

平移不变口袋模型和质子寿命

袁忠平 刘连寿 刘宝华

(华中师范学院) (黄冈师专)

摘 要

本文考虑了强子结构对 $SU(5)$ 大统一模型中由重子数破坏的有效四费米子相互作用所引起的质子衰变寿命的影响, 利用一种改进的口袋模型——平移不变口袋模型计算了质子寿命, 适当地处理了过程的反冲效应, 克服了流行的袋模型计算中所普遍存在的“过高估计波函数重叠”和手加“高动量抑制形状因子”的问题, 得到了与现行实验相容, 能接受进一步实验检验的结果. 取 $M_X = 4.2 \times 10^{14} \text{GeV}$, 求得质子寿命 $\tau_p = 1.39 \times 10^{31} \text{yr}$.

一、引 言

强、弱、电相互作用统一的 $SU(5)$ 大统一理论^[1]预言了有希望用实验检验的质子衰变, 这引起了人们的极大关注. 迄今给出的质子寿命的实验下限是 $2 \times 10^{30} \text{yr}$ ^[2,3]; 基于大统一模型的本身结构而推断的理论估计值是 $10^{31 \pm 2} \text{yr}$ ($M_X = 6 \times (1.5)^{\pm 1} \times 10^{14} \text{GeV}$)^[4,5]. 近年来, 美国和西欧等国大约有六个实验小组在地层深处进行规模浩大的测定质子寿命的实验, 不久就可得到首批结果. 为了与这些更为确定的实验结果比较, 从理论上仔细地计算一下质子寿命是值得做的工作, 而这种计算与强子的结构模型和结构函数密切相关.

用唯象方式描述强子结构的口袋模型在复现强子的静态性质方面是成功的. 这种成功促使人们进一步用它去计算包括质子衰变在内的动力学过程. 但是, 目前文献中用口袋模型计算质子寿命的文章^[6-9]存在着一些共同问题. 首先, 在他们的计算中都作了同球假设, 即假定衰变前后的强子口袋的袋心重合, 这自然导致了“过高估计波函数重叠”, 使寿命偏小. 其次, 他们又都作了静止假设, 即假定衰变前后的强子口袋都是静止的. 这对于产生轻强子(如 π)的过程特别不适宜. 因为实际上末态轻强子具有很高的动量, 而衰变振幅是随动量的增高而减小的(所谓振幅的“高动量抑制”). 为处理这方面的困难, 文献[6]对静止的口袋加上了洛仑兹收缩修正, 而文献[7]、[8]则干脆手加上一个具有不确定性的“高动量抑制形状因子”.

上述问题在原有的口袋模型的框架内是无法适当地加以解决的, 因为它们或者是不具有平移不变性, 不能自动地得到四动量守恒; 或者是无法确定不同袋心的口袋之间的联

系,无法具体反映反冲。因此,继续探索新的改进的口袋模型是很自然的。去年,刘连寿等人在充分考虑了反映夸克囚禁的集体自由度对强子动力学过程影响的基础上,发展了 Donoghue-Johnson 的波包展开思想^[9],提出了平移不变的口袋模型^[10,11],认为强子的动量本征态可由无数具有不同袋心的口袋态迭加而成,而不同袋心的口袋态之间应有一种新的归一化关系。本文的目的就是利用这一模型来计算 $SU(5)$ 大统一模型中质子的衰变寿命。通过这一计算可以看到,本文所用的模型确实能自动地得到四动量守恒的 δ 函数因子和口袋整体的反冲效应。特别是,由于这一模型自动地考虑了各种大大小小的口袋重迭区域,克服了同心球近似中的“过高估计波函数重迭”问题。通过计算,在不用手加任意因子的情况下,得到了和现有实验下限相容,能进一步经受实验检验的结果。

二、平移不变口袋模型

参考文献 [10, 11] 详细阐述了平移不变的口袋模型,探讨了不同中心的强子口袋的归一化途径,给出了确定波包函数的方法和公式,这里作一简单的回顾。

口袋模型拉氏量^[12]具有明显的平移不变性和洛伦兹协变性。因此,原则上应存在平移不变的动量本征态解。把动量为 \mathbf{k} 的标量介子和动量为 \mathbf{p} 极化为 λ 的重子分别记为 $|M(\mathbf{k})\rangle$ 和 $|B_\lambda(\mathbf{p})\rangle$ 。它们满足通常的协变归一化条件:

$$\langle M(\mathbf{k}') | M(\mathbf{k}) \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.1)$$

$$\langle B_{\lambda'}(\mathbf{p}') | B_\lambda(\mathbf{p}) \rangle = (2\pi)^3 \frac{E_{\mathbf{p}}}{m_B} \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.2)$$

强子的这样一种动量本征态在 $1+1$ 维情形下的明显表达式已由 Jaffe^[13] 得到,而在 $1+3$ 维情形下则还没有得到。通常的固定球腔解是 $1+3$ 维情形下的一种近似,其 $SU(6)$ 组合一般就称为强子的口袋态,这种口袋态并不就是动量本征态,但可以用动量本征态展开。在 $t=0$ 时刻,有

$$|M(\mathbf{x}_0)\rangle_{B_{ag}} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \varphi_M(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} |M(\mathbf{k})\rangle \quad (2.1)$$

$$|B_\lambda(\mathbf{x}_0)\rangle_{B_{ag}} = \int d^3\mathbf{p} \frac{m_B}{E_{\mathbf{p}}} \varphi_B(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_0} |B_\lambda(\mathbf{p})\rangle \quad (2.2)$$

其中, $|M(\mathbf{x}_0)\rangle_{B_{ag}}$ 和 $|B_\lambda(\mathbf{x}_0)\rangle_{B_{ag}}$ 分别表示中心为 \mathbf{x}_0 的标量介子和极化为 λ 的重子口袋态。不同中心的口袋态要求满足如下的归一化条件^[11]:

$${}_{B_{ag}}\langle M(\mathbf{x}'_0) | M(\mathbf{x}_0) \rangle_{B_{ag}} = f_M(|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0|), \quad (3.1)$$

$${}_{B_{ag}}\langle B_{\lambda'}(\mathbf{x}'_0) | B_\lambda(\mathbf{x}_0) \rangle_{B_{ag}} = \delta_{\lambda\lambda'} f_B(|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0|), \quad (3.2)$$

$$f_M(|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0|) = \int_{\mathcal{O}} d^3\mathbf{x} u^+(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \int_{\mathcal{O}} d^3\mathbf{x}' v^+(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) v(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.3)$$

$$f_B(|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0|) = \left(\int_{\mathcal{O}} d^3\mathbf{x} u^+(\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0) u(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right)^3. \quad (3.4)$$

$u(v)$ 是通常的单夸克(反夸克)的球腔近似解。

$\varphi_M(\mathbf{k})$ 和 $\varphi_B(\mathbf{p})$ 是波包函数,它们由式 (1)、(2) 和 (3) 确定:

$$|\varphi_M(\mathbf{k})|^2 = \frac{2E_M}{(2\pi)^6} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} f_M(r) \quad (4.1)$$

$$|\varphi_B(\mathbf{p})|^2 = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{E_p}{m_B} \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} f_B(r) \quad (4.2)$$

利用指数函数 $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}$ 和 $e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_0}$ 的完备性对 (3.1) 和 (3.2) 作反展开并加上时间因子, 得:

$$|M(\mathbf{k}), t\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2E_M}{\varphi_M(\mathbf{k})} \int d^3x_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0 - E_M t)} |M(\mathbf{x}_0)\rangle_{B_{Mg}}, \quad (5.1)$$

$$|B_1(\mathbf{p}), t\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{m_B \varphi_B(\mathbf{p})} \int d^3x_0 e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_0 - E_p t)} |B_1(\mathbf{x}_0)\rangle_{B_{Mg}}. \quad (5.2)$$

公式 (5) 表明: 强子的动量本征态可看作是无数具有不同中心的口袋态的迭加. 应用公式 (5), 实验上测定的强子动量本征态就转化为可以计算的口袋态和相应的波包函数, 这样, 过程跃迁振幅的计算就切实可行了, 并且能自动地得到四动量守恒; 此外, 由于一串口袋态的迭加明显地反映了不同的袋心位置, 反冲效应也可得到适当的处理和计算.

三、 $SU(5)$ 模型中的质子寿命 ($p \rightarrow e^+ \pi^0$)

在大统一理论问世之前, 人们普遍认为重子数是守恒的, 质子是稳定的. 然而 $SU(5)$ 大统一理论认为, 与 24 个生成元相应, 应有 24 个规范玻色子; 除了已经了解的 8 个胶子、3 个中间矢量玻色子和 1 个光子外, 还有 12 个超重矢量玻色子 (又称为轻子夸克玻色子) X_i, Y_i, \bar{X}_i 和 \bar{Y}_i ($i = 1, 2, 3$ 为色指标), 它们能够传递重子数破坏的相互作用, 把一对夸克转变成轻子和反夸克, 导致质子衰变. 由于轻子夸克玻色子的质量极大, 假定 $M_X \approx M_Y$, 则这种重子数破坏相互作用可近似为四费米子作用, 其有效哈密顿密度为^[7] (仅考虑 $p \rightarrow e^+ \pi^0$ 衰变道):

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{e}^+(x) (1 - \gamma_5) O(x) \quad (6)$$

其中, $\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g_{GU}}{8M_X^2}$, g_{GU} 为大统一常数,

$$O(x) = \sigma_{ijk} \bar{u}_i^c(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u_j(x) [\gamma_\mu d_k(x)],$$

$u^c = i\gamma_2 u^*$ 是电荷共轭夸克场.

质子衰变 ($p \rightarrow e^+ \pi^0$) 的物理机制可设想为质子袋内的任意二个夸克在 x_1 处因重子数破坏相互作用而湮没并产生出 e^+ 和反夸克. 为了简单, 还假定反夸克直接在 π^0 介子袋内产生, 而质子袋内的第三个夸克——称为旁观夸克——在 x_2 处与反夸克一起同时转变成 π^0 介子袋内的夸克, 这样, 点 x_1 和 x_2 就一定在质子袋和 π^0 介子袋的重迭区域内, 如图 1 所示. 此外, 作为描述夸克囚禁的强相互作用的一种近似, 要求在反应过程中旁观夸克在重迭区域内始终归一. 由于衰变过程的反冲作用, 质子袋的中心 x_0 和 π^0 袋的中心 x'_0 可以处于任意可能的相对位置, 从而自动地考虑了各种大小不同的重迭区域, 而不像流行的口袋模型计算衰变过程那样假设衰变前后的两袋中心重合, 仅仅计算一种两袋有最大重迭区域的情况.

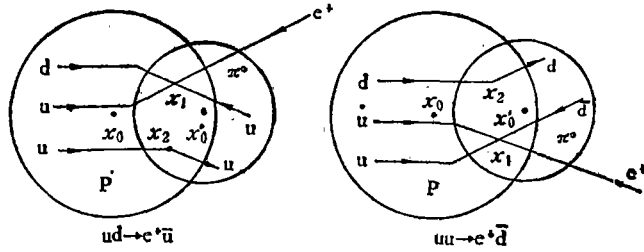


图 1

考虑到质子衰变过程中旁观夸克的存在,有效相互作用哈密顿应是双定域的^[10]:

$$\mathcal{H}'_{eff} = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{e}^+(x_1)(1 - 3\gamma_5)O(x_1)\bar{q}_l(x_2)q_l(x_2)\delta(t_1 - t_2) \quad (7)$$

其中 $\bar{q}_l q_l = \bar{u}_l u_l + \bar{d}_l d_l$, l 为色指标, x_1 表示重子数破坏四费米子相互作用发生的时空点, x_2 表示旁观夸克完成口袋转换的时空点. 因子 $\delta(t_1 - t_2)$ 要求上述两事件同时发生, 即假定为瞬时相互作用¹⁾.

衰变振幅为:

$$S_{fi} = \int d^4x_1 d^4x_2 \langle \pi^0(k), e^+(q) | : \mathcal{H}'_{eff} : | P_1(p) \rangle \quad (8)$$

把 (5)、(7) 式代入, 求出轻子跃迁矩阵元, 完成对时间的积分得:

$$S_{fi} = \frac{i\sqrt{2}GE_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{13/2}m_p\varphi_{\pi}^*(\mathbf{k})\varphi_p(\mathbf{p})} \sqrt{\frac{m_e}{E_e}} \delta(E_p - E_{\mathbf{k}} - E_e) \cdot V_r^T \gamma_2 \gamma_4 (1 - 3\gamma_5) \cdot \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_0 d^3x'_0 e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}_0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'_0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{x}_1)}_{B_{0g}} \langle \pi^0(x'_0) | : O(x_1)\bar{q}_l(x_2)q_l(x_2) : | P_1(x_0) \rangle_{B_{0g}} \quad (9)$$

其中 V_r 是自旋为 r 动量为 \mathbf{q} 的负能旋量, 上角标 T 为转置算符. 为进一步得到动量守恒 δ 函数, 作坐标变换

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 - x_0, & \text{反夸克相对于质子袋心坐标;} \\ \xi_2 = x_2 - x_0, & \text{夸克相对于质子袋心坐标;} \\ \mathbf{r} = \mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0, & \pi^0 \text{袋心相对于质子袋心坐标;} \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0, & \text{质子袋心坐标.} \end{cases} \quad (10)$$

完成对 d^3x_0 的积分, 得:

$$S_{fi} = a\delta^4(p - k - q)V_r^T T I_{\lambda} \quad (11)$$

$$\text{其中, } a = \frac{i\sqrt{2}GE_{\mathbf{k}}E_{\mathbf{p}}}{(2\pi)^{7/2}m_p\varphi_{\pi}^*(\mathbf{k})\varphi_p(\mathbf{p})} \sqrt{\frac{m_e}{E_e}},$$

$$T = \gamma_2 \gamma_4 (1 - 3\gamma_5);$$

$$I_{\lambda} = \int d^3\xi_1 d^3\xi_2 d^3r e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\xi_1)} \mathcal{M}_{\lambda};$$

$$\mathcal{M}_{\lambda} =_{B_{0g}} \langle \pi^0(x'_0) | : O(x_1)\bar{q}_l(x_2)q_l(x_2) : | P_1(x_0) \rangle_{B_{0g}}.$$

(11) 式中的 λ —— δ 函数明确地表示衰变过程中动量和能量守恒.

在质心静止系内, 按通常的方法从衰变振幅可求得衰变宽度

1) 这种瞬时相互作用近似是目前处理束缚态动力学的通用做法, 其原因是目前还缺乏完全协变的束缚态理论. 本文中采用的补救办法是通过引进洛伦兹收缩因子, 适当地考虑相对论效应.

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{|a|^2 E_q |\mathbf{k}|}{(2\pi)^6 m_p} \Sigma |V_r^T T I_{1j}|^2 \\ &= \frac{G^2 m_e (m_p^2 - m_\pi^2) (m_p^2 + m_\pi^2)^2}{4(2\pi)^{13} m_p^4 |\varphi_\pi(\mathbf{k})|^2 |\varphi_p(0)|^2} \Sigma |V_r^T T I_{1j}|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

其中, Σ 表示对初态质子极化求平均和对末态正电子极化求和。

利用负能投影算符

$$\Lambda_- = -\sum_r V_r \bar{V}_r. \quad (13)$$

$$\text{再记} \quad T' \equiv -T^+ \gamma_4 \Lambda_-^T T = (1 - 3\gamma_3) \gamma_2 \Lambda_-^T \gamma_2 \gamma_4 (1 - 3\gamma_3), \quad (14)$$

$$M \equiv \sum_i I_{1i} I_{1i}^\dagger, \quad (15)$$

可以求得:

$$\Sigma |V_r^T T I_{1j}|^2 = \frac{1}{2} T_r (T' M). \quad (16)$$

矩阵 T' 和 M 是容易求出的:

$$T' = \frac{1}{m_e} \begin{bmatrix} -4m_e + 5E_q + 3|\mathbf{k}| & 0 & 3E_q + 5|\mathbf{k}| & 0 \\ 0 & -4m_e + 5E_q - 3|\mathbf{k}| & 0 & 3E_q - 5|\mathbf{k}| \\ 3E_q + 5|\mathbf{k}| & 0 & 4m_e + 5E_q + 3|\mathbf{k}| & 0 \\ 0 & 3E_q - 5|\mathbf{k}| & 0 & 4m_e + 5E_q - 3|\mathbf{k}| \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$M = \begin{bmatrix} I_{11} I_{11}^* + I_{21} I_{21}^* & I_{11} I_{12}^* + I_{21} I_{22}^* & I_{11} I_{13}^* + I_{21} I_{23}^* & I_{11} I_{14}^* + I_{21} I_{24}^* \\ I_{12} I_{11}^* + I_{22} I_{21}^* & I_{12} I_{12}^* + I_{22} I_{22}^* & I_{12} I_{13}^* + I_{22} I_{23}^* & I_{12} I_{14}^* + I_{22} I_{24}^* \\ I_{13} I_{11}^* + I_{23} I_{21}^* & I_{13} I_{12}^* + I_{23} I_{22}^* & I_{13} I_{13}^* + I_{23} I_{23}^* & I_{13} I_{14}^* + I_{23} I_{24}^* \\ I_{14} I_{11}^* + I_{24} I_{21}^* & I_{14} I_{12}^* + I_{24} I_{22}^* & I_{14} I_{13}^* + I_{24} I_{23}^* & I_{14} I_{14}^* + I_{24} I_{24}^* \end{bmatrix}. \quad (18)$$

其中矩阵元 I_{1a} 的表达式见附录, 它们满足关系:

$$I_{11} = -I_{22}^*, \quad I_{12} = I_{21}^*, \quad I_{13} = -I_{24}^*, \quad I_{14} = I_{23}^*. \quad (19)$$

再在 T' 中略去和式中较小的项 m_e , 结合 (12)、(16) 和 (19) 式得:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{G^2 (m_p^4 - m_\pi^4)^2}{8(2\pi)^{13} m_p^5 |\varphi_\pi(\mathbf{k})|^2 |\varphi_p(0)|^2} \left\{ 5 \sum_{j=1}^4 [(R_c I_{1j})^2 + (I_m I_{1j})^2] + 6[(R_c I_{11})(R_c I_{13}) \right. \\ &\quad \left. + (I_m I_{11})(I_m I_{13}) + (R_c I_{12})(R_c I_{14}) + (I_m I_{12})(I_m I_{14})] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

其中记号 R_c 和 I_m 分别表示实部和虚部。 $R_c I_{1j}$ 和 $I_m I_{1j}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) 是强子跃迁矩阵元在口袋重迭区域上的多重积分(见附录), 可用改进的蒙特卡洛方法^[14]上机算出, 其数值结果为

$$\begin{aligned} R_c I_{11} &= -0.270 \text{GeV}^{-3}, & R_c I_{12} &= 0.505 \text{GeV}^{-3}, \\ R_c I_{13} &= -1.09 \text{GeV}^{-3}, & R_c I_{14} &= 0.369 \text{GeV}^{-3}, \\ I_m I_{11} &= -9.42 \text{GeV}^{-3}, & I_m I_{12} &= -5.12 \text{GeV}^{-3}, \\ I_m I_{13} &= -1.78 \text{GeV}^{-3}, & I_m I_{14} &= 1.83 \text{GeV}^{-3}. \end{aligned} \quad (21)$$

平移不变口袋模型用于计算动力学过程时, 考虑了反冲运动, 由动量能量守恒可求得 $|\mathbf{k}| = 0.459 \text{GeV}$, 相当于 π 袋具有 $0.959c$ 的反冲速度, 这无疑将导致 π 口袋沿 \mathbf{k} 方向的洛伦兹收缩, 结果口袋变成了中间凸起的扁盘形。这种“扁盘形口袋”重迭积分的计算

是困难的。为了近似地考虑洛仑兹收缩效应,本文采用文献[6]的做法,假定口袋均匀收缩成小球,要求小球体积与扁盘体积相等,即在数值计算中,所有 π 袋的半径 R_x 均代以收缩后的半径 $R'_x = \left(1 + \frac{K^2}{m_x^2}\right)^{-\frac{1}{6}} R_x$ 。

本文所用的波包函数,由 (4.1)、(4.2) 式,利用文献[12]的方法求得为

$$\phi_p(0) = 0.0318\text{GeV}^{-3/2}, \quad \phi_\pi(0.459\text{GeV}) = 0.022\text{GeV}^{-3/2}. \quad (22)$$

把所有数据代入 (20), 求得 $p \rightarrow \pi^0 e^+$ 衰变道的质子寿命为

$$\tau_p = \frac{1}{\Gamma} = 3.97 \times 10^{34}\text{yr}. \quad (23)$$

为了进一步对质子二体衰变的总寿命作一个估计,我们参照了各种文献[6, 15—17], 对 $SU(5)$ 模型中质子衰变分枝比的计算结果¹⁾, 列在表 1 中:

表 1 $p \rightarrow e^+\pi^0$ 的分枝比

百分比 衰变道	文献和作者	$M^{[15]}$	GYOPR ^[16]	DGS ^[17]	KK ^[17]		
					NR	REC	R
$p \rightarrow e^+\pi^0$		33%	37%	31%	36%	40%	38%

一般说来,分枝比是与模型有关的,但由表可见,对于各种模型大致都在 30—40% 之间,作为参考,我们取 35%, 这样可估计质子衰变的总寿命为

$$\tau_p' = 1.39 \times 10^{34}\text{yr}.$$

四、比较和结论

为了说明问题,把文献[6—8]和本文的结果在相同的条件下作一比较是有益处的。我们统一取 $M_x = 4.2 \times 10^{14}\text{GeV}$, 区别手加和不加“高动量抑制形状因子”两种情况,列在表 2 中:

表 2 质子寿命比较表 ($M_x = 4.2 \times 10^{14}\text{GeV}$)

总寿命 τ_p' (yr)	文献和作者	DGS ^[6]	D ^[7]	G ^[8]	本文	实验下限
	未加“形状因子”	$\sim 10^{28}$	1.32×10^{30}	2.06×10^{30}	1.39×10^{31}	2×10^{30}
	手加“形状因子”	—	1.19×10^{31}	1.26×10^{31}	—	

* 文献[6]所引用的有效拉氏量少了因子4,故寿命应是文中结果的 1/16。

从表 2 可以清楚地看出,文献[6]的实际结果比现有实验下限还小很多,这显然是成

1) 另有一些文献,如 [7, 8] 在计算分枝比时考虑了相空间修正,不符合本文的情况。

问题的,这在一定程度上反映了简单地用静止口袋态来处理动力学过程太过于粗略.文献[7]和[8]采用了改进的口袋模型,结果有了很大改善.但如不手加具有某种不确定的“高动量抑制形状因子”则结果也难与实验相容.手加了修正的因子以后,其结果与本文十分接近,有可能经受进一步实验的检验.

附 录

正文(6)式中算符 $O(x)$ 实际上是个列矩阵,有四个分量,它们是

$$O_\alpha(x) = e_{ij} \bar{u}_i^j(x) r_\mu (1 + r_s) u_j(x) [r_\mu d_k(x)]_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \quad (1.1)$$

故(11)式中的积分 I_k 也是个列矩阵,为明确计,各分量记为 $I_{k\alpha}$,有

$$I_{k\alpha} = \int d^3\xi_1 d^3\xi_2 d^3r m'_{k\alpha} \quad (1.2)$$

$$m'_{k\alpha} = e^{-i(k \cdot r + \epsilon \cdot \xi_1)} \langle \pi^0(x_0) | : O_\alpha(x_1) \bar{q}_i(x_2) q_i(x_2) : | P_k(x_0) \rangle_{B_{\alpha k}} \quad (1.3)$$

把口袋波函数的 $SU(6)$ 组合和夸克场算符代入,经过繁杂而冗长的计算,可以求得

$$m'_{k\alpha} = \frac{2N_p N_\pi}{(4\pi)^{3/2}} E_\alpha^{(j)} F^{(k)}, \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (1.4)$$

其中, N_p 、 N_π 分别是质子和 π 介子球腔近似波函数的归一化因子; $E_\alpha^{(j)}$ 仅是 ξ_1 、 y 的函数, $F^{(k)}$ 仅是 ξ_2 、 y 的函数,具体表达式为:

$$E_\alpha^{(j)} = e^{-i(k \cdot r + \epsilon \cdot \xi_1)} E_\alpha^{(j)} \equiv R_\alpha E_{\alpha j} + i I_\alpha E_{\alpha j};$$

$$E_{11}^{(1)} = \frac{3}{\xi_1 \eta_1} (y_1 x - x_1 y) J_{101} - i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (3\xi_1^2 - x_1^2 - 2x_1 z - 3x_1 x - 3y_1 y) J_{101} + \left(5 - \frac{1}{\xi_1^2} x_1^2 \right) J_{011} + 2J_{000} \right],$$

$$E_{12}^{(1)} = \frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 y_1 - 3y_1 z + 2x_1 y) J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1 y_1 J_{011} + i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 x_1 - 3x_1 z + 2x_1 x) J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1 x_1 J_{011} \right],$$

$$E_{13}^{(1)} = -\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 - z) y_1 J_{101} - \frac{1}{\xi_1^2} x_1 y_1 J_{011} + i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 - z) x_1 J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1 x_1 J_{011} \right],$$

$$E_{14}^{(1)} = \frac{1}{\xi_1 \eta_1} (y_1 x - x_1 y) J_{101} - i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 x + y_1 y - x_1^2 - y_1^2) J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1^2 J_{011} + J_{000} \right],$$

$$E_{21}^{(1)} = \frac{1}{\xi_1 \eta_1} (4x_1 y - x_1 y_1 - 3y_1 z) J_{101} - \frac{1}{\xi_1^2} x_1 y_1 + i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 x_1 + 3x_1 z - 4x_1 x) J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1 x_1 J_{011} \right],$$

$$E_{22}^{(1)} = -\frac{3}{\xi_1 \eta_1} (y_1 x - x_1 y) J_{101} - i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (3\xi_1^2 + x_1^2 - 4x_1 z - 3x_1 x - 3y_1 y) J_{101} + \left(4 + \frac{1}{\xi_1^2} x_1^2 \right) J_{011} + J_{000} \right],$$

$$E_{23}^{(1)} = -\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (2x_1 y_1 - y_1 x - x_1 y) J_{101} - \frac{2}{\xi_1^2} x_1 y_1 J_{011} + i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1^2 - y_1^2 - x_1 x + y_1 y) J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} (x_1^2 - y_1^2) J_{011} \right],$$

$$E_{24}^{(1)} = \frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 - z) y_1 J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1 y_1 J_{011} - i \left[\frac{1}{\xi_1 \eta_1} (x_1 - z) x_1 J_{101} + \frac{1}{\xi_1^2} x_1 x_1 J_{011} \right],$$

$$\begin{aligned}
 E_{31}^{(1)} &= -\frac{2}{\xi_1} x_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (2x_1 \xi_1^2 - x \xi_1^2 - x z_1^2 - x_1 x_1 x - x_1 y_1 y) J_{111} \\
 &\quad - \frac{4}{\eta_1} (x_1 - x) J_{100} + i \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} x_1 (x_1 y - y_1 x) J_{111}, \\
 E_{32}^{(1)} &= -\frac{3}{\xi_1} x_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (x_1 \xi_1^2 + x_1 x_1 x - \xi_1^2 x - x_1^2 x) J_{111} - \frac{4}{\eta_1} (x_1 - x) J_{100} \\
 &\quad + i \left[\frac{3}{\xi_1} y_1 J_{001} + \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (\xi_1^2 y_1 + x_1 y_1 x - \xi_1^2 y - x_1^2 y) J_{111} + \frac{4}{\eta_1} (y_1 - y) J_{100} \right], \\
 E_{33}^{(1)} &= \frac{1}{\xi_1} x_1 J_{001} + \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} x_1 (x_1 x - x_1 x) J_{111} + \frac{1}{\eta_1} (x_1 - x) J_{100} + i \left[\frac{1}{\xi_1} y_1 J_{001} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} x_1 (y_1 x - x_1 y) J_{111} + \frac{1}{\eta_1} (y_1 - y) J_{100} \right], \\
 E_{34}^{(1)} &= -\frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} x_1 (\xi_1^2 - x_1 x - x_1 x - y_1 y) J_{111} - \frac{1}{\eta_1} (x_1 - x) J_{100} + i \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} x_1 (y_1 x - x_1 y) J_{111}, \\
 E_{41}^{(1)} &= -\frac{3}{\xi_1} x_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (2x_1 \xi_1^2 - x_1 x_1 x - 2\xi_1^2 x + x_1^2 x) J_{111} - \frac{5}{\eta_1} (x_1 - x) J_{100} \\
 &\quad + i \left[-\frac{3}{\xi_1} y_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (2y_1 \xi_1^2 - x_1 y_1 x - 2\xi_1^2 y + x_1^2 y) J_{111} - \frac{5}{\eta_1} (y_1 - y) J_{100} \right], \\
 E_{42}^{(1)} &= \frac{4}{\xi_1} x_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (2\xi_1^2 x - x_1^2 x - x_1 \xi_1^2 - x_1 x_1 x - x_1 y_1 y) J_{111} \\
 &\quad + \frac{5}{\eta_1} (x_1 - x) J_{100} + i \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} x_1 (y_1 x - x_1 y) J_{111}, \\
 E_{43}^{(1)} &= \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (x x_1^2 - x y_1^2 - x_1 x_1 x + x_1 y_1 y) J_{111} + i \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (2x_1 y_1 x - x_1 y_1 x - x_1 x_1 y) J_{111}, \\
 E_{44}^{(1)} &= \frac{1}{\xi_1} x_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (x_1 \xi_1^2 - x_1 x_1 x - x_1^2 x + y_1^2 x - 2x_1 y_1 y) J_{111} \\
 &\quad + i \left[\frac{1}{\xi_1} y_1 J_{001} - \frac{1}{\eta_1 \xi_1^2} (y_1 \xi_1^2 - y_1 x_1 x - 2x_1 y_1 x + x_1^2 y - y_1^2 y) J_{111} \right]; \\
 E_{11}^{(2)} &= R_e E_{21} - i I_m E_{21}, & E_{12}^{(2)} &= -R_e E_{22} + i I_m E_{22}, \\
 E_{13}^{(2)} &= -R_e E_{23} + i I_m E_{23}, & E_{14}^{(2)} &= R_e E_{24} - i I_m E_{24}, \\
 E_{21}^{(2)} &= -R_e E_{11} + i I_m E_{11}, & E_{22}^{(2)} &= R_e E_{12} - i I_m E_{12}, \\
 E_{23}^{(2)} &= R_e E_{13} - i I_m E_{13}, & E_{24}^{(2)} &= -R_e E_{14} + i I_m E_{14}, \\
 E_{31}^{(2)} &= R_e E_{41} - i I_m E_{41}, & E_{32}^{(2)} &= -R_e E_{42} + i I_m E_{42}, \\
 E_{33}^{(2)} &= -R_e E_{43} + i I_m E_{43}, & E_{34}^{(2)} &= R_e E_{44} - i I_m E_{44}, \\
 E_{41}^{(2)} &= -R_e E_{31} + i I_m E_{31}, & E_{42}^{(2)} &= R_e E_{32} - i I_m E_{32}, \\
 E_{43}^{(2)} &= R_e E_{33} - i I_m E_{33}, & E_{44}^{(2)} &= -R_e E_{34} + i I_m E_{34}; \\
 F_1^{(1)} &= F_4^{(2)} = J_{00} - \frac{1}{\eta_2 \xi_2} (\xi_2^2 - x_2 x - y_2 y - z_2 z) J_{11} + i \frac{1}{\eta_2 \xi_2} (y_2 x - x y) J_{11} \\
 &\quad \equiv R_e F_1 + i I_m F_1, \\
 F_2^{(1)} &= F_3^{(2)} = -\frac{1}{\eta_2 \xi_2} (x_2 x - x_2 x) J_{11} - i \frac{1}{\eta_2 \xi_2} (y_2 x - x_2 y) J_{11} \\
 &\quad \equiv R_e F_2 + i I_m F_2, \\
 F_3^{(1)} &= F_2^{(2)} = -R_e F_2 + i I_m F_2, \\
 F_4^{(1)} &= F_1^{(2)} = R_e F_1 - i I_m F_1.
 \end{aligned}$$

上列各式中， $\eta_1 = x_1 - x'_0 = r - \xi_1$ ， $\eta_2 = x_2 - x'_0 = r - \xi_2$ 分别表示反夸克和夸克相对于 π 介子

袋心的坐标; J_{ij} 和 J_{ijk} 分别表示二个和三个贝塞尔函数的连乘积, 且乘积中第一个因子的变量为 η_2 (对于 J_{ij} 型) 或 η_1 (对于 J_{ijk} 型), 其余因子的变量为 ξ_2 (对于 J_{ij} 型) 或 ξ_1 (对于 J_{ijk} 型)。例如,

$$J_{01} = j_0(\eta_2)j_1(\xi_2), \quad J_{011} = j_0(\eta_1)j_1(\xi_1)j_1(\xi_2),$$

j_0, j_1 分别为零阶和一阶贝塞尔函数。

把 (I.4) 式代入 (I.2) 式, 考虑到 $d^3\xi_1$ 和 $d^3\xi_2$ 的积分区域为质子袋与 π 介子袋的重迭区域, 得到

$$I_{\lambda\alpha} = \frac{2N_p^3 N_\pi^2}{(4\pi)^{3/2}} \int_{(V_{R_p+R_\pi})} d^3r \int_{(Q_r)} d^3\xi_1 E_{\alpha j}^{(\lambda)} \int_{(Q_r)} d^3\xi_2 F_j^{(\lambda)}, \quad (I.5)$$

其中积分区域 $V_{R_p+R_\pi}$ 表示以质子袋心 x_0 为中心, 质子口袋半径 R_p 与 π 介子口袋半径 R_π 之和 $R_p + R_\pi$ 为半径的球, Q_r 表示对每一给定的 r , 质子口袋与 π 介子口袋的重迭区域。这种多重积分可用改进的蒙特卡洛方法^[13]上机计算。利用 $E_{\alpha j}^{(\lambda)}$ 与 $E_{\alpha j}^{(\lambda)}$ 及 $F_j^{(\lambda)}$ 与 $F_j^{(\lambda)}$ 之间的关系, 由 (I.5) 式可证明:

$$I_{11} = -I_{22}^*, \quad I_{12} = I_{21}^*, \quad I_{13} = -I_{24}^*, \quad I_{14} = I_{23}^*. \quad (I.6)$$

参 考 文 献

- [1] H. Georgi and S. L. Glashaw, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 438.
- [2] F. Reines and M. F. Crouch, *Phys. Rev. Lett.*, **32**(1974), 493.
- [3] M. Deakne et al., Pennsylvania preprint, Presented at XVth Recontre de Moriond, Les Arcs-Savois-France, 1980.
- [4] J. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos and S. Rudaz, Annecy preprint LAPP-TH-14 1980.
- [5] T. J. Goldman and D. A. Ross, *Phys. Lett.*, **84B**(1979), 208.
- [6] A. M. Din, G. Girardi and P. Sorba, *Phys. Lett.*, **91B**(1980), 77.
- [7] J. F. Donoghue, *Phys. Lett.*, **92B**(1980), 99.
- [8] E. Golowich, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 1148.
- [9] J. F. Donoghue and K. Johnson, *Phys. Rev.*, **D21**(1980), 1975.
- [10] 刘连寿、蔡勤、杨仲乐, 科学通报, **26**(1981), 465.
- [11] 蔡勤、杨仲乐、刘连寿, 科学通报, **26**(1981), 972.
- [12] K. Johnson, *Phys. Lett.*, **78B**(1978), 259.
- [13] R. L. Jaffe, MLM Preprint, CTP, 870(1980).
- [14] 刘连寿、杨仲乐、陈伟, 华中师范学院学报, **4**(1981), 36.
- [15] M. B. Gavela, A. Le yaouane, L. Oliver, O. Pene and J. C. Raynal, Orsay preprints LP THE 80/6 and 80/15.
- [17] G. Kane and G. Karl, Michigan preprint.

A TRANSLATIONAL INVARIANT BAG MODEL AND THE PROTON LIFETIME

JIU ZHONG-PIN LIU LIAN-SOU LIU BAO-HUA

(Hua-Zhong Teacher's College)

ABSTRACT

The effect of hadron structure on the rate of proton decay caused by baryon-number violating interaction in the $SU(5)$ grand unified theories is considered. The proton lifetime is calculated using an improved translational invariant bag model. We deal with recoil effect in the decay process properly and thus overcome some problems existing in the popular bag model calculations, for example, "overestimating the wave function overlaps" and adding "a form factor to describe the high momentum suppression". Our result is consistent with recent experiments and can undergo further experimental test. We obtain $\tau_p = 1.39 \times 10^{31}$ yr, for $M_x = 4.2 \times 10^{14}$ GeV.