

重核裂变的扩散模型

贺泽君 李盘林 张家驹

(中国科学院原子核研究所)

摘 要

裂变核的变形运动被看作为扩散运动。在稳态近似下通过 Fokker-Planck 方程,用复矩阵连分数方法研究了裂变速率。最后采用一种数学模型势对 u^{236} 裂变作了数值计算,结果在物理上是基本合理的。

一、引 言

裂变的形变运动与其余自由度(被看作为热浴)的耦合,使裂变的形变运动具有无规的和耗散的特性,其耗散强度可用摩擦系数 γ 表示。故此可以假定裂变过程的形变运动是遵从朗之万方程的^[1,2]。

文献 [1] [2] [3] 基于上述类似的观点,由朗之万方程写出等价的 Fokker-Planck 方程,对裂变的速率作了研究。本文将采用一种数学模型位垒和复矩阵连分数方法,对裂变速率进行研究,以求在探索裂变过程的扩散运动性质方面作出我们的努力。

过去诸作者多取裂变位垒为谐振子型或抛物线型^[1-3]。而在本文中我们则已假定裂变位垒 $\hat{V}(\xi) = -\tilde{d} \cos \xi - \tilde{F} \xi$ 。这里的 ξ 是裂变核的变形, $2\tilde{d}$ 代表裂变位垒高度, $-\tilde{F} \xi$ 是一个线性叠加项。 \tilde{F} 用以表征位垒内外部高度差。显然 $\hat{V}(\xi)$ 包含了裂变位垒的主要物理特征。因此在研究裂变速率随位垒高度、位垒宽度和位垒内外高度差的变化时,采用这样的位垒是适合的。

在本文中,我们不在求出分布函数 W 后才来计算速率 $\langle v \rangle$, 这样做较麻烦。为避免这种麻烦我们先用 Hermite 函数展开分布函数 W , 引入玻色算符和 Dirac 符号, 最后得到的裂变速率只与展开式的第二个展开系数有关。文献 [4] 指出对于大的摩擦系数 ($\gamma > 4$), 一般只联立求解少数几个系数方程就可以得到这个系数。然而从裂变动力学知道^[5], 核从鞍点至断点的粘滞系数很小, 约在 $\mu_0 = 9 \times 10^{-24} \text{MeV} \cdot \text{秒}/\text{fm}^3$ 量级左右, 可以估计出这时的摩擦系数已经很小 ($\gamma < 4$), 因此对裂变过程作更全面的研究要得到所需的展开系数, 就必须解更大的线性方程组。为此, 本文采用了近年来发展起来的一种复矩阵连分数方法^[6], 用它处理了与平衡态偏离更大的情况。这一方法具有在数值计算上简便, 对 γ 的取值范围无限制等特点, 从而为我们较全面地研究各种情况对裂变的影响提供了一种

本文 1982 年 3 月 22 日收到。

途径.

二、基本方程

本文基于前面阐述的观点,将裂变过程描绘成一个惯性系数为 m 的粒子,在裂变变形位垒 $\hat{V}(\xi) = -\tilde{d}\cos\xi - \tilde{F}\xi$ 中的布朗运动,因而所满足的运动方程是朗之万方程:

$$m\ddot{\xi} + \tilde{\gamma}\dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi) = \tilde{F} + \tilde{I}(\tilde{t}) \quad (1)$$

在本文中我们假定初始裂变系统是呈球形的,这里的 ξ 是裂变过程中的裂变核的长半轴对于球半径的偏离. m 是与裂变核变形有关的惯性系数; $\tilde{\gamma}$ 是摩擦系数.裂变的变形自由度与系统其余自由度(考虑为热浴)的耦合主要由 $\tilde{\gamma}$ 决定, $f(\xi) = -\tilde{d}\cos\xi$,则此处的 $\hat{V}(\xi) = f(\xi) - \tilde{F}\xi$. $\tilde{I}(\tilde{t})$ 是 δ 关联的朗之万力,即满足关系:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{I}(\tilde{t}) \rangle &= 0, \\ \langle \tilde{I}(\tilde{t})\tilde{I}(\tilde{t}') \rangle &= 2\tilde{\gamma}KT\delta(\tilde{t} - \tilde{t}') \end{aligned}$$

为了进一步讨论,采用下面的标度变换:

$$\begin{aligned} \xi &= 2\pi\tilde{\xi}/L, & U &= \sqrt{m/KT}\tilde{U}, \\ \gamma &= [L/(2\pi\sqrt{mKT})]\tilde{\gamma}, \\ t &= (2\pi/L)\sqrt{KT/m}\tilde{t}, \\ f(\xi) &= \tilde{f}(\tilde{\xi})/KT, & F &= [L/2\pi KT]\tilde{F}. \end{aligned}$$

这里的 L 是引入的周期长度.在文中,我们按照文献[5]的公式定出 m 、 $\tilde{\gamma}$ 的值.又考虑到 m 在 γ 中是以它的平方根的倒数给出贡献的,则变形通过 m 对 γ 的影响也较小.又为了方便计算,所以在 γ 的计算中, m 被视为常数.经过标度变换后,(1)式变为如下形式:

$$\ddot{\xi} + \gamma\dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi) = F + \Gamma(t) \quad (2)$$

且,

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle &= 2\gamma\delta(t - t') \end{aligned}$$

由此写出等价于(2)式的 Fokker-Planck 方程^[7]:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \hat{L}_F W \quad (3)$$

其中 Fokker-Planck 算符 \hat{L}_F 为:

$$\hat{L}_F = -v \frac{\partial}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial}{\partial v} \right) (f' + \gamma v - F) + \gamma \frac{\partial^2}{\partial v^2}$$

考虑到计算上的方便,在此引入 Boson 算符:

$$\begin{aligned} b &= \frac{\partial}{\partial v} + \frac{v}{2}, & b^+ &= -\frac{\partial}{\partial v} + \frac{v}{2}, \\ bb^+ - b^+b &= 1 \end{aligned}$$

用 $\exp\left(\frac{v^2}{4}\right)$ 对 (3) 式作等价变换, 即分别用 $\exp\left(-\frac{v^2}{4}\right)$ 和 $\exp\left(\frac{v^2}{4}\right)$ 左乘和右乘 (3) 式的两边, 最后算符 \hat{L}_F 变为如下形式:

$$\hat{L}_F = \gamma b^+ b + (b^+ + b) \frac{\partial}{\partial \xi} + b^+ (f' - F) \quad (4)$$

$b^+ b$ 的本征函数 $|n\rangle$ 是具有本征值 n 的 Hermite 函数, 即:

$$\begin{aligned} b^+ b |n\rangle &= n |n\rangle, \\ |n\rangle &= (b^+)^n |0\rangle / n! \\ |0\rangle &= (2\pi)^{-1/4} \exp\left(-\frac{v^2}{4}\right) \end{aligned}$$

现在用 Hermite 函数将分布函数 $W(\xi, v, t)$ 展开

$$W(\xi, v, t) = (2\pi)^{-1/4} \exp\left(-\frac{v^2}{4}\right) \sum_{n \neq 0}^{\infty} C_n(\xi, t) |n\rangle$$

由 Hermite 函数的性质所知, $W(\xi, v)$ 是自然地满足边界条件: $v \rightarrow \pm \infty$, $W(\xi, v) \rightarrow 0$. 将 W 代入 (3), 利用 (4) 式和 Boson 算符的性质算出:

$$\begin{aligned} \hat{L}_{nm} = \langle n | \hat{L}_F | m \rangle &= n\gamma \delta_{nm} + \sqrt{n+1} \delta_{n+1,m} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ &+ \sqrt{n} \delta_{n-1,m} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + f' - F \right) \end{aligned}$$

于是可得稳态时的系数递推方程:

$$n\gamma C_n + \sqrt{n+1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right) C_{n+1} + \sqrt{n} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + f' - F \right) C_{n-1} = 0 \quad (5)$$

对非常小的 γ 在求所需的展开系数时, 必须求解由方程 (5) 得到的很大的联立方程组, 解起来颇为困难, 因而对研究非常小摩擦的情况, 我们就采用了矩阵连分数方法, 首先用满足边界条件的完全正交系展开周期函数 $C_n(\xi)$ 和 $f(\xi)$ ^[8]:

$$\begin{aligned} C_n(\xi) &= \sum_q C_n^q e^{iq\xi}, \\ f(\xi) &= \sum_q f^q e^{iq\xi} \end{aligned}$$

(5) 式就变成下面的形式:

$$n\gamma C_n^q + \sqrt{n+1} iq C_{n+1}^q + \sqrt{n} \sum_q \hat{D}^{qp} C_{n-1}^q = 0 \quad (6)$$

其中 \hat{D}^{qp} 是矩阵 \hat{D} 的矩阵元, 它的形式是:

$$\hat{D}^{qp} = (iq - F) \delta_{qp} + i(p - q) f^{q-p}$$

引入矩阵 M_n , 即令:

$$M_n C_{n-1} = \sqrt{n} D C_n \quad (7)$$

于是由 (6) 式得递推公式的矩阵式:

$$M_n = \frac{1}{\gamma} D \left[I + \frac{1}{n\gamma} M_{n+1} \right]^{-1} \hat{D} \quad (8)$$

已知系数递推关系 (5) 的最后一个系数方程为:

$$n\gamma C_n + \sqrt{n} \hat{D} C_{n+1} = 0$$

在上式中再用 M_n 的定义就得到(8)式的初始值

$$M_N = \frac{1}{\gamma} \hat{D} D,$$

其中 N 是用 Hermite 展开时的截断项.

现在由(7)式先写出 $\sqrt{2} \hat{D} C_2 = M_2 C_1$, 代入递推关系(5)的第二个系数方程:

$$\gamma C_1 + \sqrt{2} \hat{D} C_2 + \hat{D} C_0 = 0 \quad (9)$$

再令

$$C_0 = H C_1 \quad (10)$$

代入(9)式便得到新矩阵式:

$$H = -\hat{D}^{-1}(\gamma + M_2) \quad (11)$$

将递推关系(8)代入上式,最后新矩阵变为:

$$H = \gamma \hat{D}^{-1} \left\{ I + \frac{1}{\gamma^2} D \left[I + \frac{1}{2\gamma^2} D \left[I + \frac{1}{3\gamma^2} D [I + \dots]^{-1} \hat{D} \right]^{-1} \hat{D} \right] \right\} \quad (12)$$

为使 H 的表式整齐起见,我们重写矩阵元 \hat{D}^{qp} 为如下形式:

$$\hat{D}^{qp} = (F - iq)\delta_{q,p} + i(q-p)f^{q-p}$$

它与先前的定义差一个负号.

本文将裂变速率定义为裂变变形空间中的布朗粒子流过裂变位垒上任何处的几率流,考虑到分布函数 W 是归一化的,因而借助 Boson 算符和 Dirac 符号可将裂变速率写为:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} v W(\xi, v) dv \\ &= \left\langle 0 \left| (b^+ + b) \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi) \right| n \right\rangle \\ &= C_1(\xi) \end{aligned}$$

由(5)式的第一式知 $\frac{d}{d\xi} C_1(\xi) = 0$, 即 $C_1(\xi) = \text{常数}$. 于是有

$$\langle v \rangle = C_1^q \delta_{q,0} \quad (13)$$

由(10)式又可写为:

$$C_0^q = \sum_p H^{qp} C_1^p \quad (14)$$

代(13)式到(14)式中,便得到:

$$C_0^0 = H^{00} C_1^0 = H^{00} \langle v \rangle \quad (15)$$

借助分布函数 W 的归一化条件:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\xi, v) dv d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} \left\langle 0 \left| \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi) \right| n \right\rangle d\xi = \int_{-\pi}^{\pi} C_0(\xi) d\xi = 1$$

可取

$$C_0^0 = \frac{1}{2\pi},$$

代 C_0^0 的值到 (15) 式中, 我们最后得到裂变速率为:

$$\langle \nu \rangle = \frac{1}{2\pi H^{00}} \tag{16}$$

如前所述, C_1 是常数. 于是由 (13) 式知速率 $\langle \nu \rangle$ 为常数; 再从 (12) 式知, 复矩阵连分数 H 是由裂变过程的摩擦、温度和位垒参数唯一确定的, 则由 (10) 式可知裂变速率 $\langle \nu \rangle$ 是一个与 ξ 无关的仅与裂变过程有关的物理量唯一地确定的量. 从 (12) 式可看到, 当 γ 大时, 连分数可取少数项. 然而当 γ 小时, 更高次贡献就比较重要, 否则计算就达不到收敛, 我们的数值计算也证明了这一点. 由裂变动力学可知^[5], 裂变的粘滞系数从鞍点到断点大约为 $\mu_0 = 9 \times 10^{-24} \text{MeV} \cdot \text{sec./fm}^3$ 的数量级. 则由 $\tilde{\gamma} = 4\pi \frac{R_0^3}{C^2} \mu_0$ 得到 $\tilde{\gamma}$, 再由标度变换 $\gamma = [L/2\pi\sqrt{mKJ}] \tilde{\gamma}$ 算出的 γ 是非常小的, 在我们取的温度 $T = 0.4$ 至 1.1MeV 的范围内, 得到的 γ 值大部分小于 4, 因此采用复矩阵连分数方法是适当的.

三、计算结果和讨论

在本文中, 我们取鞍点变形为 $\epsilon_2 = 0.8$. 粘滞系数 μ 取与 Nix 等人的裂变动力学估计的结果相近的数量级^[5], 裂变的摩擦系数由公式 $\gamma = 4\pi R_0^3/C^2 \cdot \mu$ 给出. 惯性系数取 $m = \frac{1}{5} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R_0^3}{C} \right) \right] \cdot m_0 A_n$ 的形式. 式中的 C 为长半轴, R_0 是核的平均半径, m_0 是核子的质量, A_n 是裂变复合核的质量数.

在计算裂变速率时, 首先算出矩阵元 H^{00} , 我们已用 (12) 式作了数值计算, 并按照文献[6]将傅里叶展开系数截断在 $q = \pm 12$, 矩阵连分数截断在 $N = \frac{20}{\gamma}$, 对于这样的取值, 一般情况下 (12) 式的连续项目将达几十项至几百项, 有时对小 γ 情况可达上千项. 计算证明, 采取这样的截断, 已经保证计算结果收敛了.

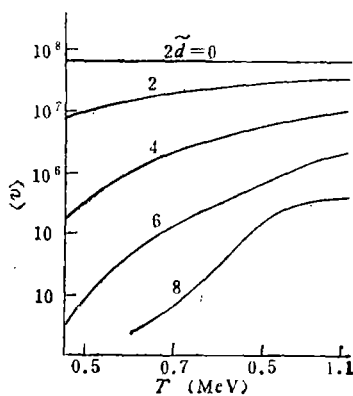


图 1 裂变速率与温度的关系.

图上各曲线在固定 $\mu = 2\mu_0$, $\tilde{F} = 0.1$, 分别对应于裂变位垒高度 $2\tilde{d} = 0, 2, 4, 6, 8 \text{MeV}$ 作出的.

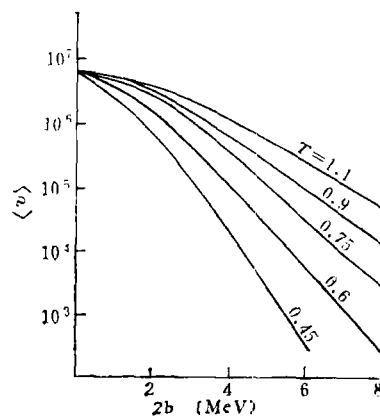


图 2 裂变速率与裂变位垒高度的关系

各曲线在固定 $\tilde{F} = 0.1$, $\mu = 2\mu_0$, 温度分别取 $T = 0.45, 0.6, 0.75, 0.9, 1.1 \text{MeV}$ 时作出.

在本文中,我们计算了裂变速率随位垒高度、粘滞系数、表征位垒内外高度差的 \tilde{F} 和裂变变形系统的温度 T 的变化。

图(1)取粘滞系数为 $2\mu_0$, 表征位垒内外部高度差的参数 $\tilde{F} = 0.1$ 时, 分别在位垒 $2\tilde{d} = 0, 2, 4, 6, 8\text{MeV}$ 作出了速率随核变形系统温度变化的曲线。由图可见, 所有的 $\langle v \rangle$ 都随温度升高而升高, 且位垒越低, $\langle v \rangle$ 越容易饱和, 位垒越低, 速率 $\langle v \rangle$ 也越大。从图可见, 当裂变位垒趋于零, 裂变速率则趋于一个常值, 且达最高值。这是十分自然的, 位垒趋于零, 所有的布朗粒子将不受阻挡地通过零位垒而发生裂变, 显然这也是合理的。

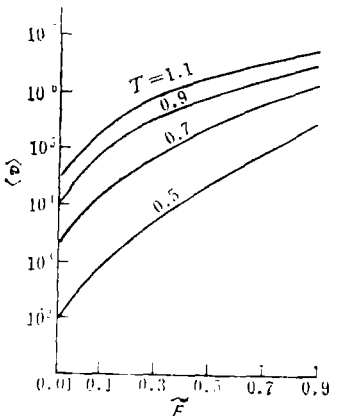


图3 裂变速率与裂变位垒内外高度差的关系
固定 $\mu = 3\mu_0$, $2\tilde{d} = 6\text{MeV}$, 温度分别为 $T = 0.5, 0.7, 0.9, 1.1\text{MeV}$ 时作出的曲线。

图(2)在固定温度、位垒内外高度差和粘滞系数后, 作出了速率随位垒高度的变化。各图均表明速率随位垒增高而下降, 且温度越低, 下降更快。显然裂变位垒越高, 穿过位垒的布朗粒子相应减少, 因而裂变速率随之而减小。

图(3)在固定温度、位垒高度和粘滞系数后, 作了速率随 \tilde{F} 的变化曲线。该图清楚地反映了位垒外部比内部低得越多, 速率也就更大, 且易于饱和。这是因为 \tilde{F} 越大, 变形空间中的布朗粒子所穿越的位垒变得更低更窄, 因而这时布朗粒子更易于越过, 增加裂变速率。

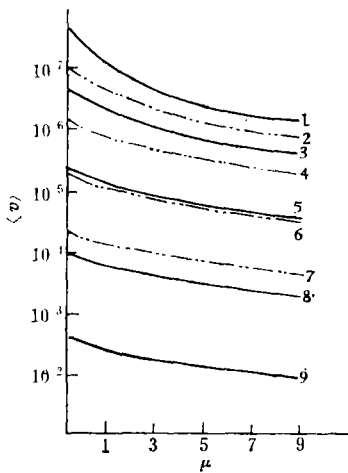


图4 裂变速度与粘滞系数的关系

图中各曲线是在固定 $\tilde{F} = 0.1$, 和几个位垒高度作出的; 图中实线对应于温度 $T = 0.6\text{MeV}$, 虚线对应着温度 $T = 0.9\text{MeV}$.
1 $\tilde{d} = 0, T = 0.9, T = 0.6$ 2 $\tilde{d} = 1, T = 0.9$
3 $\tilde{d} = 1, T = 0.6$ 4 $\tilde{d} = 2, T = 0.9$ 5 $\tilde{d} = 2, T = 0.6$ 6 $\tilde{d} = 3, T = 0.9$ 7 $\tilde{d} = 4, T = 0.9$
8 $\tilde{d} = 3, T = 0.6$ 9 $\tilde{d} = 4, T = 0.6$

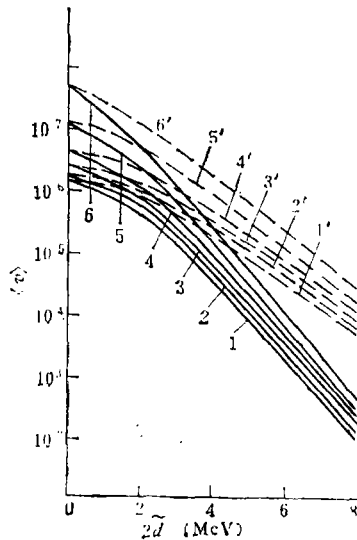


图5 裂变速率与裂变位垒的关系

图中各曲线是在固定 $\tilde{F} = 0.1$ 和几个粘滞系数作出的; 实线对应于温度 $T = 0.6\text{MeV}$, 虚线对应于温度 $T = 0.9\text{MeV}$.
1 $\mu = 9\mu_0$ 1' $\mu = 0.9\mu_0$ 2 $7\mu_0, T = 0.6$ 2' $7\mu_0, T = 0.9$ 3 $5\mu_0, F = 0.1$ 3' $5\mu_0, F = 0.1$ 4 $3\mu_0$ 4' $3\mu_0$ 5 $1\mu_0$ 5' $1\mu_0$ 6 $0.26\mu_0$ 6' $0.26\mu_0$
 $\mu_0 = 9 \times 10^{-24} \text{MeV} \cdot \text{s} / \text{fm}^3$

图(4)表示在别的条件固定时,作出的速率 $\langle v \rangle$ 随粘滞系数的变化,曲线表示裂变速率是随着粘滞系数的增加而下降的.并由图可见,随温度升高,裂变速率迅速抬高,随位垒增高,而迅速下降.图(5)更清楚地表明了这一点.

从本文给出的各个图表明裂变速率随温度、粘滞系数、位垒高度和内外垒差的变化是合乎物理要求的,它反映了裂变过程的主要特征;本工作又表明复矩阵连分数方法是计算裂变输运问题的有用工具,它并非仅局限于稳态情况. 对非稳态情况只要再对时间作傅里叶变换,用同样的处理仍可以得到裂变速率. 下一步我们将用这一方法处理非稳态情况. 此外复矩阵连分数方法计算较为简便,又可研究摩擦系数由零到无穷大的情况,因而为我们用输运的观点更全面地研究裂变问题提供了一种途径;在本工作中,我们使用的裂变位垒 $\hat{V}(\xi) = -\tilde{\alpha}\cos\xi - \tilde{F}\xi$, 显然抓住了裂变位垒的主要特性,然而 $\hat{V}(\xi)$ 毕竟是一个数学模型势,为了更进一步研究裂变,必须取更适合于裂变情况的位垒形式. 这时系数 C_n 必须用更适合所考虑情况的完备函数集来展开,最后才有可能得到好的结果.

最后对我所理论室的曾给予本工作帮助的同志深表谢意.

参 考 文 献

- [1] 胡济民、钟云霄,高能物理与核物理, **4**(1980),369.
- [2] 吴锡真、卓益忠,高能物理与核物理, **4**(1980),113.
- [3] P. Grang and H. A. Weidenmüller, *Phys. Lett.*, **96B**(1980), 26.
- [4] H. D. Vollmer, and H. Risken, *Z. Physik*, **31B**(1979), 313.
- [5] K. T. R. Davies, A. J. Sierk and J. R. Nix, *Phys. Rev.*, **C13**(1976), 2385.
- [6] H. Risken and H. D. Vollmer, *Z. Physik*, **33B**(1979), 297.
- [7] S. Chandrasekhar. *Rev. Mod. Phys.*, **15**(1943), 1.
- [8] H. Risken. H. D. Vollmer and H. Denk, *Phys. Lett.*, **78A**(1980), 22

DIFFUSION MODEL OF HEAVY NUCLEUS FISSION

HE ZE-JUN LI PAN-LIN ZHANG JIA-JU

(Institute of Nuclear Research, Academia Sinica)

ABSTRACT

Deformation motion of the fission process is considered as a diffusion motion. The fission rate in the steady approximation is calculated from the Fokker-Planck equation by means of a complex matrix continued fraction method. Numerical calculation is performed for fission of ^{238}U and on the whole the results are reasonable.