第7卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 7, No. 2
1983年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1983

CP(n) 手征理论的非自偶解及相应的规范场

侯伯宇 石康杰 王育郊
(西 北 大 学)

侯 伯 元 王 珮
(内 蒙 古 大 学) (四 川 大 学)

摘 要

在 $SU(n+1)$ 群空间里以不同方式嵌入子群 $SU(m)$ $(m \leqslant n)$ 后，我们得到 CP(n) 手征场的自偶解和非自偶解．本文详细地探讨了非自偶解的来源、性质及相应的规范场与拓扑荷．现有的理论框架必然导致允许非自偶解．

在规范场具有拓扑性质的瞬子解的研究中，二维 CP(n) 手征理论曾被许多作者所关注[1-5]．这不仅因为它直接与磁单极有联系，而且还因为四维解的很多性质都能从二维理论得到借鉴的缘故[1]．现有的 CP(n) 理论从全纯映射诱导出瞬子解，因而都满足自偶条件．然而，这些文献所给出的理论框架不能排除一类非自(反)偶解，它们在形式上系由保形而非全纯映射所诱导[6]．本文打算对此问题作进一步较详细的讨论．

一、陪集表示与手征场的方程

本节简单回顾一下 CP(n) 流形及手征场方程，借以引入符号，详情请参看文献[1]．

倘若在 $n+1$ 维复数线性空间中扣除原点，并通过 $r=\lambda q$，λ 为非零复数，在点 $q=(q_0, q_1, \cdots, q_n)$ 及点 r 之间建立等价关系，则所得的商空间即 n 维复数射影空间．因其为紧致拓扑空间，宜采取分区非齐次坐标 $(t_0, \cdots, t_{\nu-1}, 1, t_{\nu+1}, \cdots, t_n)$，$t_\mu = q_\mu/q_\nu$，$q_\nu \neq 0$．将齐次坐标归一化

$$\sum_{\nu=0}^{n} \bar{q}_\nu q_\nu = 1 \quad (\bar{q}_\nu \text{ 为 } q_\nu \text{ 的复共轭}), \tag{1.1}$$

则等价关系中 $\lambda \in U(1)$ 仅为相角．上式决定的球面 S^{2n+1} 可认证为陪集 $\dfrac{SU(n+1)}{SU(n)}$，因此

本文1981年3月16日收到．1982年7月22日收到修改稿．

$$\mathrm{CP}(n) \sim \frac{SU(n+1)}{SU(n)\otimes U(1)} = \frac{G}{H}, \tag{1.2}$$

即 CP(n) 是群 $G = SU(n+1)$ 和子群 $H = SU(n)\otimes U(1)$ 所决定的陪集的表示. 同时,球 $S^{2n+1} = \dfrac{SU(n+1)}{SU(n)}$ 分解为以 CP(n) 为底空间，$U(1)$ 为纤维的 Hopf 丛.

另方面,紧致代数可按对合自同构算子 N_0 的本征值为 $+1$ 或 -1 分解为最大紧致子代数和正交补子空间 $\mathfrak{p}$. 陪集 $c \sim \exp\mathfrak{p}$[7]. $su(n+1)$ 代数时

$$N_0 = \begin{pmatrix} I & \vdots \\ \cdots & \cdots \\ & \vdots -1 \end{pmatrix}, \quad I = n\times n \text{ 单位矩阵}, \tag{1.3}$$

$$N_0^2 = E[(n+1)\times(n+1)\text{单位矩阵}], \tag{1.4}$$

因此满足 ($\mathfrak{p}$ 为反厄米)

$$N_0 c N_0 = c^{-1} = c^{\dagger}. \tag{1.5}$$

我们可以引进活动算子 N 代替 c 来表征陪集

$$N = cN_0c^{\dagger} = c^2N_0, \quad N^2 = E. \tag{1.6}$$

在 $q_0 \doteqdot 0$ 的区域，c 与 CP(n) 坐标的关系为[1,7]

$$c = \gamma^{-1}\begin{pmatrix} V(t) & t \\ -t^{\dagger} & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (1 + t^{\dagger}t)^{\frac{1}{2}},$$

$$V(t) = \gamma(I + tt^{\dagger})^{-\frac{1}{2}} = \gamma I - \frac{1}{1+\gamma}\, tt^{\dagger}. \tag{1.7}$$

文[1]还定义了 CP(n) 流形上活动标架运动的左不变流 Ω_μ ($\Omega_\mu dx_\mu$ 为 Maurer-Cartan 形式)

$$\Omega_\mu = \begin{pmatrix} B_\mu & \phi_\mu \\ -\phi_\mu^{\dagger} & a_\mu \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$a_\mu = \frac{1}{2}\gamma^{-2}[t^{\dagger}\partial_\mu t - (\partial_\mu t^{\dagger})t],$$

$$B_\mu = \gamma^{-2}\left[-\frac{1}{2}I\partial_\mu(t^{\dagger}t) + t\partial_\mu t^{\dagger} + V\partial_\mu V\right],$$

$$\phi_\mu = \gamma^{-2}V\partial_\mu t. \tag{1.9}$$

后面我们将讨论它们与规范场的联系.

将 N 认作手征场,其运动方程决定于作用量

$$S = \frac{1}{16\pi}T_r\int d^2x(\partial_\mu N\partial_\mu N), \tag{1.10}$$

由此导出 Euler-Lagrange 方程

$$[\partial^2 N, N] = 0. \tag{1.11}$$

因为拓扑荷

$$Q = \frac{1}{16\pi i}T_r\int d^2x(N\partial_\mu N\tilde{\partial}_\mu N), \tag{1.12}$$

式中采用了对偶符号

$$\tilde{\partial}_\mu = i\epsilon_{\mu\nu}\partial_\nu. \tag{1.13}$$

$S = |Q|$ 给出自(反)偶方程

$$[N, N_\mu] = \pm 2\tilde{N}_\mu. \tag{1.14}$$

满足此方程的解一定是方程 (1.11) 的解，相反我们将发现 (1.11) 存在着不满足 (1.14) 的解.

二、在 CP(2) 中嵌入 CP(1) 的解

让我们具体考虑 $\mathrm{CP}(2) \sim \dfrac{SU(3)}{SU(2)\otimes U(1)}$. 这时，用 λ_8 代替对合算子 N_0 来区别最大子群与陪集会更方便. 这样作的好处是可以直接利用 λ 代数. 易证，上述自偶方程与二次方程化为

$$[\partial_\mu \Lambda_8, \Lambda_8/\sqrt{3}] = \mp \tilde{\partial}_\mu \Lambda_8, \tag{2.1}$$

$$[\partial^2 \Lambda_8, \Lambda_8] = 0, \tag{2.2}$$

其中

$$\Lambda_8 = c\lambda_8 c^\dagger. \tag{2.3}$$

让我们考察子陪集 $\dfrac{SO(3)}{SO(2)}$ 生成的手征方程解，此时

$$c \equiv c(\alpha, \beta) = \exp(i\alpha(x)j_3)\exp(i\beta(x)j_2), \tag{2.4}$$

我们用 $j_1 j_2 j_3$ 表示 $SU(3)$ 代数 λ_1—λ_8 中构成 $SO(3)$ 生成元的子集. 作保形变换

$$\mathrm{tg}\frac{\beta(x)}{2} e^{-i\alpha(x)} = \omega(x) \equiv u(x) + iv(x), \tag{2.5}$$

式中 $u(x)$ $v(x)$ 为实函数. 下面证明当

$$\omega(x_1, x_2) = f(x_1 + ix_2) \text{ 或 } f(x_1 - ix_2), \tag{2.6}$$

f 为任意有理函数时 (2.3) 为方程 (2.2) 的解. 事实上，从性质 (2.6) 及变换 (2.5) 容易导出

$$\partial_1 - i\partial_2 = f'(\partial_u - i\partial_v), \quad \partial_1 + i\partial_2 = \bar{f}'(\partial_u + i\partial_v)$$

或

$$\partial_1 - i\partial_2 = \bar{f}'(\partial_u + i\partial_v), \quad \partial_1 + i\partial_2 = f'(\partial_u - i\partial_v); \tag{2.7}$$

$$\partial_u \mp i\partial_v = 2\cos^2\frac{\beta}{2} e^{\pm i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial\beta} \pm i\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right). \tag{2.8}$$

$$\partial^2 \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 = |f'|^2(\partial_u^2 + \partial_v^2); \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{4\cos^4\dfrac{\beta}{2}}(\partial_u^2 + \partial_v^2) = \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{\sin^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}. \tag{2.10}$$

令

$$\Lambda_i(\alpha, \beta, \gamma) = g(\alpha, \beta, \gamma)\lambda_i g^{-1}(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$J_i(\alpha, \beta, \gamma) = g(\alpha, \beta, \gamma)j_i g^{-1}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{2.11}$$

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = c(\alpha, \beta)e^{i\gamma(x)j_3} \tag{2.12}$$

是 $SO(3)$ 群元素．利用活动系中角动量算子 J_i 的微分表式[8]，易见有

$$e^{\mp i\gamma}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{i}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}-i\operatorname{ctg}\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)\Lambda_i(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$=[J_1(\alpha,\beta,\gamma)\pm iJ_2(\alpha,\beta,\gamma),\ \Lambda_i(\alpha,\beta,\gamma)], \tag{2.13}$$

$$-i\frac{\partial}{\partial\gamma}\Lambda_i(\alpha,\beta,\gamma)=[J_3(\alpha,\beta,\gamma),\ \Lambda_i(\alpha,\beta,\gamma)]. \tag{2.14}$$

由上可得

$$(\partial_1\mp i\partial_2)\Lambda_i=F_\pm(\alpha,\beta,\gamma)[J_1\mp iJ_2-\operatorname{ctg}\beta J_3,\ \Lambda_i],$$

或

$$(\partial_1\pm i\partial_2)\Lambda_i=F_\pm(\alpha,\beta,\gamma)[J_1\mp iJ_2-\operatorname{ctg}\beta J_3,\ \Lambda_i], \tag{2.15}$$

$$F_\pm(\alpha,\beta,\gamma)\equiv-E_\pm e^{\pm i\gamma}\equiv F\exp[\pm i(\arg f'+\alpha+\gamma)]$$

$$\equiv\pm 2|f'|\cos^2\frac{\beta}{2}\exp[\pm i(\arg f'+\alpha+\gamma)]. \tag{2.16}$$

设子群 $H(=SU(2)\otimes U(1))$ 由 $\lambda_1/2,\ \lambda_2/2,\ \lambda_3/2;\ \lambda_8$ 生成，那么陪集 (G/H) 代数为 $\lambda_4\lambda_5\lambda_6\lambda_7$ 所组成．子陪集代数 $\lambda_6\lambda_7$ 与 $\lambda_5\lambda_7$ 等又分别是

(i) $j_1=\lambda_6/2,\quad j_2=\lambda_7/2,\quad j_3=(\sqrt{3}\lambda_8-\lambda_3)/4;$

(ii) $j_1=\lambda_7,\quad j_2=-\lambda_5,\quad j_3=\lambda_2$

等的 $\mathrm{CP}(1)\sim\dfrac{SO(3)}{SO(2)}$ 陪集生成元．由于 $[j_3,\lambda_8]=0$,

$$\Lambda_8=c\lambda_8c^{-1}=g\lambda_8g^{-1}. \tag{2.17}$$

按照选择 (i)，利用转动群的性质 Λ_8 可表为

$$\Lambda_8=D^0_{00}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_8+\sqrt{3}\lambda_3)/4+\sqrt{3}\{D^1_{00}(\alpha,\beta,\gamma)(\sqrt{3}\lambda_8-\lambda_3)/4$$

$$-D^1_{10}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_6+i\lambda_7)/2\sqrt{2}+D^1_{-10}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_6-i\lambda_7)/2\sqrt{2}\} \tag{2.18}$$

式中 $D^l_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$ 为 $SU(2)$ 转动矩阵．因为 Λ_8 实际上与 γ 无关，注意到 (2.9) (2.10) (2.16) 及 (2.18)，

$$\partial^2\Lambda_8(x)=-|F|^2J^2\Lambda_8(x)=-2\sqrt{3}|F|^2(\sqrt{3}\Lambda_8(x)-\Lambda_3(x))/4 \tag{2.19}$$

显然满足方程 (2.2)．同样，运用 λ 代数及 (2.15) 不难检验自(反)偶方程 (2.1) 亦成立．如

$$(\partial_1\mp i\partial_2)\Lambda_8=\pm\sqrt{3}F_\pm(J_1\mp iJ_2),\quad (J_1=\Lambda_6/2,\ J_2=\Lambda_7/2) \tag{2.20}$$

$$[(\partial_1\mp i\partial_2)\Lambda_8,\ \Lambda_8/\sqrt{3}]=-(\tilde{\partial}_1\mp i\tilde{\partial}_2)\Lambda_8. \tag{2.21}$$

因此，我们所求的是手征方程自(反)偶解之一．

当考虑选择 (ii) 时情况就不同了．这时

$$\Lambda_8(x)=D^2_{00}(\alpha,\beta,\gamma)\lambda_8+D^2_{10}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_4+i\lambda_6)/\sqrt{2}-D^2_{-10}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_4-i\lambda_6)/\sqrt{2}$$

$$-D^2_{20}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_3+i\lambda_1)/\sqrt{2}-D^2_{-20}(\alpha,\beta,\gamma)(\lambda_3-i\lambda_1)/\sqrt{2}. \tag{2.22}$$

用 (i) 同样的办法可证它也是方程 (2.2) 的解，但方程 (2.1) 已不再成立，因为此时

$$[(\partial_1\mp i\partial_2)\Lambda_8,\ \Lambda_8/\sqrt{3}]=\sqrt{3}F_\pm(\Lambda_7\pm i\Lambda_5)$$

$$\neq-(\tilde{\partial}_1\mp i\tilde{\partial}_2)\Lambda_8=-\sqrt{3}F_\pm(\Lambda_4\mp i\Lambda_6). \tag{2.23}$$

三、非自偶解能排除吗?

文献[1]给出一个证明认为手征场只存在自(反)偶解1). 那么应如何解释上述非自偶解? 事实上，[1]的证明是依据下面积分式推出的

$$\oint_{S^1}(\Phi')^\dagger dz(\Phi)=0, \tag{3.1}$$

式中 $z=x_1+ix_2$, $\Phi=\phi_1+i\phi_2$, $\Phi'=\phi_1-i\phi_2$, ϕ_μ 是左不变流 Ω_μ 的次对角成分[见(1.8)]，围道 S^1 可以是一个半径很大的圆. 我们将证上节所得无论自偶解(i)或非自偶解(ii)都满足(3.1). 换言之，(3.1)并未排除非自偶解.

在证明之前，我们先要讨论一下 Ω_μ 与规范势的关系. 已经知道为映射 Λ_8 所诱导的 $SU(3)$ 规范势可写为[9]

$$W_\mu=\frac{1}{3}[\Lambda_8,\partial_\mu\Lambda_8]=\frac{1}{4}[N,\partial_\mu N]. \tag{3.2}$$

易见

$$D_\mu N\equiv\partial_\mu N+[W_\mu,N]=0=D_\mu\Lambda_8, \tag{3.3}$$

表明此势可约. 不难检验通过陪集元素 c 恰能将 $SU(3)$ 对称的势 W_μ 约化至 $SU(2)\otimes U(1)$ 的 A_μ，其变换的纯规范项正是 Ω_μ，即

$$A_\mu=c^{-1}W_\mu c+\Omega_\mu=\frac{1}{2}(N_0\Omega_\mu N_0+\Omega_\mu)=\begin{pmatrix}B_\mu & \\ & a_\mu\end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

这里 A_μ 是分块对角的. 回忆(1.8)式便得

$$c^{-1}W_\mu c=\begin{pmatrix}0 & \phi_\mu\\ -\phi_\mu^\dagger & 0\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

先看自(反)偶解(i)，此时

$$W_1\mp iW_2=-F_\pm(\Lambda_6\mp i\Lambda_7)/2, \tag{3.6}$$

$$c^{-1}(W_1\mp iW_2)c=-F_\pm e^{i\gamma\lambda_3}(\lambda_6\mp i\lambda_7)/2e^{-i\gamma\lambda_3}=E_\pm(\lambda_6\mp i\lambda_7)/2, \tag{3.7}$$

其中 $E_\pm$ 见(2.16)，比较(3.5)式可得

自偶: $$\phi_1-i\phi_2=0,\quad \phi_1+i\phi_2=E_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

反偶: $$\phi_1+i\phi_2=0,\quad \phi_1-i\phi_2=E_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

即 ϕ_μ 满足自(反)偶条件和积分(3.1).

再来看非自(反)偶解(ii)，易证

$$c^{-1}(W_1\mp iW_2)c=E_\pm(\lambda_7\pm i\lambda_5), \tag{3.9}$$

因此 $(E_+^\dagger=-E_-)$

$$\Phi'=\phi_1-i\phi_2=E_+\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix},\quad \Phi=\phi_1+i\phi_2=-E_-\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

---

1) 本文寄出后，我们才有机会看到原作者在文章正式发表时对此结论已予修正. 见 Ann. Phys. **128** (1980), 29.

显然 ϕ_μ 不是自(反)偶的，但积分 (3.1) 仍能满足

$$(\Phi')^\dagger(\Phi) = 0. \tag{3.11}$$

四、外 对 偶

为了弄清非自偶解的实质，我们曾引入“外对偶”的概念[6]．上面找到的两解都取值于子陪集 $\dfrac{SO(3)}{SO(2)}$，在此子陪集上对合算子约化为 $2J_3$，故规范势亦可表为

$$W_\mu = [J_3,\ \partial_\mu J_3]. \tag{4.1}$$

我们叫做外对偶的是如下的对偶关系

$$W_\mu = -[\widetilde{W}_\mu,\ J_3], \tag{4.2}$$

它等价于对偶方程 (1.14) 的 $SU(2)$ 形式

$$[\partial_\mu J_3,\ J_3] = \mp\ \tilde{\partial}_\mu J_3 \tag{4.3}$$

可以证明此方程与保形变换 (2.5) 所关联的函数 $\omega(x)$ 的全纯(反全纯)条件是相互等价的，即

$$\partial_\mu \omega(x) = \mp\ \tilde{\partial}_\mu \omega(x). \tag{4.4}$$

事实上，我们正是利用这个性质导出 (2.7) 及 (2.9)，从而证明了 (2.18)，(2.22) 是方程 (2.2) 的解．也就是说手征方程的解只需满足外对偶条件．关于这一点，我们在 [6] 的最后还给出过另一证明．

既然解只决定于外对偶，那么自偶(改称为内对偶)条件 (2.1) 就不必需满足．更确切地说，如果内对偶方程也成立，它实际上与外对偶方程完全等价．例如选择 (i)，只要注意到

$$\Lambda_8 + \sqrt{3}\,\Lambda_3 = \lambda_8 + \sqrt{3}\,\lambda_3 \tag{4.5}$$

是常数矩阵，同时

$$J_3 = \Lambda_8/\sqrt{3} - (\Lambda_8 + \sqrt{3}\,\Lambda_3)/4\sqrt{3}, \tag{4.6}$$

便可从外对偶 (4.3) 直接导出内对偶 (2.1) 式．至于选择 (ii)，这样的等价关系是不存在的．

上述结论亦可从陪集 c 的 CP(n) 表示看出，(i) 和 (ii) 分别有

$$c = \begin{pmatrix} 1 & \\ & D^{\frac{1}{2}}(\alpha,\ \beta,\ -\alpha) \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

及

$$c = M^1(\alpha,\ \beta,\ -\alpha) \tag{4.8}$$

其中 $D^{\frac{1}{2}}(\alpha, \beta, \gamma)$ 和 $M^1(\alpha, \beta, \gamma)$ 分别是 $j = 1/2$ 的转动矩阵和直角坐标系的 $j = 1$ 转动矩阵[10]．前者对应于非齐次坐标

$$\iota(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -w(x) \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

因而 $\iota(x)$ 与 $w(x)$ 的解析性是一致的．后者

$$\iota(x) = -\operatorname{tg}\beta(x)\begin{pmatrix} \sin\alpha(x) \\ \cos\alpha(x) \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

其解析性与 $w(x)\left(=\mathrm{tg}\dfrac{\beta(x)}{2}e^{-i\alpha(x)}\right)$ 的 Cauchy-Riemann 条件是互不协调的.

五、规范场及拓扑荷

现在我们再详细讨论一下规范势的含义. 从自偶手征场诱导出的规范势很明显是 Dirac 磁单极,用 (4.9) 代入 (1.9) 和 (3.4) $\left[B_\mu=-a_\mu\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$

$$\boldsymbol{A}=i\hat{\varphi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}\frac{\tau_3}{2},\quad \tau_3\equiv(\sqrt{3}\lambda_8-\lambda_3)/2, \tag{5.1}$$

式中 $\theta=\beta$, $\varphi=\alpha$. 通过由陪集 c 产生的规范变换得到的是 'tHooft 势,或直接求出对合算子 N, 并注意到在 S^2 上的 1, 2 轴是经纬方向,便有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}&=\frac{1}{2r}\left(\hat{\theta}N\partial_\theta N+\frac{\hat{\varphi}}{\sin\theta}N\partial_\varphi N\right)\\&=\frac{i}{r}(\hat{\theta}\hat{\varphi}-\hat{\varphi}\hat{\theta})\cdot\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}=i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\times\hat{r}/r,\quad(\tau_1,\tau_2)\equiv(\lambda_6,\lambda_7),\end{aligned} \tag{5.2}$$

式中 $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ 为 S^2 上球坐标的单位矢量.

同样可证手征场的非自偶解也诱导出 Dirac 和 'tHooft 势,容易写出

$$N=\begin{pmatrix}2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1 & \sin^2\theta\sin 2\varphi & -\sin 2\theta\cos\varphi\\ \sin^2\theta\sin 2\varphi & 2\sin^2\theta\sin^2\varphi-1 & -\sin 2\theta\sin\varphi\\ -\sin 2\theta\cos\varphi & -\sin 2\theta\sin\varphi & \cos 2\theta\end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}&=\frac{1}{2r}\left(\hat{\theta}N\partial_\theta N+\frac{\hat{\varphi}}{\sin\theta}N\partial_\varphi N\right)\\&=i\boldsymbol{I}\times\hat{r}/r,\quad(I_1,I_2,I_3)\equiv(\lambda_7,-\lambda_5,\lambda_2).\end{aligned} \tag{5.4}$$

用 c 作规范变换可得

$$\boldsymbol{A}=i\hat{\varphi}\frac{1-\cos\theta}{r\sin\theta}I_3. \tag{5.5}$$

比较两者的结果,显见仅是嵌入方式不同,前者平凡地嵌在 $SU(2)(\bar{\in}H!)$ 子空间内,后者则嵌满了整个 $SU(3)$ 空间(注意,单就 A_μ 而言,选择 (i) 涉及整个子群 $H=SU(2)\otimes U(1)$ 的空间;选择(ii)由于 $j_3=\lambda_2$ 与H中 $U(1)$ 不相交,因此 $a_\mu=0$, 仅占有 $SU(2)\in H$ 的子空间, 即 $B_\mu\neq 0$).

最后,让我们再考察一下有关的拓扑荷,按定义(1.12)我们可将映射 $x\to\dfrac{SU(3)}{SU(2)\otimes U(1)}\sim\mathrm{CP}(2)$ 的拓扑荷叫做 Q_2

$$Q_2=\frac{1}{32\pi i}\int d^2x T_r N[\partial_\mu N,\tilde{\partial}_\mu N], \tag{5.6}$$

到子陪集上的映射 $x\to\dfrac{SO(3)}{SO(2)}\sim\mathrm{CP}(1)$ 相应的拓扑荷叫 Q_1

$$Q_1=\frac{1}{2\pi i}\int d^2x T_r(J_3[\partial_\mu J_3,\tilde{\partial}_\mu J_3])/T_r(J_3J_3). \tag{5.7}$$

从 (3.2) 和 (4.1) 易得

$$F_{\mu\nu}=\frac{1}{4}[\partial_\mu N,\ \partial_\nu N], \tag{5.8}$$

$$=[\partial_\mu J_3,\ \partial_\nu J_3]=J_3T_r(J_3F_{\mu\nu})/T_r(J_3J_3). \tag{5.9}$$

代入 (5.6) 并注意 $T_r(J_3N)=T_r(j_3N_0)=$ 常数，便得出

$$Q_2=T_r(j_3N_0)Q_1. \tag{5.10}$$

上面两种 CP(1) 嵌入 CP(2) 的情形，Q_1 都等于 (2.6) 的极点数．但选择(i) $Q_2=Q_1$，说明了内外对偶等价．选择 (ii) $Q_2=0$，表明不存在内对偶．

六、推广到 CP(n)

我们的结果很容易推广到 CP(n) $\sim\dfrac{SU(n+1)}{SU(n)\otimes U(1)}$．例如，若选 j_3，j_μ 使

$$[j_3,\ \lambda_{n(n+2)}]=0,\quad [j_\mu,\ \lambda_{n(n+2)}]\neq 0,$$

则可诱导出 $[\partial^2\Lambda_{n(n+2)},\ \Lambda_{n(n+2)}]=0$ 的解．其中当且仅当 $[[j_\mu,\ \lambda_{n(n+2)}],\ \lambda_{n(n+2)}]\propto\pm[\tilde{j}_\mu,\ \lambda_{n(n+2)}]$ 时此解是自偶的．就 $n=3$ 的情形来说内对偶方程可写作

$$\left[\partial_\mu\Lambda_{15},\ \frac{\sqrt{6}}{4}\Lambda_{15}\right]=\mp\tilde{\partial}_\mu\Lambda_{15}. \tag{6.1}$$

自偶解有

$$(j_1,\ j_2,\ j_3)=(\lambda_{13}/2,\ \lambda_{14}/2,\ \lambda_{15}/\sqrt{6}-\lambda_8/2\sqrt{3}) \tag{6.2}$$

等，用与 $n=2$ 情形类似地可以证明内外对偶等价，同时满足二次方程．非自偶解有

$$(j_1,\ j_2,\ j_3)=(\lambda_{14},\ -\lambda_{12},\ \lambda_7);\ (\lambda_{14},\ -\lambda_{10},\ \lambda_5);\ (\lambda_{12},\ -\lambda_{10},\ \lambda_2). \tag{6.3}$$

同样可以证明内对偶不再成立但仍满足二次方程；此时 Λ_{15} 属转动群 $D^3(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示．

更一般地讲，如果我们将 CP(m) 嵌入到 CP(n) ($m\leqslant n-1$) 里去，都可得到非自偶解．为了看清这一点，让我们推广 λ 代数到 $SU(n)$ 群，考虑其最末一个生成元

$$\lambda_{n(n+2)}=R(n)\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1 & 2 & \cdots & n+1\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots 1 & \\ & & & -n\end{pmatrix}\end{array} \tag{6.4}$$

$$R(n)=\left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.5}$$

容易求出对合算子

$$N_0=\sqrt{\frac{2n}{n+1}}\lambda_{n(n+2)}+\frac{n-1}{n+1}. \tag{6.6}$$

同样还成立

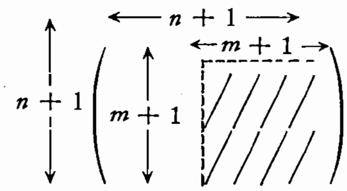
$$\lambda^2_{n(n+2)}=-(n-1)\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}\lambda_{n(n+2)}+\frac{2}{n+1}. \tag{6.7}$$

和 $\Lambda^2_{n(n+2)}$ 当然有与上相同的公式．代入自偶方程 (1.14) 即得

$$[\partial_\mu \Lambda(n), \Lambda(n)/\gamma] = \mp \tilde{\partial}_\mu \Lambda(n), \tag{6.8}$$

式中我们已取

$$\Lambda(n) \equiv \Lambda_{n(n+2)}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}. \tag{6.9}$$



CP(m) 嵌入于 CP(n) ($m \leqslant n-1$) 时，在平凡嵌入情形，易证

$$\Lambda(m) = \frac{(m+1)R(m)}{(n+1)R(n)} \Lambda(n) + C, \tag{6.10}$$

其中

$$\begin{array}{c} \longleftarrow n-m \longrightarrow \longleftarrow m+1 \longrightarrow \\ C = \dfrac{n-m}{n+1} R(m) \begin{pmatrix} -\dfrac{m+1}{n-m} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -\dfrac{m+1}{n-m} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.11}$$

为一 $SU(m)$ 的常数矩阵．利用(6.10)式立即可证 $\Lambda(m)$ 满足的自偶方程("外对偶")与 $\Lambda(n)$ 满足的自偶方程("内对偶")完全等价．反之，自偶关系等价必成立形如(6.10)的线性关系式．

如果是满嵌入，则此时 $SU(m)$ 的不变矩阵只能是常数乘单位矩阵，所以 $\Lambda(m)$ 与 $\Lambda(n)$之间不可能有(6.10)形式的关系．$\Lambda(m)$的自偶关系仍然是成立的(因为是 CP(m))，但 $\Lambda(n)$ 的自偶关系就被破坏了．

然而，无论是平凡嵌入还是满嵌入，它们都满足 $\Lambda(m)$ 的自偶方程．只要存在这个自偶条件，就一定能满足手征场的二次方程．因此平凡嵌入得到的是自偶解，满嵌入得到的就是所谓的"非自偶解"了．

参 考 文 献

[1] F. Gürsey and H C. Tze, YTP79-02; Proceedings of the 1980 Guangzhou Conference on Theoretical Particle Physics (Science Press, Beijing) p. 1019.
[2] V. L. Golo and A. M. Perelomov, *Lett. Math. Phys.*, **2**(1978), 477.
[3] D'Adda P. Di Vecchia and M. Lüscher, *Nucl. Phys.*, **146B** (1978), 63; M. Lüscher, *Phys. Lett.*, **78B** (1978), 465.
[4] H. Eichenherr, *Nucl. Phys.*, **135B** (1978), 1.
[5] W. E. Zakharov and A. W. Mikhailov, JETP74 (1978), 1953.
[6] Hou Bo-yu et al., *Phys Lett.*, **93B** (1980), 915.
[7] R. Gil more, Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications (A Wiley-Interscience Publication, 1974) Chapter 9.
[8] U. Fano and G. Racah, Irreducible Tensorial Sets (Academic Press Inc, 1959) p. 146.
[9] 侯伯宇、段一士、葛墨林，中国科学，**21** (1978)，446.
[10] M. E. Rose, Elementary Theory of Angular Momentum (John Wiley & Sons, Inc. 1957), p. 65.

THE NON-SELFDUAL SOLUTIONS OF CP(n) CHIRAL THEORY AND CORRESPONDING GAUGE FIELDS

HOU BO-YU　SHI KANG-JIE　WANG YU-BIN
(*Northwest University*)

HOU BO-YUAN
(*Inner Mongolia University*)

WANG PEI
(*Szichwan University*)

ABSTRACT

The selfdual and non-selfdual solutions for the CP(n) Chiral fields are obtained by means of various methods of embeding the subgroup $SU(m)$ ($m \leqslant n$) into the $SU(n+1)$ group space. We discuss the origin, the property and corresponding gauge fields as well as topological charges of non-selfdual solutions in detail. The non-selfdual solutions are induced from the present theoretical frames inevitably.