第 8 卷 第 1 期
1984 年 1 月

高能物理与核物理
PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS

Vol. 8, No. 1
Jan., 1984

阿贝尔手征群陪集纯规范场的禁闭性质

阮图南 井思聪 刘祖伟
（中国科学技术大学）

摘 要

对于阿贝尔手征群 $G = U_1 \times U_1^5$，本文利用格点规范理论的 Wilson 禁闭判据，通过计算点阵上的流-流传播子，讨论了陪集空间纯规范场对体系禁闭性质的影响，当子群 H 为 U_1 时，陪集纯规范场在流-流传播子中只提供一个不影响体系禁闭性质的线度律因子．当子群 H 为 U_1^5 时，陪集纯规范场对于体系的禁闭性质没有影响．

一、引 言

为了解决手征群的非线性表示的拉氏量的重正化问题，文献[1]引入了陪集空间纯规范场的概念．在可重正化规范下，强子是 $SU_L(2) \times SU_R(2)$ 或 $SU_L(3) \times SU_R(3)$ 手征群的线性表示．当真空只具有子群H的对称性而在陪集空间 G/H 上自发破缺时，π、K 介子成为 Goldstone 粒子，并构成手征群的非线性表示．这些 Goldstone 粒子应该由陪集元素 $\phi_0(x)$ 来描写． 利用陪集空间纯规范场的理论可以证明这时的拉氏量是可重正化的．因此在物理规范下我们可以把陪集纯规范场明显保留下来．作为基本场，而把其他多余的自由度消去．本文进一步利用格点规范理论中的 Wilson 禁闭判据[2]，讨论明显保留的陪集纯规范场对体系禁闭性质的影响．

研究点阵上层子体系在内部对称群G下的禁闭性质，既可以用路径积分的方法计算关联函数的规范场平均值[3]，也可以用哈密顿形式计算层子与反层子之间的低能量态的能量[4]，还可以用变分法计算连接静态层子-反层子对的弦的能量[5]，通常当群G不是手征群时，关联函数都是取 Wilson 迴路积分．本文通过点阵上流-流传播子的计算，给出了当G是手征群 $U_1 \times U_1^5$ 时关联函数的形式，并且在子群 $H = U_1$ 时计算了陪集纯规范场的积分，得到陪集纯规范场只提供一个不影响禁闭的线度律因子的结论．

本文的内容安排如下，第二节在子群 $H = U_1$ 时由点阵上的流-流传播子的计算得到规范不变的关联函数，第三节讨论此时陪集纯规范场对于体系禁闭性质的影响，第四节讨论子群，$H = U_1^5$ 的情形．

本文 1982 年 10 月 4 日收到．

二、子群为 U_1 时的流-流传播子

考虑群 $G = U_1 \times U_1^5$，取子群 $H = U_1$，则陪集 $G/H = U_1^5$. 在群G之下定域规范不变的拉氏函数是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + \hat{B}_\mu)\psi - G\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+\right)\psi$$
$$-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\partial_\mu\Phi^+ + \hat{B}_{\mu L}\Phi^+ - \Phi^+\hat{B}_{\mu R})(\partial_\mu\Phi + \hat{B}_{\mu R}\Phi - \Phi\hat{B}_{\mu L})$$
$$-V\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Phi^+\Phi\right). \tag{2.1}$$

其中 $F_{\mu\nu}$ 是子群H上的规范场强，

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.2}$$

Φ是复标量 Higgs 场，$\hat{B}_\mu$ 是由陪集空间纯规范场 ϕ_0 构成的群G上的规范势，

$$\hat{B}_\mu = \phi_0(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)\phi_0^{-1}. \tag{2.3}$$

按照文献[6]所给出的方法，可以将体系在四维欧氏空间点阵上的作用量写为

$$A = \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu} - \Delta_\nu B_{n\mu}) - K\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_n\gamma_\mu e^{-iB_{n\mu}}e^{-i\Delta_\mu\theta_n\cdot\gamma_5}\psi_{n+\hat{\mu}}$$
$$+K\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu e^{iB_{n\mu}}e^{i\Delta_\mu\theta_n\cdot\gamma_5}\psi_n - Ga^4\sum_n\bar{\psi}_n\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi_n + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi_n^+\right)\psi_n$$
$$+a^2\sum_{n,\mu}(e^{-2i\Delta_\mu\theta_n}\Phi_{n+\hat{\mu}}\Phi_n + \mathrm{h.c.}) - 5a^2\sum_n\Phi_n^+\Phi_n$$
$$-a^4\sum_n V(2\Phi_n^+\Phi_n), \tag{2.4}$$

其中 $K = \frac{a^3}{2}$, θ_n 是陪集纯规范场. 注意 $B_{n\mu} = agA_{n\mu}$ 不是群G上的规范势，而是子群H上的矢量规范场 A_μ 的点阵对应.

按照格点规范理论，可以通过计算点阵上的流-流传播子来讨论层子的禁闭问题[2]. 在我们的情形下，点阵上的流-流传播子可以写为

$$D_{l0} = \frac{\int\prod_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod_n d\theta_n\prod_n d\Phi_n\prod_n d\psi_n d\bar{\psi}_n\bar{\psi}_l\Gamma\psi_l\bar{\psi}_0\Gamma_0\psi_0 e^A}{\int\prod_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod_n d\theta_n\prod_n d\Phi_n\prod_n d\psi_n d\bar{\psi}_n e^A}, \tag{2.5}$$

其中A是作用量(2.4). 在格点规范理论中，只有定域规范不变的物理量的组态平均值才有意义，因此Γ和Γ_0可以是γ_μ或$\gamma_\mu\gamma_5$等.

为了便于进行真空自发破缺，引入新的实数场 ρ_n 和 χ_n，把复 Higgs 场参数化为

$$\Phi_n = \rho_n e^{i\chi_n}. \tag{2.6}$$

我们的目的是研究明显保留的陪集纯规范场对体系禁闭性质的影响，所以只要研究在物理基态附近体系的禁闭性质. 因此将 Higgs 场的径向部分冻结在位能V的极小值 ρ_0 处，即令 $\rho_n = \rho_0$. 这样，在舍去一些常数项后，作用量可以写为

$$A=\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})-K\sum_{n,\mu}\bar{\Phi}_n\gamma_\mu e^{-iB_{n\mu}}e^{-i\Delta_\mu\theta_n\cdot\gamma_5}\phi_{n+\hat{\mu}}$$
$$+K\sum_{n,\mu}\bar{\Phi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu e^{iB_{n\mu}}e^{i\Delta_\mu\theta_n\cdot\gamma_5}\phi_n-c\sum_n\bar{\Phi}_n e^{i\chi_n\gamma_5}\phi_n$$
$$+a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}(e^{2i\Delta_\mu\theta_n+i\Delta_\mu\chi_n}+\text{h.c.}),\tag{2.7}$$

其中 $c=G\rho_0a^4$. 这时流-流传播子变为

$$D_{l0}=\frac{\int\prod_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod_n d\theta_n\prod_n d\chi_n\prod_n d\phi_n d\bar{\Phi}_n\bar{\Phi}_l\Gamma\phi_l\bar{\Phi}_0\Gamma_0\phi_0e^A}{\int\prod_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod_n d\theta_n\prod_n d\chi_n\prod_n d\phi_n d\bar{\Phi}_n e^A}\tag{2.8}$$

其中 A 由 (2.7) 式给出.

将 (2.8) 式的分子和分母中的 e^A 按 K 的幂次展开，注意到 ϕ_n 和 $\bar{\Phi}_n$ 是 Grassmann 变数，并且整个空间的格点数是有限的，所以 e^A 的展开式是一个多项式. 显然在分子的展开式中只有相应于经过 l 和 0 这两个格点的封闭迴路的项才对积分有贡献. 设 c 是包含最少键数 L 的这样一条封闭迴路，于是在 K 的最低次近似下可以得到

$$D_{l0}\approx\frac{(-)^{\frac{L}{2}+1}K^L}{c^{L+2}}\,\text{Tr}(\cdots\Gamma\cdots\Gamma_0)\frac{\int\prod_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod_n d\theta_n\prod_n d\chi_n e^{i\sum_c B_{n\mu}}e^{i\sum_c'\Delta_\mu(\theta_n+\frac{\chi_n}{2})}e^{A_0}}{\int\prod_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod_n d\theta_n\prod_n d\chi_n e^{A_0}},\tag{2.9}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})+a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}(e^{i\Delta_\mu(2\theta_n+\chi_n)}+\text{h.c.}),\tag{2.10}$$

而 $\text{Tr}(\cdots\Gamma\cdots\Gamma_0)$ 是对费米子场积分后剩下的 γ 矩阵的迹，$e^{i\sum_c B_{n\mu}}$ 表示将 $B_{n\mu}$ 沿迴路 c 排列一周所构成的 Wilson 迴路积分，通常记为 $W(c)$. $\sum_c'\Delta_\mu\left(\theta_n+\frac{\chi_n}{2}\right)$ 表示沿迴路 c 将 $\Delta_\mu\left(\theta_n+\frac{\chi_n}{2}\right)$ 正负相间地排列一周之和. 显然乘积

$$e^{i\sum_c B_{n\mu}}e^{i\sum_c'\Delta_\mu(\theta_n+\frac{\chi_n}{2})}$$

在群 G 下是定域规范不变的. 注意到 A_0 中的 $B_{n\mu}$ 与 θ_n 和 χ_n 没有耦合，因此在 (2.9) 式中对 $B_{n\mu}$ 的积分与对 θ_n 和 χ_n 的积分可以分别进行. 不计常数因子，可以得到

$$D_{l0}\sim I\langle W(c)\rangle,\tag{2.11}$$

其中

$$I=\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\prod_n d\theta_n\prod_n d\chi_n e^{i\sum_c'\Delta_\mu(\theta_n+\frac{\chi_n}{2})}\exp\left\{a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}[e^{2i\Delta_\mu(\theta_n+\frac{\chi_n}{2})}+\text{h.c.}]\right\}}{\int_{-\pi}^{\pi}\prod_n d\theta_n\prod_n d\chi_n\exp\left\{a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}[e^{2i\Delta_\mu(\theta_n+\frac{\chi_n}{2})}+\text{h.c.}]\right\}},\tag{2.12}$$

$$\langle W(c)\rangle = \frac{\int \prod_{n,\mu} dB_{n\mu} e^{i\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c} B n\mu} \exp\left\{\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})\right\}}{\int \prod_{n,\mu} dB_{n\mu}\exp\left\{\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})\right\}}. \tag{2.13}$$

因此只要求出积分 I，就可以看出陪集纯规范场对体系禁闭性质的影响.

三、积分 I 的计算

为了计算积分 I，作变量代换 $\theta_n + \frac{\chi_n}{2} = \alpha_n$，则积分 I 可以写为

$$\begin{aligned} I &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right) e^{i\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c}' \Delta_\mu \alpha_n} \exp\left\{a^2\rho_0^2 \sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\exp\left\{a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}} \\ &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right) e^{i\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c}' \Delta_\mu \alpha_n} \sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^K}{K!}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^K}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^K}{K!}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^K}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

上式中展开式的每一项都是若干个 $e^{\pm 2i\Delta_\mu\alpha_n}$ 指数型因子的乘积，利用积分公式

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{in\alpha} = 2\pi\delta_{n,0} \tag{3.2}$$

可见只有 (3.1) 式的被积函数是 1 的时候积分 I 才有非零值. 迴路 c 所包含的键数记为 L，不妨假设 $\frac{L}{2}$ 是偶数，这样 (3.1) 式分子展开式的零级项、一级项等皆无贡献，有贡献的最低级项是 $\frac{L}{2}$ 级项，所以

$$I = (a^2\rho_0^2)^{\frac{L}{2}} \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right) e^{i\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c}' \Delta_\mu \alpha_n} \sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^{2K}}{\left(\frac{L}{2}+2K\right)!}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}+2K}}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^{2K}}{(2K)!}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{2K}} \tag{3.3}$$

先计算 (3.5) 式的分子. $K=0$ 时，被积函数为

$$\frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)!} e^{i\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c}' \Delta_\mu \alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}}.$$

我们可以将 $\Delta_\mu\alpha_n$ 看作是由格点 n 指向格点 $n+\hat{\mu}$ 的矢量，而将 $-\Delta_\mu\alpha_n$ 看作是由格点 $n+\hat{\mu}$ 指向格点 n 的矢量. 这里表示方向的指标 μ 只取 0、1、2、3，不取负值. 因此 $\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c}' \Delta_\mu\alpha_n$ 相当于沿迴路 c 将 $\Delta_\mu\alpha_n$ 正负相间地排列起来之和，如图 2 a 所示. 当且仅当所有的 $\Delta_\mu\alpha_n$ 全按同一方向沿迴路排列时，才能使 $\sum\!\!\!\!\bigcirc_{c} \Delta_\mu\alpha_n = 0$，此时积分才有贡献，如

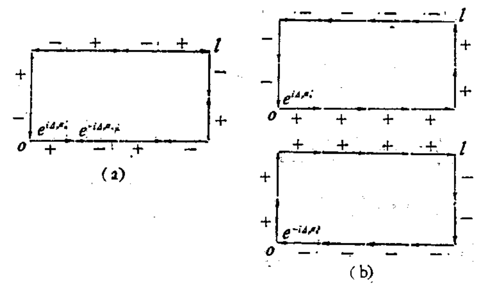

图 1

(a) $\sum\limits_{c}{}' \Delta_\mu \alpha_n$.　　(b) $\sum\limits_{c} \Delta_\mu \alpha_n = 0$.

图 2 b 所示．从 $\sum\limits_{c}{}'$ 转换到 $\sum\limits_{c}$ 需要改变方向的键数共是 $\frac{L}{2}$，这种方向的改变是通过在 $e^{i\sum\limits_{c}{}'\Delta_\mu\alpha_n}$ 上乘以 $\frac{L}{2}$ 个特定的指数因子来实现的，而这 $\frac{L}{2}$ 个特定的指数因子又靠

$$\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}}$$

来提供．因此有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)!}\, e^{i\sum\limits_{c}{}'\Delta_\mu\alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}} = 2. \tag{3.4}$$

$K=1$ 时，被积函数为

$$\frac{(a^2\rho_0^2)^2}{\left(\frac{L}{2}+2\right)!}\, e^{i\sum\limits_{c}\Delta_\mu\alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}+2},$$

自然下面两类图形（见图 2）所代表的项对积分都有贡献，于是可以求得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n \frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\frac{(a^2\rho_0^2)^2}{\left(\frac{L}{2}+2\right)!}\, e^{i\sum\limits_{c}{}'\Delta_\mu\alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}+2}$$

$$= 2\left(N+\frac{11\,L}{4}\right)(a^2\rho_0^2)^2, \tag{3.5}$$

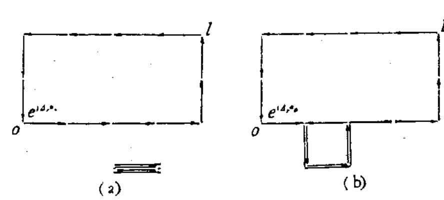

图 2

其中 N 是整个四维点阵的键数．由此可见，当 $K=1$ 时，积分的结果由两部分组成，一部分比例于整个空间的键数 N，另一部分比例于迴路的键数 L．由于 $N \gg L$，(3.5) 式的右

端可以写为

$$2N(a^2\rho_0^2)^2\left(1+O'\left(\frac{L}{N}\right)\right),$$

其中 $O'\left(\frac{L}{N}\right)$ 表示量级为 $\frac{L}{N}$ 的一个小量.

同样可以计算 $K=2,3,\cdots$时积分的值，这些积分也各由 N^K，$N^{K-1}L,\cdots,N^{K-l}L^l,\cdots,L^K$ 这些部分组成，因此可以将这些积分值写为

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\frac{(a^2\rho_0^2)^{2K}}{\left(\frac{L}{2}+2K\right)!}e^{i\sum\limits_c{}'\Delta_\mu\alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}+2K}\\&\quad=c_KN^K(a^2\rho_0^2)^{2K}\left(1+O''\left(\frac{L}{N}\right)\right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

其中 c_K 是与 N 和 L 皆无关的常数系数，$O''\left(\frac{L}{N}\right)$ 表示其余的小量，其领头项是 $\frac{L}{N}$ 阶.

因此，我们可以把 (3.3) 式的分子重新组合成为

$$\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)e^{i\sum\limits_c{}'\Delta_\mu\alpha_n}\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^{2K}}{\left(\frac{L}{2}+2K\right)!}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}+2K}\\&=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)!}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_c\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)e^{i\sum\limits_c{}'\Delta_\mu\alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}}\\&\quad\times\frac{1}{(2K)!}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)'(a^2\rho_0^2)^{2K}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{2K}\\&\quad\times\left(1+O\left(\frac{L}{N}\right)\right),\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 $\left(\prod\limits_c\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)$ 表示只对迴路 c 所含格点上的场量进行积分，$\left(\prod\limits_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)'$ 表示对空间其它格点上的场量进行积分. 注意到在这些积分式中只有被积函数为 1 的时候积分才有非零值，所以又可将 (3.7) 式改写为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\left(\frac{L}{2}\right)!}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)e^{i\sum\limits_c{}'\Delta_\mu\alpha_n}\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{\frac{L}{2}}\\&\quad\times\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^{2K}}{(2K)!}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{2K}\left(1+O\left(\frac{L}{N}\right)\right)\\&\quad=2\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(a^2\rho_0^2)^{2K}}{(2K)!}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\prod_n\frac{d\alpha_n}{2\pi}\right)\left\{\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\Delta_\mu\alpha_n}+e^{-2i\Delta_\mu\alpha_n}\right)\right\}^{2K}\cdot\left(1+O\left(\frac{L}{N}\right)\right)\end{aligned}\tag{3.8}$$

把 (3.8) 式代入 (3.3) 式可得

$$I=2(a^2\rho_0^2)^{\frac{L}{2}}\left(1+O\left(\frac{L}{N}\right)\right)\approx 2(a^2\rho_0^2)^{\frac{L}{2}}.\tag{3.9}$$

再把这个结果代入 (2.11) 式，即得到

$$D_{l_0} \sim 2(a^2\rho_0^2)^{\frac{L}{2}}\langle W(c)\rangle = 2e^{\frac{L}{2}\ln a^2\rho_0^2}\langle W(c)\rangle, \tag{3.10}$$

因为对于固定的 ρ_0，我们总可以选取适当的点阵间距 a 使 $a^2\rho_0^2 < 1$，从而 $\ln a^2\rho_0^2 < 0$，所以可称因子 $e^{\frac{L}{2}\ln a^2\rho_0^2}$ 为线度律因子.

在我们所讨论的 $U_1 \times U_1^5$ 模型里，无论取物理规范还是取可重正化规范，由积分 I 的计算都可得到上述线度律因子. 这个结果也可以这样来理解：由于陪集纯规范场是个纯规范场，它所对应的场强为零，因此没有相应于点阵上基本方格的物理量. 所以在流-流传播子中无法提供与迴路线度有关的因子，顶多只能提供与迴路线度有关的因子，因而陪集纯规范场不会改变体系的禁闭性质. 由于 $H = U_1$ 群在四维欧氏空间中有相变[7]，所以 $G = U_1 \times U_1^5$ 群在四维欧氏空间中也有相变.

四、子群 $H=U_1^5$ 的情形

对于群 $G = U_1 \times U_1^5$，若取子群 $H = U_1^5$，即子群取阿贝尔手征规范群，生成元是 γ_5，则陪集 $G/H = U_1$，此时在群 G 下定域规范不变的拉氏函数是

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - i\partial_\mu\theta - ig\gamma_5 A_\mu)\psi - V(2\Phi^+\Phi)\\ &-(\partial_\mu\Phi^+ - 2igA_\mu\Phi^+)(\partial_\mu\Phi + 2igA_\mu\Phi) - G\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+\right)\psi,\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 A_μ 是子群 $H = U_1^5$ 上的矢量规范场，θ 是陪集纯规范场，Φ 是复标量 Higgs 场，ψ 是费米子场. 显然 $\mathscr{L}$ 在如下的定域规范变换下不变.

$$\psi' = e^{i\alpha}e^{i\beta\gamma_5}\psi;\ \Phi' = e^{-2i\beta}\Phi;\ A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu\beta;\ \theta' = \theta + \alpha. \tag{4.2}$$

其中 $e^{i\alpha}e^{i\beta\gamma_5}$ 是群 G 的元素，$e^{i\beta\gamma_5}$ 是子群 H 的元素，$e^{i\alpha}$ 是陪集 G/H 的元素.

同样可以写出点阵上的作用量为

$$\begin{aligned}A = &\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu} - \Delta_\nu B_{n\mu}) - K\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_n\gamma_\mu e^{-i\Delta_\mu\theta_n}e^{-iB_{n\mu}\gamma_5}\psi_{n+\hat{\mu}}\\ &+ K\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu e^{i\Delta_\mu\theta_n}e^{iB_{n\mu}\gamma_5}\psi_n - Ga^4\sum_n\bar{\psi}_n\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+\right)\psi_n\\ &+ a^2\sum_{n,\mu}(e^{-2iB_{n\mu}}\Phi^+_{n+\hat{\mu}}\Phi_n + \text{h.c.}) - 5a^2\sum_n\Phi^+_n\Phi_n - a^4\sum_n V(2\Phi^+_n\Phi_n),\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中 $B_{n\mu} = agA_{n\mu}$，$K = \frac{a^3}{2}$. 这个作用量在点阵上的定域规范变换下是不变的.

引入新的实数场 ρ_n 和 χ_n，把复 Higgs 场参数化，

$$\Phi_n = \rho_n e^{i\chi_n}. \tag{4.4}$$

在文献[6]中我们已经证明当群 G 不是手征群时，在点阵上的流-流传播子中对费米子场积分后陪集纯规范场会自动消去，因而对于体系的禁闭性质没有影响. 现在群 G 是手征群，但陪集里不含有手征对称性，为了研究此时陪集纯规范场对于体系的禁闭有无影响，我们仍然从点阵上的流-流传播子出发，

$$D_{l0}=\frac{\int\prod\limits_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod\limits_{n}d\theta_n\prod\limits_{n}d\rho_n d\chi_n\prod\limits_{n}d\phi_n d\bar{\Phi}_n\bar{\Phi}_l\Gamma\phi_l\bar{\Phi}_0\Gamma_0\phi_0 e^{A}}{\int\prod\limits_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod\limits_{n}d\theta_n\prod\limits_{n}d\rho_n d\chi_n\prod\limits_{n}d\phi_n d\bar{\Phi}_n e^{A}},\tag{4.5}$$

其中 A 是作用量(4.3). 我们将 Higgs 场的径向部分冻结，即令 $\rho_n=\rho_0$. 这时作用量(4.3)可以写为

$$\begin{aligned}A=&\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})-K\sum_{n,\mu}\bar{\Phi}_n\gamma_\mu e^{-i\Delta_\mu\theta_n}e^{-iB_{n\mu}\gamma_5}\phi_{n+\hat{\mu}}\\&+K\sum_{n,\mu}\bar{\Phi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu e^{i\Delta_\mu\theta_n}e^{iB_{n\mu}\gamma_5}\phi_n-c\sum_{n}\bar{\Phi}_n e^{i\chi_n\gamma_5}\phi_n\\&+a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}(e^{2iB_{n\mu}+i\Delta_\mu\chi_n}+\text{h.c.}),\end{aligned}\tag{4.6}$$

其中 $c=G\rho_0a^4$.

同样按照第二节的步骤计算(4.5)式，在完成对费米子场的积分后，可以发现 D_{l0} 中的陪集纯规范场也自动消去，因而得到

$$D_{l0}\sim\frac{\int\prod\limits_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod\limits_{n}d\chi_n e^{i\sum\limits_{c}'\left(B_{n\mu}+\frac{\Delta_\mu\chi_n}{2}\right)}e^{A_0}}{\int\prod\limits_{n,\mu}dB_{n\mu}\prod\limits_{n}d\chi_n e^{A_0}},\tag{4.7}$$

其中

$$A_0=\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})+a^2\rho_0^2\sum_{n,\mu}\left(e^{2i\left(B_{n\mu}+\frac{\Delta_\mu\chi_n}{2}\right)}+\text{h.c.}\right).\tag{4.8}$$

而 $\sum\limits_{c}'\left(B_{n\mu}+\frac{\Delta_\mu\chi_n}{2}\right)$ 表示将 $B_{n\mu}+\frac{\Delta_\mu\chi_n}{2}$ 按正负相间的方式沿迴路 c 排列一周之和.

其实，由 $H=U_1^5$ 之下定域规范不变的拉氏函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)^2-\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu-ig\gamma_5A_\mu)\psi-G\bar{\psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi+\frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+\right)\psi\\&-(\partial_\mu-2igA_\mu)\Phi^+(\partial_\mu+2igA_\mu)\Phi-V(\Phi^+\Phi)\end{aligned}\tag{4.9}$$

出发，计算点阵上的流-流传播子，也恰好得到(4.7)式. 这表明当陪集空间不含有手征对称性时，陪集纯规范场对于体系的禁闭性质没有影响，$U_1\times U_1^5$ 群的禁闭性质此时完全由其子群 U_1^5 所决定.

类似于前一节里积分 I 的计算，我们可以完成(4.7)式中的关于 χ_n 的积分，从而得到

$$D_{l0}\sim(a^2\rho_0^2)^{\frac{L}{2}}\frac{\int\prod\limits_{n,\mu}dB_{n\mu}e^{i\sum\limits_{c}B_{n\mu}}e^{\frac{1}{2g^2}\sum\limits_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})}}{\int\prod\limits_{n,\mu}dB_{n\mu}e^{\frac{1}{2g^2}\sum\limits_{n,\mu,\nu}\cos(\Delta_\mu B_{n\nu}-\Delta_\nu B_{n\mu})}},\tag{4.10}$$

这正是子群 $H=U_1^5$ 上 Wilson 迴路积分的规范场平均值 $\langle W_5(c)\rangle$，上式也说明了

$$\langle W_5(c)\rangle=\langle W(c)\rangle,\tag{4.11}$$

即U_1^5群的 Wilson 迴路积分的平均值与U_1群的 Wilson 迴路积分的平均值相等. 因此U_1^5群在四维欧氏空间中同样有相变，即在强耦合极限下，体系处于禁闭相；在弱耦合极限下，体系处于非禁闭相.

总结起来，本文的研究表明了当群G为$U_1 \times U_1^5$时，陪集空间纯规范场对于体系的禁闭性质没有影响，通过计算点阵上的流-流传播子，发现体系在群G下的禁闭性质完全由子群H所决定. 当然这是在子群H上的矢量规范场不存在奇异性时得到的结论. 当存在奇异性时陪集空间纯规范场对于体系禁闭性质的影响，我们将在其它论文中进行讨论.

参　考　文　献

[1] 周光召、杜东生、阮图南，*Scientia Sinica*, **22** (1979), 37.
[2] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10** (1974), 2445.
[3] T. Banks, R. Myerson, J. Kogut, *Nucl Phys.*, **B129** (1977), 493.
[4] J. Kogut, L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11** (1975), 395.
[5] S. D. Drall, et al., *Phys. Rev.*, **D19** (1979), 619.
[6] 阮图南、井思聪、刘祖伟，高能物理与核物理，**7**(1983)，550.
[7] J. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, 51 (1979), 659.

CONFINEMENT PROPERTIES OF THE PURE GAUGE FIELDS ON COSET SPACE OF AN ABELIAN CHIRAL GROUP

RUAN TU-NAN　JING SI-CONG　LIU ZU-WEI

(*University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

In this paper the lattice current-current propagator is calculated and the influence of coset pure gauge fields of an Abelian chiral group $G = U_1 \times U_1^5$ on confinement properties of a quark system is discussed by virtue of the Wilson's criterion of lattice gauge theory. When subgroup H is U_1, the coset pure gauge fields only contribute a perimeter law factor to the current-current propagator which has no influence on confinement properties of the system. When subgroup H is U_1^5, the coset pure gauge fields also have no influence on confinement properties of the system.