第7卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 7, No. 4
1983 年 7 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July 1983

$SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 单粒子母分系数

陈 金 全　　M. Vallieres 冯达旋
（南京大学物理系）　（美国 Drexel 大学物理和大气科学系）

摘　　要

本文利用置换群 CG 系数计算了五个粒子以内的所有 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 单粒子母分系数.

一、引　　言

$SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数 (Coefficients of fractional parentage) 是熟知的 $SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)$ 母分系数[1]的推广. 前者在夸克模型[4-6]和超核理论[7,8]中有着重要的应用. 但迄今为止只有 $SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)$[1] 和 $SU(6)\supset SU(3)\times SU(2)$[2] 母分系数有表可查. 我们在文[9]中证明了 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ f_2-粒子母分系数就等于置换群 $S_f\supset S_{f-f_2}\times S_{f_2}$ 标量因子 (isoscalar factor). 因此 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数的值只和不可约表示有关而和 m, n 无关. 我们可以通过计算置换群的 $S_f\supset S_{f_1}\times S_{f_2}$ 标量因子而一劳永逸地得到 m, n 为任意值时的 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数,而不必像从前那样要一个 m, 一个 n 地分别计算.

本文利用置换群 CG 系数表[10] 计算了五个粒子以内的 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数(六个粒子的母分系数将另行发表). 我们统一采用配分来标志酉群的不可约表示,因此所列出的母分系数表是普适的,即适用于任意 m 和 n. 以往都用一些具体量子数来标志酉群的不可约表示, 这些量子数的选取随 m, n 的不同而不同,因此对每一个 m 和每一个 n 都要单独列一套母分系数表.

关于多粒子母分系数的讨论见文献[11].

二、计 算 公 式

令 $\left|\begin{matrix}[\nu]\\ \beta\sigma W_{1}\mu W_{2}\end{matrix}\right\rangle$ 和 $\left|\begin{matrix}[\nu']\\ \beta'\sigma' W'_{1}\mu' W'_{2}\end{matrix}\right\rangle$ 分别为 f 和 $f-1$ 个粒子的 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 分类基,这里 $[\nu]$ 为 $SU(mn)$ 群不可约表示的标志, $[\sigma]W_1$ 和 $[\mu]W_2$ 分别为 $SU(m)$ 和 $SU(n)$ 不可约基的标志, W_i 为分量指标 β 为多重性指标,用以区分不可约表示 $[\nu]$ 中, $[\sigma]$ 和 $[\mu]$ 出现不止一次的情形, f 粒子态的单粒子母分展开式为

本文 1982 年 5 月 19 日收到.

$$\left|\begin{matrix}[\nu]\\ \beta\sigma W_1\mu W_2\end{matrix}\right\rangle=\sum_{\beta'\sigma'\mu'}C^{[\nu]\beta\sigma\mu}_{[\nu']\beta'\sigma'\mu',[1]}\left[\left|\begin{matrix}[\nu']\\ \beta'\sigma'\mu'\end{matrix}\right\rangle\varphi^{[1]}(f)\right]^{[\sigma][\mu]}_{W_1W_2} \tag{1}$$

这里 $\varphi^{[1]}(f)$ 代表第 f 个粒子的波函数，方括号代表用 $SU(m)$ 和 $SU(n)$ CG 系数将括号内的乘积基耦合成 $SU(m)$ 的不可约基 $[\sigma]W_1$ 和 $SU(n)$ 的不可约基 $[\mu]W_2$，系数 $C^{[\nu]\beta\sigma\mu}_{[\nu']\beta'\sigma'\mu',[1]}$ 为 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 单粒子母分系数. 文 [9] 证明了它就等于置换群 $S_f\supset S_{f-1}$ 单态因子 $C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'}$.

$$C^{[\nu]\beta\sigma\mu}_{[\nu']\beta'\sigma'\mu',[1]}=C^{[\nu]\beta[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'}=\sum_{m_1'm_2'}C^{[\nu]\beta,m}_{\sigma m_1,\mu m_2}C^{[\nu']\beta',m'}_{\sigma'm_1',\mu'm_2'}. \tag{2}$$

这里第二个等式右边的第一、第二个因子分别为置换群 S_f 和 S_{f-1} 群的 CG 系数[10]. 当多重性指标 β' 为多余时，(2)式可简化为以下式子.

$$C^{[\nu]\beta[\nu']}_{\sigma\sigma',\mu\mu'}=C^{[\nu]\beta,m}_{\sigma m_1,\mu m_2}\Big/C^{[\nu']m'}_{\sigma'm_1',\mu'm_2'}. \tag{3}$$

这里量子数 $[\nu']m'$ 和 $[\nu]m$ 的关系为：将杨盘 $Y^{[\nu]}_m$ 中的第 f 个方块去掉，剩下的杨盘将是 $Y^{[\nu']}_{m'}$. $[\sigma']m'$ 和 $[\sigma]m$ 的关系以及 $[\mu']m'$ 和 $[\mu]m$ 的关系与此类同. 例如

$$C^{[221][22]}_{[41][4],[32][22]}=\left\langle\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}\;\middle|\;\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}\;\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\right\rangle\Bigg/\left\langle\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}\;\middle|\;\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline\end{array}\;\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}\right\rangle$$

用(3)式计算母分系数时，m_1，m_2，m 可取任意值，只要 CG 系数 $C^{[\nu]\beta,m}_{\sigma m_1,\mu m_2}$ 不为零即可.

三、位 相 约 定

文[10]中给出的置换群 CG 系数的绝对位相是任选的，没有作系统的约定. 虽然这绝对位相对置换群 CG 系数显不重要，但对 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数却是重要的，因为由 (2) 或 (3) 式可知，置换群 CG 系数的绝对位相会影响到 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 的母分系数的相对位相. 为了消除相位上的任意性，我们对置换群 CG 系数的绝对位相作以下规定：先将置换群不可约基按 Yamanouchi 数由大到小进行编号 (in decreasing page order)，将乘积基 $|m_1m_2\rangle=\phi^{\sigma}_{m_1}\phi^{\mu}_{m_2}$ 按以下次序排列 $|11\rangle$、$|12\rangle\cdots|1h_\mu\rangle$，$|21\rangle\cdots|2h_\mu\rangle\cdots|h_\sigma h_\mu\rangle$，这里 h_σ，h_μ 为不可约表示的维数；把 CG 系数 $C^{[\nu]\beta,m=1}_{\sigma m_1,\mu m_2}$ 看成 $h_\sigma h_\mu$ 维向量的第 (m_1m_2) 分量；要求该向量的头一个非零分量为正数.

根据上述约定的置换群 CG 系数由(2)或(3)式计算的 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数 $C^{[\nu]\beta[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'}$ 满足以下位相约定：将配分按其行长由长到短进行编号，如 $[5]$，$[41]$，$[32]\cdots\cdots[1^5]$；将一对配分 $[\sigma'][\mu']$ 按以下次序编号. $[5][5]$，$[5][41]$，$\cdots\cdots[5][1^5]$，$[41][5]$，$[41][41]$，$\cdots[41][1^5]$，$\cdots[1^5][1^5]$；把给定 $[\nu]$ 下编号为最小的那个 $[\nu']$ 的母分系数 $C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'}$ 看成一个矢量的 $\sigma'\mu'$ 分量，然后规定该矢量的头一个非零分量永为正值.

文[10]中给出的 CG 系数表不满足前述位相约定．为了符合这一位相约定，文[10]中的 CG 系数表的位相需作如下调整，即将以下 $[\sigma]\times[\mu]\longrightarrow[\nu]$ 的 CG 系数全部反号：

表 1. $[21]\times[21]\longrightarrow[3]+[21]$　表 2.1　$[31]\times[31]\longrightarrow[31]$

表 2.3　$[22]\times[22]\longrightarrow[22]$　表 3.1　$[41]\times[41]\longrightarrow[41]+[32]+[311]$

表 3.4　$[32]\times[32]\longrightarrow[41]+[32]+[21^3]$

表 3.5　$[311]\times[32]\longrightarrow[221]+[21^3]$.

表 3.6　$[311]\times[311]\longrightarrow[41]+[311]+[221\beta]$

表 4.1　$[51]\times[51]\longrightarrow[51]+[42]+[411]$

表 4.2　$[51]\times[42]\longrightarrow[42]+[411]+[33]+[321]$

表 4.4　$[51]\times[33]\longrightarrow[321]$　表 4.5　$[33]\times[33]\longrightarrow[42]$

表 4.6　$[42]\times[33]\longrightarrow[33]$　表 4.7　$[411]\times[33]\longrightarrow[2^3]$

表 4.8　$[42]\times[42]\longrightarrow[51]+[411]+[321\alpha]+[2^3]$

表 4.9　$[42]\times[411]\longrightarrow[31^3]$

表 4.10　$[411]\times[411]\longrightarrow[411]+[321\alpha]+[321\beta]+[2^3]$

表 4.11　$[51]\times[321]\longrightarrow[411]+[321\beta]+[2^3]$

表 4.12　$[33]\times[321]\longrightarrow[411]+[321\alpha]+[321\beta]$

表 4.13　$[42]\times[321]\longrightarrow[321\alpha]$

表 4.14　$[411]\times[321]\longrightarrow[321\alpha]+[321\gamma]$

四、母分系数的一些性质

1. 么正性

$$\sum_{\sigma'\mu'\beta'} C^{[\nu]\beta[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} C^{[\nu_1]\beta_1,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} = \delta_{\nu\nu_1}\delta_{\beta\beta_1}$$

$$\sum_{\nu\beta} C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'_1}_{\sigma\sigma'_1,\mu\mu'_1} = \delta_{\sigma'\sigma'_1}\delta_{\mu'\mu'_1}\delta_{\beta\beta'_1}$$

2. 由置换群 CG 系数的性质[10]以及(2)式可得出母分系数的下列对称性

(a) $C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} = \epsilon_1 C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\mu\mu',\sigma\sigma'}$

(b) $\sqrt{\dfrac{h_{\nu}'}{h_{\nu}}}\, C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} = \epsilon_2\sqrt{\dfrac{h_{\sigma}'}{h_{\sigma}}}\, C^{[\sigma]\beta[\sigma']\beta'}_{\nu\nu',\mu\mu'} = \epsilon_3\sqrt{\dfrac{h_{\mu}'}{h_{\mu}}}\, C^{[\mu]\beta[\mu']\beta'}_{\sigma\sigma',\nu\nu'}$

(c) $C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} = \epsilon_4 C^{[\nu]\beta[\nu']\beta'}_{\tilde\sigma\tilde\sigma',\tilde\mu\tilde\mu'} = \epsilon_5 C^{[\tilde\nu]\beta,[\tilde\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\tilde\mu\tilde\mu'} = \epsilon_6 C^{[\tilde\nu]\beta,[\tilde\nu']\beta'}_{\tilde\sigma\tilde\sigma',\mu\mu'}$.

这里 $\epsilon_1, \cdots\epsilon_6$ 都是相因子，$\epsilon_i=\pm1$．注意，ϵ_i 和 σ, μ, ν, β, σ', μ', ν' 及 β' 有关，h_ν 等为置换群的不可约表示的维数．$[\tilde\nu]$ 代表杨图 $[\nu]$ 的转置.

此外从酉群角度出发，还可得到另外两个性质[12].

(d) $C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} = \epsilon_7 C^{[\tilde\nu]\beta,[\tilde\nu']\beta'}_{\tilde\sigma\tilde\sigma',\tilde\mu\tilde\mu'}$

(e) $\sqrt{\dfrac{h_\sigma(SU_m)h_\mu(SU_n)}{h_\nu(SU_{mn})}}\, C^{[\nu]\beta,[\nu']\beta'}_{\sigma\sigma',\mu\mu'} = \epsilon_8\sqrt{\dfrac{h_{\sigma}'(SU_m)h_{\mu}'(SU_n)}{h_{\nu}'(SU_{mn})}}\, C^{[\tilde\nu']\beta'[\tilde\nu]\beta}_{\tilde\sigma'\tilde\sigma,\tilde\mu'\tilde\mu}$

这里 $[\bar{\sigma}]$，$[\bar{\mu}]$ 和 $[\bar{\nu}]$ 分别为 $SU(m)$，$SU(n)$ 和 $SU(mn)$ 群的不可约表示 $[\sigma]$，$[\mu]$ 和 $[\nu]$ 的复共厄（Contragredient）表示，而 $h_\sigma(SU_m)$，$h_\mu(SU_n)$ 和 $h_\nu(SU_{mn})$ 分别为 $SU(m)$，$SU(n)$ 和 $SU(mn)$ 群的不可约表示的维数．ϵ_7 和 ϵ_8 仍为位相因子．

3. 特例．

(a) $C^{[\nu][\nu']}_{[f][f-1],[\mu][\mu']} = \delta_{\nu\mu}\delta_{\nu'\mu'}$ (b) $C^{[\nu][\nu']}_{[1^f][1^{f-1}],[\mu][\mu']} = \delta_{\nu\tilde{\mu}}\delta_{\nu'\tilde{\mu}'}$

(c) $C^{[f][f-1]}_{[\sigma][\sigma'],[\mu][\mu']} = \sqrt{\dfrac{h_{\sigma'}}{h_\sigma}}\,\delta_{\sigma\mu}\delta_{\sigma'\mu'}$ (d) $C^{[1^f][1^{f-1}]}_{[\sigma][\sigma'],[\mu][\mu']} = \sqrt{\dfrac{h_{\sigma'}}{h_\sigma}}\,\delta_{\sigma\tilde{\mu}}\delta_{\sigma'\tilde{\mu}'}$

五、单粒子母分系数表

利用文[10]给出的置换群 CG 系数表，考虑到第三节讨论的位相修正，由 (2) 或 (3) 式可容易地算出 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 单粒子母分系数．五个粒子以内的结果列在表 1—表 22．表头的意义如下

$[\sigma][\mu]$	$[\nu']$
	$[\nu]$
$[\sigma'][\mu']$	

或

$[\sigma][\mu]$	$[\nu']$
	$[\nu](\beta=1)[\nu](\beta=2)$
$[\sigma'][\mu']$	

表中列出的为系数的平方值，带负号者代表该系数为负值．从任一个表中可读出 m，n 为任意值时[1)]的 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 单粒子母分系数．例如将表 13d 的表头作如下改变，就可读出 $SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)$ 和 $SU(6)\supset SU(3)\times SU(2)$ 母分系数

表 13 d. $SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)$ 母分系数 $C^{[\nu]ST}_{[\nu']S'T',[1]}$

$SU(6)\supset SU(3)\times SU(2)$ 母分系数 $C^{[\nu](\lambda\mu)S}_{[\nu'](\lambda'\mu')S',[1]}$

$SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数 $C^{[\nu]\sigma\mu}_{[\nu']\sigma'\mu',[1]}$

$SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)$	$SU(6)\supset SU(3)\times SU(2)$	$SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$	$[\nu']=[211]$		
$^{2S+1\ 2T+1}\Gamma$	$(\lambda\mu)S$	$[\sigma]$ $[\mu]$	$[\nu]$		
$^{22}\Gamma$	$(12)1/2$	$[32]$ $[32]$	$[311]$	$[221]$	$[21^3]$
$^{2S'+1\ 2T'+1}\Gamma$	$(\lambda'\mu')S'$	$[\sigma']$ $[\mu']$			
$^{33}\Gamma$	$(21)1$	$[31]$ $[31]$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
$^{31}\Gamma$	$(21)0$	$[31]$ $[22]$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$
$^{13}\Gamma$	$(02)1$	$[22]$ $[31]$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$

除位相因子外，它和文 [1] 的 $SU(4)\supset SU(2)\times SU(2)$ 母分系数以及文 [2] 的

1) 当然 $m(n)$ 应大于等于杨图 $[\sigma]([\mu])$ 的行数．

$SU(6)\supset SU(3)\times SU(2)$ 母分系数值相一致.

表 1—22. m,n 为任意值的 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 单粒子母分系数.

表 1. [21] × [21]	表 2. [31] × [31]	表 3. [31] × [22]
表 4. [31] × [211]	表 5. [22] × [22]	表 6. [22] × [211]
表 7. [211] × [211]	表 8. [41] × [41]	表 9. [41] × [32]
表 10. [41] × [311]	表 11. [41] × [221]	表 12. [41] × $[21^3]$
表 13. [32] × [32]	表 14. [32] × [311]	表 15. [32] × [221]
表 16. [32] × $[21^3]$	表 17. [311] × [311]	表 18. [311] × [221]
表 19. [311] × $[21^3]$	表 20. [221] × [221]	表 21. [221] × $[21^3]$
表 22. $[21^3]$ × $[21^3]$		

S_3: 1a[21]×[21]

[21]	[21]	[2]	
$\sigma'\mu'$	ν	[3]	[21]
[2]	[2]	1/2	1/2
[11]	[11]	1/2	−1/2

1b

[21]	[21]	[11]	
$\sigma'\mu'$	ν	[21]	$[1^3]$
[2]	[11]	−1/2	1/2
[11]	[2]	−1/2	−1/2

S_4: 2a[31]×[31]

[31]	[31]	[3]	
		[4]	[31]
[3]	[3]	1/3	2/3
[21]	[21]	2/3	−1/3

2b

[31]	[31]	[21]		
		[31]	[22]	[211]
[3]	[21]	−1/6	1/3	1/2
[21]	[3]	−1/6	1/3	−1/2
[21]	[21]	2/3	1/3	0

2c

[31]	[31]	$[1^3]$
		[211]
[21]	[21]	1

3a [31]×[22]

[31]	[22]	[3]
		[31]
[21]	[21]	1

3b

[31]	[22]	[21]	
		[31]	[211]
[3]	[21]	1/2	1/2
[21]	[21]	1/2	−1/2

3c

[31]	[22]	$[1^3]$
		[211]
[21]	[21]	−1

4a[31]×[211]

[31]	[211]	[3]
		[31]
[21]	[21]	1

4b

[31]	[211]	[21]		
		[31]	[22]	[211]
[3]	[21]	−1/2	1/3	1/6
[21]	[21]	0	−1/3	2/3
[21]	$[1^3]$	1/2	1/3	1/6

4c

[31]	[211]	$[1^3]$	
		[211]	$[1^4]$
[3]	$[1^3]$	−2/3	1/3
[21]	[21]	−1/3	−2/3

5a [22]×[22]

[22]	[22]	[3]
		[4]
[21]	[21]	1

5b

[22]	[22]	[21]
		[22]
[21]	[21]	1

5c

[22]	[22]	$[1^3]$
		$[1^4]$
[21]	[21]	1

6a [22]×[211]

[22]	[211]	[3]
		[31]
[21]	[21]	1

6b

[22]	[211]	[21]	
		[31]	[211]
[21]	[21]	−1/2	1/2
[21]	$[1^3]$	−1/2	−1/2

6c

[22]	[211]	$[1^3]$
		[211]
[21]	[21]	1

7a [211]×[211]

[211]	[211]	[3]	
		[4]	[31]
[21]	[21]	2/3	1/3
$[1^3]$	$[1^3]$	1/3	−2/3

7b

[211]	[211]	[21]		
		[31]	[22]	[211]
[21]	[21]	2/3	1/3	
[21]	$[1^3]$	−1/6	1/3	1/2
$[1^3]$	[21]	−1/6	1/3	−1/2

7c

[211]	[211]	$[1^3]$
		[211]
[21]	[21]	1

8a [41]×[41]

[41]	[41]	[4]	
		[5]	[41]
[4]	[4]	1/4	3/4
[31]	[31]	3/4	−1/4

8b

[41]	[41]	[31]		
		[41]	[32]	[311]
[4]	[31]	−1/12	5/12	1/2
[31]	[4]	−1/12	5/12	−1/2
[31]	[31]	5/6	1/6	

8c

[41]	[41]	[22]
		[32]
[31]	[31]	1

8d

[41]	[41]	[211]
		[311]
[31]	[31]	1

9a [41]×[32]

[41]	[32]	[4]
		[41]
[31]	[31]	1

9b

[41]	[32]	[31]		
		[41]	[32]	[311]
[4]	[31]	1/3	1/6	1/2
[31]	[31]	2/15	5/12	−9/20
[31]	[22]	8/15	−5/12	−1/20

9c

[41]	[32]	[22]	
		[32]	[221]
[4]	[22]	−3/8	5/8
[31]	[31]	−5/8	−3/8

9d

[41]	[32]	[211]	
		[311]	[221]
[31]	[31]	−1/4	3/4
[31]	[22]	3/4	1/4

10a [41]×[311]

[41]	[311]	[4]
		[41]
[31]	[31]	1

10b

[41] [311]	[31]		
	[41]	[32]	[311]
[4] [31]	−1/3	5/12	1/4
[31] [31]		−3/8	5/8
[31] [211]	2/3	5/24	1/8

10c

[41] [311]	[22]	
	[32]	[221]
[31] [31]	−1/16	15/16
[31] [211]	15/16	1/16

10d

[41] [311]	[211]		
	[311]	[221]	[21^3]
[4] [211]	−1/4	5/12	1/3
[31] [31]	−1/8	5/24	−2/3
[31] [211]	5/8	3/8	

10e

[41] [311]	[1^4]
	[21^3]
[31] [211]	1

S_5 11a [41]×[221]

[41] [221]	[31]	
	[32]	[311]
[31] [22]	1/4	3/4
[31] [211]	3/4	−1/4

11b

[41] [221]	[22]	
	[32]	[221]
[4] [22]	−5/8	3/8
[31] [211]	−3/8	−5/8

11c

[41] [221]	[211]		
	[311]	[221]	[21^3]
[4] [211]	1/2	−1/6	1/3
[31] [22]	1/20	−5/12	−8/15
[31] [211]	9/20	5/12	−2/15

11d

[41] [221]	[1^4]
	[21^3]
[31] [211]	−1

12a [41]×[21^3]

[41] [21^3]	[31]
	[311]
[31] [211]	1

12b

[41] [21^3]	[22]
	[221]
[31] [211]	1

12c

[41] [21^3]	[211]		
	[311]	[221]	[21^3]
[4] [211]	1/2	−5/12	1/12
[31] [211]	0	1/6	5/6
[31] [1^4]	1/2	5/12	−1/12

12d

[41] [21^3]	[1^4]	
	[21^3]	[1^5]
[4] [1^4]	−3/4	1/4
[31] [211]	−1/4	−3/4

13a [32]×[32]

[32] [32]	[4]	
	[5]	[41]
[31] [31]	3/5	2/5
[22] [22]	2/5	−3/5

13b

[32] [32]	[31]		
	[41]	[32]	[311]
[31] [31]	1/3	2/3	0
[31] [22]	−1/3	1/6	1/2
[22] [31]	−1/3	1/6	−1/2

13c

[32] [32]	[22]	
	[32]	[221]
[31] [31]	1/4	3/4
[22] [22]	3/4	−1/4

13d

[32] [32]	[211]		
	[311]	[221]	$[21^3]$
[31] [31]	2/5	0	3/5
[31] [22]	3/10	1/2	−1/5
[22] [31]	−3/10	1/2	1/5

13e

[32] [32]	$[1^4]$
	$[21^3]$
[22] [22]	1

14a [32]×[311]

[32] [311]	[4]
	[41]
[31] [31]	1

14b

[32] [311]	[31]			
	[41]	[32]	[311]α	[311]β
[31] [31]	−3/10	0	3/5	1/10
[31] [211]	−1/6	1/3	0	−1/2
[22] [31]	−1/30	5/12	−3/20	2/5
[22] [211]	1/2	1/4	1/4	0

14c

[32] [311]	[22]	
	[32]	[221]
[31] [31]	−5/8	3/8
[31] [211]	−3/8	−5/8

14d

[32] [311]	[211]			
	[311]α	[311]β	[221]	$[21^3]$
[31] [31]	0	1/2	−1/3	1/6
[31] [211]	−3/5	1/10	0	−3/10
[22] [31]	1/4	0	−1/4	−1/2
[22] [211]	3/20	2/5	5/12	−1/30

14e

[32] [311]	$[1^4]$
	$[21^3]$
[31] [211]	1

15a [32]×[221]

[32] [221]	[4]
	[41]
[22] [22]	1

15b

[32] [221]	[31]		
	[41]	[32]	[311]
[31] [22]	−1/5	1/2	3/10
[31] [211]	3/5	0	2/5
[22] [211]	1/5	1/2	−3/10

15c

[32] [221]	[22]	
	[32]	[221]
[31] [211]	3/4	1/4
[22] [22]	−1/4	3/4

15d

[32] [221]	[221]		
	[311]	[221]	$[21^3]$
[31] [22]	−1/2	1/6	1/3
[31] [211]	0	2/3	−1/3
[22] [211]	1/2	1/6	1/3

15e

[32] [221]	$[1^4]$	
	$[21^3]$	$[1^5]$
[31] [211]	−2/5	3/5
[22] [22]	3/5	2/5

16a $[32]\times[21^3]$

[32] $[21^3]$	[31]	
	[32]	[311]
[31] [211]	3/4	1/4
[22] [211]	−1/4	3/4

16b

[32] $[21^3]$	[22]	
	[32]	[221]
[31] [211]	3/8	5/8
[22] $[1^4]$	5/8	−3/8

16c

[32] $[21^3]$	[211]		
	[311]	[221]	$[21^3]$
[31] [211]	9/20	−5/12	2/15
[31] $[1^4]$	−1/2	−1/6	1/3
[22] [211]	1/20	5/12	8/15

16d

[32] $[21^3]$	$[1^4]$
	$[21^3]$
[32] [211]	1

17a $[311]\times[311]$

[311] [311]	[4]	
	[5]	[41]
[31] [31]	1/2	1/2
[211] [211]	1/2	−1/2

17b

[311] [311]	[31]			
	[41]	[32]α	[32]β	[311]
[31] [31]	5/12	1/2	1/12	0
[31] [211]	−1/12	0	5/12	1/2
[211] [31]	−1/12	0	5/12	−1/2
[211] [211]	5/12	−1/2	1/12	0

17c

[311] [311]	[22]			
	[32]α	[32]β	[221]α	[221]β
[31] [31]	−3/16	1/2	5/16	0
[31] [211]	5/16	0	3/16	1/2
[211] [31]	5/16	0	3/16	−1/2
[211] [211]	3/16	1/2	−5/16	0

17d

[311] [311]	[211]			
	[311]	[221]α	[221]β	$[21^3]$
[31] [31]	1/2	0	−5/12	1/12
[31] [211]	0	−1/2	1/12	5/12
[211] [31]	0	−1/2	−1/12	−5/12
[211] [211]	1/2	0	5/12	−1/12

17e

[311] [311]	$[1^4]$	
	$[21^3]$	$[1^5]$
[31] [211]	1/2	1/2
[211] [31]	−1/2	1/2

18a $[311]\times[221]$

[311] [221]	[4]
	[41]
[211] [211]	1

18b

[311] [221]	[31]			
	[41]	[32]	[311]α	[311]β
[31] [22]	1/2	1/4	1/4	0
[31] [211]	1/6	−1/3	0	1/2
[211] [22]	1/30	−5/12	3/20	−2/5
[211] [211]	3/10	0	−3/5	−1/10

18c

[311]	[221]	[22]	
		[32]	[221]
[31]	[211]	−3/8	5/8
[211]	[211]	5/8	3/8

18d

[311]	[221]	[211]			
		[311]α	[311]β	[221]	$[21^3]$
[31]	[22]	3/20	2/5	−5/12	1/30
[31]	[211]	−3/5	1/10	0	3/10
[211]	[22]	−1/4	0	−1/4	−1/2
[211]	[211]	0	−1/2	−1/3	1/6

18e

[311]	[221]	$[1^4]$
		$[21^3]$
[31]	[211]	−1

19a $[311]\times[21^3]$

[311]	$[21^3]$	[4]
		[41]
[211]	[211]	1

19b

[311]	$[21^3]$	[31]		
		[41]	[32]	[311]
[31]	[211]	−2/3	5/24	1/8
[211]	[211]	0	−3/8	5/8
[211]	$[1^4]$	1/3	5/12	1/4

19c

[311]	$[21^3]$	[22]	
		[32]	[221]
[31]	[211]	−15/16	1/16
[211]	[211]	−1/16	−15/16

19d

[311]	$[21^3]$	[211]		
		[311]	[221]	$[21^3]$
[31]	[211]	−5/8	3/8	0
[31]	$[1^4]$	−1/4	−5/12	1/3
[211]	[211]	−1/8	−5/24	−2/3

19e

[311]	$[21^3]$	$[1^4]$
		$[21^3]$
[31]	[211]	−1

20a $[221]\times[221]$

[221]	[221]	[4]	
		[5]	[41]
[22]	[22]	2/5	3/5
[211]	[211]	3/5	−2/5

20b

[221]	[221]	[31]		
		[41]	[32]	[311]
[22]	[211]	−1/3	1/6	1/2
[211]	[22]	−1/3	1/6	−1/2
[211]	[211]	1/3	2/3	0

20c

[221]	[221]	[22]	
		[32]	[221]
[22]	[22]	3/4	1/4
[211]	[211]	1/4	−3/4

20d

[221]	[221]	[211]		
		[311]	[221]	$[21^3]$
[22]	[211]	3/10	−1/2	1/5
[211]	[22]	−3/10	−1/2	−1/5
[211]	[211]	2/5	0	−3/5

20e

$[221]$	$[221]$	$[1^4]$
		$[21^5]$
$[22]$	$[22]$	-1

21a

$[221]$	$[21^3]$	$[4]$
		$[41]$
$[211]$	$[211]$	1

21b

$[221]$	$[21^3]$	$[31]$		
		$[41]$	$[32]$	$[311]$
$[22]$	$[211]$	$-8/15$	$5/12$	$1/20$
$[211]$	$[211]$	$-2/15$	$-5/12$	$9/20$
$[211]$	$[1^4]$	$-1/3$	$-1/6$	$-1/2$

21c

$[221]$	$[21^3]$	$[22]$	
		$[32]$	$[221]$
$[22]$	$[1^4]$	$3/8$	$5/8$
$[211]$	$[211]$	$5/8$	$-3/8$

21d

$[221]$	$[21^3]$	$[211]$	
		$[311]$	$[221]$
$[22]$	$[211]$	$-3/4$	$1/4$
$[211]$	$[211]$	$1/4$	$3/4$

22a $[21^3]\times[21^3]$

$[21^3]$	$[21^3]$	$[4]$	
		$[5]$	$[41]$
$[211]$	$[211]$	$3/4$	$1/4$
$[1^4]$	$[1^4]$	$1/4$	$-3/4$

22b

$[21^3]$	$[21^3]$	$[31]$		
		$[41]$	$[32]$	$[311]$
$[211]$	$[211]$	$5/6$	$1/6$	0
$[211]$	$[1^4]$	$-1/12$	$5/12$	$1/2$
$[1^4]$	$[211]$	$-1/12$	$5/12$	$-1/2$

22c

$[21^3]$	$[21^3]$	$[22]$
		$[32]$
$[211]$	$[211]$	1

22d

$[21^3]$	$[21^3]$	$[211]$
		$[311]$
$[211]$	$[211]$	1

校后记: 我们最近已经证明 $SU(mn)\supset SU(m)\times SU(n)$ 母分系数同时也是超酉群(或阶化酉群) $SU(mp+nq/mq+np)\supset SU(m/n)\times SU(p/q)$ 母分系数[13] Bickerstaff 等[14]最近也给出了部分 $SU(6)\supset SU(3)\times SU(2)$ 母分系数.

参 考 文 献

[1] H. A. Jahn and H. Van Wieringen, *Proc. Roy. Soc.* (London), **A209**(1951), 502.
[2] S. I. So and D. Strottman, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 153.
[3] D. Strottman, *J. Math Phys.*, **20**(1979), 1643.
[4] D. Strottman, *Phys. Rev.*, **D20**(1979), 748.
[5] M. Harvey, *Nucl. Phys.*, **A352**(1981), 301.
[6] M. Harvey, *Nucl. Phys.*, **A352**(1981), 326.
[7] 张宗烨, 厉光烈, 高能物理与核物理 **26**(1977), 467.
[8] R. H. Dalitz and A. Gal, *Ann. Phys.*, **131** (1981), 314.
[9] J. Q. Chen, *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 1.
[10] 陈金全, 高美娟, 置换群约化系数及其应用, 科学出版社, 1981.

[11] J. Q. Chen, Y. J. Shi, D H. Feng and M. Vallieres, *Nucl. Phys.*, **A393**(1983), 122.
[12] 陈金全，群表示论的新途径，上海科技出版社，1983(在印刷中).
[13] J. Q. Chen, X. G. Chen and M. J. Gao, *J. Phys. A*: *Math. Gen.*, **16**(1983), L47.
[14] K. P. Bickerstaff, P. H. Butler, M. B. Butts. R. W. Haase and M. F. Reid, *J. Phys. A*: *Math. Gen.*, **15**(1982), 1087.

$SU(mn) \supset SU(m) \times SU(n)$ SINGLE-PARTICLE COEFFICIENTS OF FRACTIONAL PARENTAGE

CHEN JIN-QUAN
(*Nanjing University*)

M. VALLIERES D. H. FENG
(*Drexel University, Philadelphia, PA* 19104)

ABSTRACT

Utilizing the Clebsch-Gordan coefficients of the permutation groups, the $SU(mn) \supset SU(m) \times SU(n)$ single-particle coefficients of fractional parentage for up to five particles are calculated and tabulated for arbitrary m and n.