mu} \bar{\alpha}'_{-\mu} + \alpha_{\mu} \alpha_{-\mu}) - a_{31}^0 (\alpha \bar{\alpha} + \alpha' \bar{\alpha}') \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \bar{\alpha}'_{\mu}, \quad (7)
 \end{aligned}$$

这里我们展开到 α 、 α' 、 α_{μ} 、 α'_{μ} 的四次项，这些项表示两类不同声子之间的耦合，但我们没有写出那些表示对振动的非谱效应的项。上面每一项的系数为

$$\begin{aligned}
 a_{00} &= \langle \phi(0) | H | \phi(0) \rangle_L, & a_{11}^{-} &= \langle \phi(0) | P^{\dagger} H P | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{11}^{+} &= \langle \phi(0) | P H P^{\dagger} | \phi(0) \rangle_L, & a_{11}^0 &= \langle \phi(0) | Q_{\mu_1}^{\dagger} H Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{20} &= \langle \phi(0) | P^{\dagger} P H | \phi(0) \rangle_L = \langle \phi(0) | H P P^{\dagger} | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{20}^0 &= \langle \phi(0) | Q_{\mu_1}^{\dagger} Q_{\mu_2}^{\dagger} H | \phi(0) \rangle_L = \langle \phi(0) | H Q_{\mu_1} Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{22}^{-} &= \langle \phi(0) | P^{\dagger} Q_{\mu_1}^{\dagger} H P Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L, & a_{22}^{+} &= \langle \phi(0) | P Q_{\mu_1}^{\dagger} H P^{\dagger} Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{22}^0 &= \langle \phi(0) | P^{\dagger} P H Q_{\mu_1} Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L = \langle \phi(0) | Q_{\mu_1}^{\dagger} Q_{\mu_2}^{\dagger} H P P^{\dagger} | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{31}^{-} &= \langle \phi(0) | P^{\dagger} H P Q_{\mu_1} Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L = \langle \phi(0) | P^{\dagger} Q_{\mu_1}^{\dagger} Q_{\mu_2}^{\dagger} H P | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{31}^{+} &= \langle \phi(0) | P H P^{\dagger} Q_{\mu_1} Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L = \langle \phi(0) | P Q_{\mu_1}^{\dagger} Q_{\mu_2}^{\dagger} H P^{\dagger} | \phi(0) \rangle_L, \\
 a_{31}^0 &= \langle \phi(0) | Q_{\mu_1}^{\dagger} H P^{\dagger} P Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L = \langle \phi(0) | P P^{\dagger} Q_{\mu_1}^{\dagger} H Q_{\mu_2} | \phi(0) \rangle_L, \quad (8)
 \end{aligned}$$

所有这些系数可以用相对应的费曼图表示出来，角标 L 是指只包括那些不含成对收缩在内的相连图形。图 2 中画出了对 a_{20}^0 有贡献的各个图形，显然它们代表了表面振动的双声

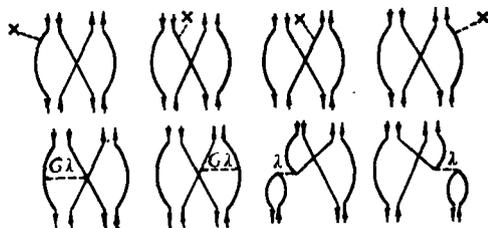


图 2 系数 a_{20}^0 中所包含的费曼图

图中— \times 表示单粒子能量，—和—分别表示多极相互作用和对相互作用； $\uparrow\downarrow$ 表示对振动声子； $\uparrow\downarrow$ 表示表面振动声子

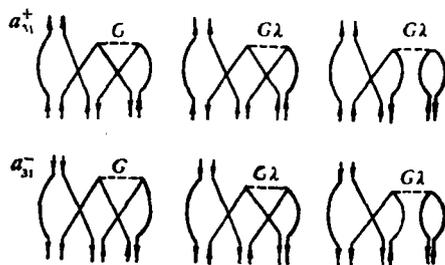


图 3 系数 a_{31}^{+} 和 a_{31}^{-} 中所包含的费曼图符号的意义同图 2

子态与对振动 $(1, 1)$ 态之间的耦合，对 a_{22}^{+} 、 a_{22}^{-} 也可类似地画出它们的图形，它们代表了这两类声子之间的相互作用能。图 3 是系数 a_{31}^{+} 和 a_{31}^{-} 中所包含的图形，它们表示一对表面振动声子通过基态关联对于对振动态的贡献，而 a_{31}^0 的意义则相反。这里我们未考虑那些重耦合项的图形，计算表明这些项的贡献都比较小。

按照文献[1]中给出的程序，可以从 $\langle \phi(\alpha, \alpha_{\mu}) | H | \phi(\alpha', \alpha'_{\mu}) \rangle_L$ 出发得到体系的等效哈密顿量 $\mathcal{H} \left(\alpha, -i \frac{\partial}{\partial \alpha}; \alpha_{\mu}, -i \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}} \right)$ ，于是就把 Hill-Wheeler 方程化成了等效薛定谔方

程,再进一步令

$$\alpha - \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} = \sqrt{2} C_{-}^{\dagger}, \quad \alpha + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} = \sqrt{2} C_{+}, \quad \bar{\alpha} - \frac{\partial}{\partial \alpha} = \sqrt{2} C_{+}^{\dagger}, \quad \bar{\alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} = \sqrt{2} C_{-}, \quad (9)$$

$$\alpha_{\mu} - \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{\mu}} = B_{\mu}^{\dagger}, \quad \alpha_{\mu} + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{\mu}} = (-1)^{\lambda-\mu} B_{-\mu}, \quad \bar{\alpha}_{\mu} - \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}} = (-1)^{\lambda-\mu} B_{-\mu}^{\dagger}, \quad \bar{\alpha}_{\mu} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{\mu}} = B_{\mu},$$

这样我们就得到了在声子数表象中的哈密顿表示

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & a_0 + 2a_{11} C_{-}^{\dagger} C_{-} + 2a_{11}^{\dagger} C_{+}^{\dagger} C_{+} + a_{11}^0 \sum_{\mu} B_{\mu}^{\dagger} B_{\mu} - 2a_{20} (C_{+}^{\dagger} C_{-}^{\dagger} + C_{+} C_{-}) \\ & - \frac{1}{2} a_{20}^0 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (B_{\mu}^{\dagger} B_{-\mu}^{\dagger} + B_{\mu} B_{-\mu}) + 2a_{22} \sum_{\mu} C_{-}^{\dagger} B_{\mu}^{\dagger} B_{\mu} C_{-} \\ & + 2a_{22}^{\dagger} \sum_{\mu} C_{+}^{\dagger} B_{\mu}^{\dagger} B_{\mu} C_{+} + a_{22}^0 \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (C_{+}^{\dagger} C_{-}^{\dagger} B_{\mu} B_{-\mu} + B_{\mu}^{\dagger} B_{-\mu}^{\dagger} C_{+} C_{-}) \\ & - a_{31} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (C_{+}^{\dagger} C_{-} B_{\mu} B_{-\mu} + C_{+}^{\dagger} B_{\mu}^{\dagger} B_{-\mu}^{\dagger} C_{-}) \\ & - a_{31}^{\dagger} \sum_{\mu} (-1)^{\mu} (C_{+}^{\dagger} C_{+} B_{\mu} B_{-\mu} + C_{+}^{\dagger} B_{\mu}^{\dagger} B_{-\mu}^{\dagger} C_{+}) \\ & - 2a_{31}^0 \sum_{\mu} (B_{\mu}^{\dagger} B_{\mu} C_{+} C_{-} + C_{+}^{\dagger} C_{-}^{\dagger} B_{\mu}^{\dagger} B_{\mu}), \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $C_{+(-)}$ 和 $C_{+(-)}$ 表示对加(减)声子的产生算符和消灭算符, B_{μ}^{\dagger} 和 B_{μ} 表示表面振动声子的产生算符和消灭算符. 从这些算符的意义很容易看出, 可以通过计算 a_{22}^{\dagger} 和 a_{22} 来估计这两类声子之间的相互作用能大小.

最后通过下面的正则变换来引入基态关联^[3], 使算符 C_{+}^{\dagger} , C 和 B_{+}^{\dagger} , B 分别变换到相应的物理声子算符 G_{+}^{\dagger} , G 和 A_{+}^{\dagger} , A .

$$G_{+}^{\dagger} = x C_{+}^{\dagger} + y C_{-}, \quad A_{+}^{\dagger} = u B_{+}^{\dagger} + v (-1)^{\lambda-\mu} B_{-\mu}, \quad (11)$$

$$G_{-}^{\dagger} = x C_{-}^{\dagger} + y C_{+}, \quad (-1)^{\lambda-\mu} A_{-\mu}^{\dagger} = u (-1)^{\lambda-\mu} B_{-\mu}^{\dagger} + v B_{\mu},$$

将(11)式代入(10)式中, 就得到在物理声子算符表象中的哈密顿表示

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & E_c + E_{11}^{\dagger} G_{+}^{\dagger} G_{+} + E_{11} G_{-}^{\dagger} G_{-} + \sum_{\mu} E_{11}^0 A_{\mu}^{\dagger} A_{\mu} \\ & + E_{20} (G_{+}^{\dagger} G_{-}^{\dagger} + G_{+} G_{-}) + \sum_{\mu} (-1)^{\lambda-\mu} E_{20}^0 (A_{\mu}^{\dagger} A_{-\mu}^{\dagger} + A_{\mu} A_{-\mu}) + \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 E_c 是基态关联能, 物理声子能量 E_{11}^{\dagger} , E_{11} 和 E_{11}^0 是 x , y , u , v 的函数, 它们包含了对振动声子和表面振动声子之间相互耦合的效应. x , y , u , v 由下列方程组决定

$$x^2 - y^2 = 1, \quad E_{20} = 0, \quad u^2 - v^2 = 1, \quad E_{20}^0 = 0. \quad (13)$$

我们以 ^{208}Pb 作为一个例子来估计对振动与八极表面振动(能量为 2.61 MeV 的 3⁻态)之间的耦合效应. 在计算中, 构成对振动的中子单粒子能级见[3], 并且假定 $\sum_{\mu} V_{\mu}^2 = \sum V_i^2 = \frac{1}{2}$, 为简单起见, 我们并未从能量变分原理出发来确定对振动的最佳子空间, 也就是说没有用 Tamm-Tancoff 方法来确定对振动自由度的展开系数 V_n 和 V_i , 而只是简单地认为它们在单粒子态上有近于均匀的分布, 从而定出 V_n 和 V_i . 八极激发算符 $Q_{\mu}(\lambda=3)$ 是由相邻大壳间的所有耦合成 $J^{\pi} = 3^{-}$ 的中子和质子的粒子-空穴对构成, 展开系数 $C_{\rho}^{(\lambda)}$

具有多极矩的约化矩阵元性质, 并且满足 $\sum_{p,q} C_{pq}^{(\lambda)^2} = 1$. 对作用强度取为 $G = \frac{23}{A} \text{ MeV}$, 它对 ^{208}Pb 附近的中子对振动谱给出了很好的符合^[3], 八极相互作用强度取 $x_3 = 0.44/(A - 28.3) \text{ MeV}$ ^[4], 这是从符合许多原子核的实验激发能 $\hbar\omega_3$ 而得到的 x_3 随 A 变化的经验关系. 对于 ^{208}Pb 取定了这些参数以后, 如前面所讨论的那样, 可以由计算 a_{22}^+ 和 a_{22}^- 得到这两类声子之间的相互作用能大小约为 170 KeV .

在上面的讨论中没有包括那些表示对振动非谐效应的矩阵元, 我们的目的并不是企图符合 ^{208}Pb 的中子对振动谱, 而只是把计算得到的对振动物理声子能量 E_{11}^+ 和 E_{11}^- 与未考虑耦合效应时得到的结果作一比较, 以确定这一耦合效应可能引起的修正. 在文 [3] 中, 作者在非高斯重迭近似下考虑了对振动的非谐效应, 计算了 ^{208}Pb 核区的中子对振动谱, 对其中的 (1, 1) 态计算结果要比实验结果高 0.8 MeV , 这一结果表明需要考虑八极自由度的耦合. 我们的计算结果表明, 在考虑了八极振动的耦合效应后, 对这个 (1, 1) 态引起的修正约为 0.3 MeV , 这虽然对于解释这一态给出有利的贡献, 但仍不足以达到定量的符合. 如果在计算中同时考虑对振动的非谐效应, 这样就能进一步讨论这一效应与上面讨论的耦合效应之间的相干, 但计算表明这一相干引起的修正是很小的. 这一结果表明, 对于对振动和八极振动, 它们的子空间重迭很小, 而它们之间的相互影响主要是通过基态关联引起的.

最后, 作者感谢徐躬耦先生对本工作的帮助和讨论.

参 考 文 献

- [1] 徐躬耦, 中国科学, (1974), 567; 徐躬耦、王顺金、刘敦桓、杨亚天、毛铭德, 物理学报, **25**(1976), 226.
- [2] K. Takada, S. Tazak, *Prog. Theor. Phys.*, **61**(1979), 1666; F. Sakata et al., *Z. Phys.*, **A286**(1978), 195.
- [3] 刘建业、罗诗裕. 原子核物理, (1974 年会议资料选编).
- [4] S. Yoshida, *Nucl. Phys.*, **38**(1962), 380.

THE GENERATOR COORDINATE METHOD FOR THE COUPLING BETWEEN THE PAIRING AND SURFACE VIBRATIONS

FU DE-JI XIA KE-DING

(Institute of Nucleus, Academia Sinica, Shanghai)

ABSTRACT

The interplay between the pairing and surface vibrations is investigated within the framework of the generator coordinate method which treats both modes of collective motions on the same footing. By extending subspace we estimate the coupling effect on the pairing vibrational state (1,1) in ^{208}Pb arising from its octupole surface vibration.