第6卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 6, No. 4
1982 年 7 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1982

原子核中的 $U(6/4)$ 超对称

孙洪洲 韩其智
(北京大学物理系)

摘 要

在本文中，我们讨论了原子核中可能存在的一种动力学超对称性——$U(6/4)$ 超对称性.

具有 $U(6/4)$ 超对称性的原子核含有若干个 sd 玻色子及 0, 1, 2, 3, 4 个角动量为 3/2 的费米子，它的波函数可以用超李代数链

$$U(6/4)\supset SU(6/4)\supset SU(6)\otimes SU(4)\supset SU(4)\otimes SU(4)$$
$$\supset SU(4)\supset Sp(4)\supset SO(3)$$

来分类.

在本文中，我们给出了按以上超李代数链分类的波函数，并推导出了能谱公式.

一、引 言

原子核中是否存在着动力学超对称，这是近来人们很关心的一个问题. Iachello 最近指出了可能存在着原子核的 $U(6/4)$ 超对称，并且举出了一个实例[1].

我们在前一篇文章中指出了玻色子费米子体系的波函数可以用一个超李代数链来进行分类[2]. 在此基础上，我们准备在本文中系统地讨论 s, d 玻色子和 3/2 费米子组成体系波函数的性质. 并且指出存在动力学超对称时，这样一个体系的能谱结构. 我们所得结果比 Iachello 的结果更丰富.

二、s, d 玻色子和 3/2 费米子体系波函数的分类

(a) 按 $U(6)\supset SO(6)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 分类的波函数.

这样的波函数可以写为[3]:

$$|\lambda\ \sigma\ p\ \Delta\ L\ M\rangle \tag{2.1}$$

其中 λ 是玻色子的总数，σ 是广义辛弱数，p 是辛弱数，Δ 是附加量子数.

由于 $SO(6)$ 与 $SU(4)$; $SO(5)$ 与 $Sp(4)$ 局部同构，于是波函数 (2.1) 可以写为

本文 1980 年 10 月 13 日收到.

$$|\lambda\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L\ \ M\rangle \tag{2.2}$$

其中 $[\sigma\sigma]$ 是标记 $SU(4)$ 不可约表示的划分，(op) 是标记 $Sp(4)$ 不可约表示的符号[1]。

(b) s, d 玻色子和 3/2 费米子体系的波函数，

按照[2]，这样的波函数可以用超李代数链

$$\begin{aligned}&U(6/4)\supset SU(6/4)\supset SU(6)\otimes SU(4)\supset SU(4)\otimes SU(4)\\&\supset Sp(4)\otimes Sp(4)\supset SO(3)\otimes SO(3)\end{aligned} \tag{2.3}$$

来分类，即波函数可以写为

$$\begin{aligned}&|\lambda\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L,\ [1111]\ 0\ L\ M\rangle,\\&|\lambda+1\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L,\ [111]\ 3/2\ J\ M\rangle,\\&|\lambda+2\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L,\ [11]\ 0\ L\ M\rangle,\\&|\lambda+2\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L,\ [11]\ 2\ J\ M\rangle,\\&|\lambda+3\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L,\ [1]\ 3/2\ J\ M\rangle,\\&|\lambda+4\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ L\ [0]\ 0\ L\ M\rangle.\end{aligned} \tag{2.4}$$

波函数(2.4)展开了 $U(6/4)$ 不可约表示 $([\lambda]\ [1111])$ 的表示空间。由于标记玻色子与费米子的超李代数链中都有 $SU(4)$, $Sp(4)$；这样，波函数(2.4)可以改写为以下形式(即总波函数可以用 $SU(4)\supset Sp(4)\supset SO(3)$ 来分类)。

$$\begin{aligned}&|\lambda\ [\sigma\sigma]\ [1111],\ [\sigma\sigma]\ (op)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma;\\&|\lambda+1\ [\sigma\sigma]\ [111],\ [\sigma\sigma-1]\ (1p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma-1;\\&|\lambda+1\ [\sigma\sigma]\ [111],\ [\sigma+1\ \sigma+1\ 1]\ (1p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma;\\&|\lambda+2\ [\sigma\sigma]\ [11],\ [\sigma+1\ \sigma+1]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma+1;\\&|\lambda+2\ [\sigma\sigma]\ [11],\ [\sigma-1\ \sigma-1]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma-1;\\&|\lambda+2\ [\sigma\sigma]\ [11]\ [\sigma+1\ \sigma1]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma;\\&|\lambda+2\ [\sigma\sigma]\ [11],\ [\sigma+1\ \sigma1]\ (2p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma-1;\\&|\lambda+3\ [\sigma\sigma]\ [1],\ [\sigma\sigma1]\ (1p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma-1;\\&|\lambda+3\ [\sigma\sigma]\ [1],\ [\sigma+1\ \sigma]\ (1p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma;\\&|\lambda+4\ [\sigma\sigma]\ [0],\ [\sigma\sigma]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle,\\&\qquad p=0,1,2,\cdots\sigma.\end{aligned} \tag{2.5}$$

---

1) (op) 相当于 Hamermesh 所给出的 (pp)[4]。

表 1

(a)　$(0p)$ 所包含的 J 值及其重复度 S

p \ J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1			1																		
2			1	0	1																
3	1	0	0	1	1	0	1														
4			1	0	1	1	1	0	1												
5			1	0	1	1	1	1	1	0	1										
6	1	0	0	1	1	0	2	1	1	1	1	0	1								
7			1	0	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0	1						
8			1	0	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	0	1				
9	1	0	0	1	1	0	2	1	1	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1		
10			1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	1	2	1	1	1	1	0	1

(b)　$(1p)$ 所包含的 J 值与其重复度 S

p \ J	1/2	3/2	5/2	7/2	9/2	11/2	13/2	15/2	17/2	19/2	21/2	23/2	25/2	27/2	29/2	31/2	33/2	35/2	37/2	39/2	41/2	43/2
0		1																				
1	1	0	1	1																		
2		1	1	1	1	1																
3		1	1	1	2	1	1	1														
4	1	0	1	2	1	2	2	1	1	1												
5		1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1										
6		1	1	1	2	2	2	3	2	2	2	1	1	1								
7	1	0	1	2	1	2	3	2	3	3	2	2	2	1	1	1						
8		1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1				
9		1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1		
10	1	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	4	3	3	3	2	2	2	1	1	1

(c) (2p)所包含的 J 值与其重复度 S

p \ J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	1	0	1																				
1	1	1	1	1	1																		
2	1	1	2	1	2	1	1																
3	1	1	2	2	2	2	2	1	1														
4	1	1	2	2	3	2	3	2	2	1	1												
5	1	1	2	2	3	3	3	3	3	2	2	1	1										
6	1	1	2	2	3	3	4	3	4	3	3	2	2	1	1								
7	1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	4	3	3	2	2	1	1						
8	1	1	2	2	3	3	4	4	5	4	5	4	4	3	3	2	2	1	1				
9	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	5	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1		
10	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	5	6	5	5	4	4	3	3	2	2	1	1

表2 $SU(4)$ $Sp(4)$ 的 Casimir 算子[1)]

(a) $SU(4)$ 的 Casimir 算子

$SU(4)$	$G(SU(4))$
$[\sigma\sigma]$	$\frac{1}{2}\sigma(\sigma+4)$
$[\sigma+1\ \sigma]$	$\frac{1}{2}\{\sigma(\sigma+5)+15/4\}$
$[\sigma\sigma 1]$	$\frac{1}{2}\{\sigma(\sigma+3)-1/4\}$
$[\sigma+1\ \sigma 1]$	$\frac{1}{2}(\sigma+1)(\sigma+3)$

(b) $Sp(4)$ 的 Casimir 算子

$Sp(4)$	$G(Sp(4))$
$(0p)$	$\frac{1}{2}p(p+3)$
$(1p)$	$\frac{1}{2}\{p(p+4)+5/2\}$
$(2p)$	$\frac{1}{2}(p+2)(p+3)$

1) 取了适当的“归一化常数”。

在得到 (2.5) 时，我们利用了：

(1) $SU(4)$ 的直乘分解公式

$$[\sigma\sigma]\otimes[1]=[\sigma+1\ \sigma]\oplus[\sigma\sigma 1],$$
$$[\sigma\sigma]\otimes[11]=[\sigma+1\ \sigma+1]\oplus[\sigma-1\ \sigma-1]\oplus[\sigma+1\ \sigma 1],$$
$$[\sigma\sigma]\otimes[111]=[\sigma+1\ \sigma+1\ 1]\oplus[\sigma\sigma-1].$$

(2) Hamermesh 公式[4]，即

$$[\sigma\sigma]\supset(00)\oplus(01)\oplus(02)\oplus\cdots\oplus(0\sigma),$$
$$[\sigma+1\ \sigma]\supset(10)\oplus(11)\oplus(12)\oplus\cdots\oplus(1\sigma),$$
$$[\sigma\sigma 1]\supset(10)\oplus(11)\oplus(12)\oplus\cdots\oplus(1\sigma-1),$$
$$\begin{aligned}[\sigma+1\ \sigma 1]\supset&(01)\oplus(02)\oplus\cdots\oplus(0\sigma)\\ &\oplus(20)\oplus(21)\oplus\cdots\oplus(2\sigma-1).\end{aligned}$$

我们利用 [3] 中所述方法求出了在 $Sp(4)$ 的不可约表示 $(0p)$, $(1p)$, $(2p)$ 下，角动量 J 的可取值及其重复度 $S(J)$，结果在表 1 中给出(在附录中，我们给出了普遍公式).

三、原子核中的动力学超对称

在上一节中，我们应用超李代数链 (1.3) 对 s, d 玻色子及 3/2 费米子体系的波函数进行了分类. 我们可以进一步假定这些波函数近似地是原子核的定态波函数，这就是说原子核具有 $U(6/4)$ 超对称性. 在这种情况下原子核的哈米顿量可以写为

$$\begin{aligned}H=&\rho\varepsilon^{(p)}+\nu\varepsilon^{(f)}+aG^{(p)}(SU(4))+bG^{(f)}(SU(4))\\ &+cG(SU(4))+dG(Sp(4))+eI^2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 ρ, ν 是玻色子，费米子的个数；$\varepsilon^{(p)}$, $\varepsilon^{(f)}$ 是单个玻色子，费米子的能量；$G^{(p)}(SU(4))$, $G^{(f)}(SU(4))$ 及 $G(SU(4))$ 是玻色子，费米子及总的 $SU(4)$ Casimir 算子；$G(Sp(4))$ 是 $Sp(4)$ 的 Casimir 算子. 在表 2 中，我们给出了有关的 $G(SU(4))$, $G(Sp(4))$ 的数值[5].

利用公式 (3.1) 及表 2，我们可以得到一些原子核的(具有超对称 $U(6/4)$ 的)低激发能谱，这些原子核的低激发态展开了 $U(6/4)$ 的不可约表示 ($[\lambda]\,[1111]$) 的表示空间.

例如，原子核 ^{194}Hg, ^{193}Au, ^{192}Pt, ^{191}Ir, ^{190}Os 的低激发态就展开了 $U(6/4)$ 的不可约表示 ($[5]\,[1111]$) 的表示空间，即

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hg}&\sim|5\ [\sigma\sigma]\ [1111],\ [\sigma\sigma]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle,\\
\mathrm{Au}&\sim|6\ [\sigma\sigma]\ [111],\ [\sigma_1\sigma_2\sigma_3]\ (1p)\ \Delta\ J\rangle,\\
\mathrm{Pt}&\sim|7\ [\sigma\sigma]\ [11],\ [\sigma_1\sigma_2\sigma_3]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle,\\
&\quad\ |7\ [\sigma\sigma]\ [11],\ [\sigma_1\sigma_2\sigma_3]\ (2p)\ \Delta\ J\rangle,\\
\mathrm{Ir}&\sim|8\ [\sigma\sigma]\ [1],\ [\sigma_1\sigma_2\sigma_3]\ (1p)\ \Delta\ J\rangle.\\
\mathrm{Os}&\sim|9\ [\sigma\sigma]\ [0],\ [\sigma\sigma]\ (0p)\ \Delta\ J\rangle.
\end{aligned}$$

我们取1)

$$C=-160\text{keV},\ d=120\text{keV},\ e=10\text{keV}$$

1) 与 Iachello 所取的参数相同[1].

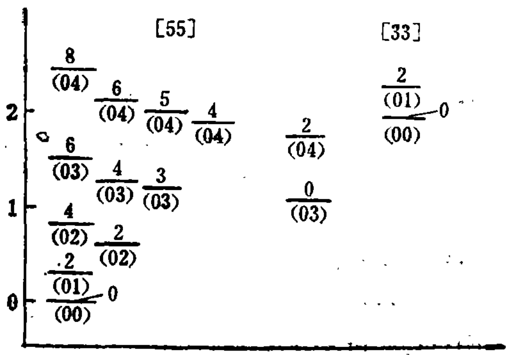

图 1　Hg^{194} 能谱

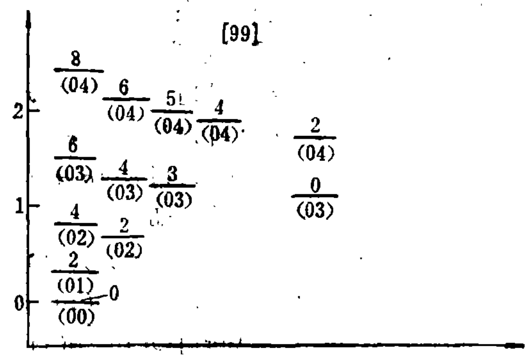

图 2　Os^{190} 能谱

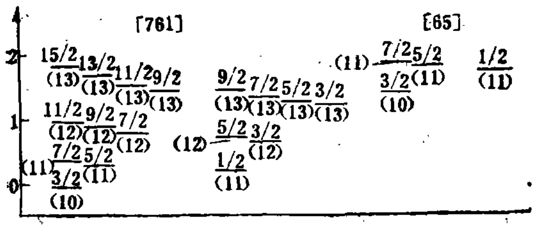

图 3　Au^{193} 能谱

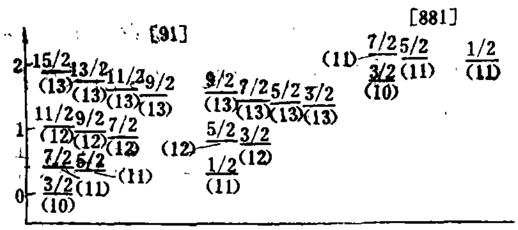

图 4　Ir^{191} 能谱

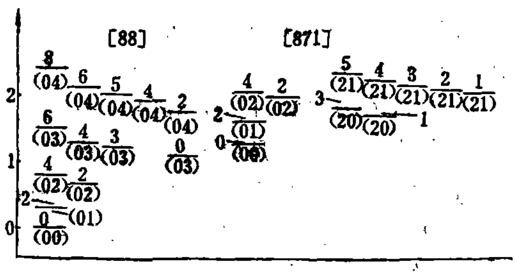

图 5　Pt^{192} 能谱

即可得到这些原子核的能谱，结果在图 1—5 中划出.

本工作完成后，看到了 Bars 的予印本[6]. Bars 利用超杨图的方法[7]，对原子核的 $U(6/4)$ 对称性进行了讨论，也指出了一些原子核的低激发态展开了 $U(6/4)$ 的不可约表示 ($[\lambda][1111]$) 的表示空间. 但 Bars 对偶偶核取了近似——只考虑玻色子态，这样就使得 Bars 的结果与 Iachello 的结果相同. 另外，我们所用的方法比较直接，物理意义更明确.

四、结 束 语

我们已经给出了按超李代数链

$$U(6/4)\supset SU(6/4)\supset SU(6)\oplus SU(4)\supset SU(4)\oplus SU(4)$$
$$\supset SU(4)\supset Sp(4)\supset SO(3)$$

分类的玻色子费米子波函数，给出了波函数的各个量子数的可取值．即全面地解决了分类问题．同时给出了具有 $U(6/4)$ 对称性原子核的能谱表达式．这个能谱结构比 Iachello, Bars 所得到的丰富些． Iachello 只考虑了除玻色子以外只有 1 个 3/2 费米子的情况． 我们则讨论了除了这个情况以外还有 2 个 3/2 费米子的情况．我们的结果指出，在后一种情况下原子核的能谱与没有 3/2 费米子的情况是不同的．我们将利用本文的公式进一步与实验作比较．

附　　录

应用 [3] 中所述的方法，我们可以求出在 $Sp(4)$ 的不可约表示 (op), $(1p)$, $(2p)$ 中，角动量 J 的可取值及其重复度．

在 (op) 中，$J=2p-\xi$ 的重复度 $S(\xi)$ 为

$$\begin{aligned} S(\xi) &= S^{(0)}(\xi), & \xi \leqslant p; \\ &= S^{(0)}(\xi) - S^{(1)}(\xi), & \xi > p; \end{aligned}$$

其中

ξ	6δ	$6\delta+1$	$6\delta+2$	$6\delta+3$	$6\delta+4$	$6\delta+5$
$S^{(0)}$	$\delta+1$	δ	$\delta+1$	$\delta+1$	$\delta+1$	$\delta+1$

ξ	$p+3e+1$	$p+3e+2$	$p+3e+3$
$S^{(1)}$	$e+1$	$e+1$	$e+1$

在$(1p)$中，$J=2p+3/2-\xi$ 的重复度 $S(\xi)$ 为

$$\begin{aligned} S(\xi) &= S^{(0)}(\xi), & \xi \leqslant p \\ &= S^{(0)}(\xi) - S^{(1)}(\xi) & \xi > p \end{aligned}$$

其中

ξ	3δ	$3\delta+1$	$3\delta+2$
$S^{(0)}$	$\delta+1$	$\delta+1$	$\delta+1$

ξ	$p+3e+1$	$p+3e+1$	$p+3e+1$
$S^{(1)}$	$2e+1$	$2e+1$	$2e+1$

在 $(2p)$ 中，$J=2p+3-\xi$ 的重复度 $S(\xi)$ 为

$$\begin{aligned} S(\xi) &= S^{(0)}(\xi), & \xi \leqslant p \\ &= S^{(0)}(\xi) - S^{(1)}(\xi), & \xi > p \end{aligned}$$

其中

ξ	2δ	$2\delta+1$
$S^{(0)}$	$\delta+1$	$\delta+1$

ξ	$p+1$	ξ
$S^{(1)}$	1	$\xi-p-1$

在以上的公式中 δ, e 都是非负整数.

参考文献

[1] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.*, 44(1980), 772.
[2] 韩其智等，高能物理与核物理，5(1981)，546. 孙洪洲等，高能物理与核物理，6(1982)，317.
[3] 孙洪洲，原子核物理，3(1981)，119.
[4] M. Hamermesh, Group Theory and its Applications to Physical Problems Reading, Mass., Addison-Wesley, 1962.
[5] B. F. Bayman, Some lecture on Groups and Their Applications to Spectroscopy. Nordila, 1960. 孙洪洲，高能物理与核物理，4(1980), 137.
[6] I. Bars, YTP 80—17.
[7] I. Bars, YTP 80—06.

THE $U(6/4)$ SUPERSYMMETRY IN COMPLEX NUCLEAR SPECTRA

SUN HONG-ZHOU HAN QI-ZHI

(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper we discuss a possible dynamical supersymmetry in complex nuclear spectra—the $U(6/4)$ supersymmetry.

The wave functions of these nuclei which contain several s d bosons and 0, 1, 2, 3, or 4 $j=\frac{3}{2}$ fermions, can be classified by a Lie superalgebra chain

$$U(6/4)\supset SU(6/4)\supset SU(6)\otimes SU(4)\supset SU(4)\otimes SU(4)\supset SU(4)\supset Sp(4)\supset SO(3)$$

and can be written as

$$|\lambda+\delta\,[\sigma\sigma]\,[1^{4-\delta}]\,[f]\,(\lambda\mu)\,\Delta\, IM\rangle,\ \delta=0,1,2,3,4.$$

where $[\sigma\ \sigma]$ $[1^{4-\delta}]$, $[f]$ are the lebels of the irreducible representations of each $SU(4)$; $(\lambda\mu)$ are the lebels of the irreducible representations of $Sp(4)$. All the permissible values of $[f]$ $(\lambda\,\mu)$ Δ I are calculated and a closed expression for energies is derived.