

永磁波动磁铁的二维场形分析及其优化

刘茂三 石才土 陈仁怀

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

分析了渐变磁化永磁波动磁铁 (Undulator) 的场形。得到了二维解析表达式。给出了减少高次谐波的条件。具体计算并比较了渐变型、简易型及混合型三种不同类型波动磁铁的优缺点。指出了它们各自最合理的适用范围。

前 言

近年来由于同步辐射及自由电子激光的迅速发展,提出了一种新型磁铁结构,称为波动磁铁(简称波动器)^[1]。它是由沿束流方向(下称纵向)周期排列的一些均匀磁化体构成的直线扭摆阵列。磁铁对束流不产生净偏转,只产生局部扭摆或波动,故得名。其横向磁场分量沿纵向分布为周期函数,要求高次谐波振幅愈小愈好。对于这种磁铁,当然可采用普通电磁铁来建造,但当周期长度较短时(如为得到更短波长的同步辐射),则选用永磁将显出极大优越性。因为随着磁铁尺寸的减小,欲维持场强不变,电磁铁的电流密度将呈反比地增加。从而导致严重的冷却等一系列问题。对于永久磁铁,由于有缩尺关系,系统所有尺寸按比例缩小,其场强不变。且它起作用的是分子电流,不存在欧姆损耗问题。因此对小型磁铁,利用永久磁铁不仅可以实现电磁,甚至有时连超导磁铁都难以做到的事。(例如在有限空间内无法安装冷却系统时)。

特别近十年来,由于稀土——钴高性能永磁材料的不断发展,以及新型磁路结构——即无头多体渐变磁化磁路的提出,给永磁波动器的实现提供了切实可行的物质条件。近几年它已被研制成功^[2]。

波动器有直线型及螺旋型两种不同形式,本文着重分析计算前者。它是由均匀磁化的一些方形永磁体按特定磁化规律沿纵向周期排列而成,见图1。由于其周期数一般都很大(几十个)以及水平(x)方向尺寸一般也远大于工作气隙(为保证足够的好场区),故可按无穷长无限阵列的二维问题进行计算。

关于二维永磁直线阵列场形的解析分析结果,我们已作过简要报道^[3]。本文将其具体应用于渐变型、简易型及混合型等不同类型波动器中,并对它们的优缺点进行了比较,得出了相应的结论。

一、渐变型永磁波动器工作场形及其优化

渐变磁化永磁波动器磁体的排布形式如图1所示(相当于文献[3]中 $g = -1^D$ 情

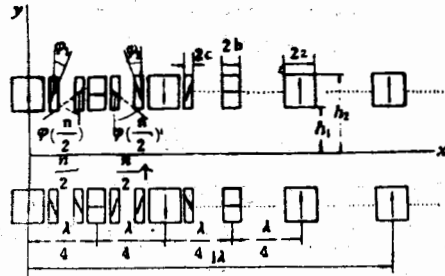


图1 渐变型永磁波动磁铁排布

况)。每个周期内含有纵、横向磁化体各2对及斜向磁化体 $2n$ 对 (n 为偶数)。如果所有磁体均选用同一材料,且磁化强度 $|M|$ 均相同,则根据文献[3]、气隙内部空间任一点 P 的横向磁场可写成:

$$\begin{aligned}
 H_y(P) = & -M \int_{h_1}^{h_2} \left\{ \int_{-a}^a \frac{\partial}{\partial y'} (\xi_0 - \xi_2) dx' - \int_{-b}^b \frac{\partial}{\partial x'} (\xi_1 - \xi_3) dx' \right. \\
 & + \sum_{p=1}^{n/2} \left[\cos \varphi_p \int_{-c}^c \frac{\partial}{\partial y'} (\eta_0^+ + \eta_0^- - \eta_1^+ - \eta_1^-) dx' - \sin \varphi_p \right. \\
 & \left. \left. \times \int_{-c}^c \frac{\partial}{\partial x'} (\eta_0^- - \eta_0^+ - \eta_1^- + \eta_1^+) dx' \right] \right\} dy' \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \xi_q = & -2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\frac{y-y'}{\left(x'-x-\frac{\lambda}{4}q+l\lambda\right)^2+(y-y')^2} \right. \\
 & \left. - \frac{y+y'}{\left(x'-x-\frac{\lambda}{4}q+l\lambda\right)^2+(y+y')^2} \right], \\
 \eta_s^{\pm} = & -2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{y-y'}{\left[x'-x-\frac{\lambda}{2}s \pm \frac{p\lambda}{2(n+2)} + l\lambda\right]^2+(y-y')^2} \right. \\
 & \left. - \frac{y+y'}{\left[x'-x-\frac{\lambda}{2}s \pm \frac{p\lambda}{2(n+2)} + l\lambda\right]^2+(y+y')^2} \right\}, \\
 & q = 0, 1, 2, 3 \quad s = 0, 1. \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

1) [3] 中式 [2] 积分号内两项间“-”号应为“+”号。

φ_p 表示第 p 块斜向磁化体的 M 与 y 轴夹角. $P(x, y)$ 为场点坐标, $P'(x', y')$ 为积分动点坐标.

利用关系式^[4]

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{v}{(u+l\lambda)^2+v^2} = \frac{v}{|v|} \frac{\pi}{\lambda} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-mv|v|} \cos mvu \right], \quad (1.3)$$

其中

$$v = \frac{2\pi}{\lambda}$$

便可得到

$$\begin{aligned} H_y(P) = & \frac{8\pi M}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [f]_{h_1}^{h_2} \int_{-a}^a \cos mv(x'-x) dx' \right. \\ & - \left[\cos mv \left(x' - x + \frac{\lambda}{4} \right) \right]_{-b}^b \int_{h_1}^{h_2} f dy' \\ & + 2 \sum_{p=1}^{n/2} \left(\cos \frac{mp\pi}{n+2} \cos \varphi_p [f]_{h_1}^{h_2} \int_{-c}^c \cos mv(x'-x) dx' \right. \\ & \left. \left. - \sin \frac{mp\pi}{n+2} \sin \varphi_p \left[\sin mv(x'-x) \right]_{-c}^c \int_{h_1}^{h_2} f dy' \right) \right\}, \quad (1.4) \end{aligned}$$

式中

$$f = \frac{y-y'}{|y-y'|} e^{-mv|y-y'|} - \frac{y+y'}{|y+y'|} e^{-mv|y+y'|}$$

$$m = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots$$

$v = 2\pi/\lambda$, λ 是波动器周期长度.

对于气隙内部区域¹⁾, $|y| < h_1$, 上式变为:

$$H_y(P) = -8M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D}{m} [e^{-mv(y'-y)} + e^{-mv(y'+y)}]_{h_1}^{h_2} \cos mvx. \quad (1.5)$$

其中

$$\begin{aligned} D &= E + 2B \sin mvc, \\ E &= \sin mva - (-1)^k \sin mvb, \\ B &= \sum_{p=1}^{n/2} \cos \left(\frac{pm\pi}{n+2} - \varphi_p \right), \end{aligned}$$

磁化强度 M 最简单的渐变方式为线性渐变, 即

$$\varphi_p = p\varphi_0 \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{n+2}. \quad (1.6)$$

此时

$$B = \frac{\frac{1}{2} \sin k\pi \cos(k-1) \frac{\pi}{n+2} - \sin^2 \frac{k\pi}{2} \sin \left(\frac{k-1}{n+2} \pi \right)}{\sin \left(\frac{k-1}{n+2} \pi \right)}. \quad (1.7)$$

1) 对于 $|y| > h_2$ 以及 $h_1 < |y| < h_2$ 的外部区域和中间区域, 均可同理处理.

由此可见,当

$$\sin\left(\frac{k-1}{n+2}\pi\right) \neq 0$$

时

$$B = -\sin^2 \frac{k}{2}\pi = \begin{cases} -1 & k \text{ 为奇数} \\ 0 & k \text{ 为偶数.} \end{cases} \quad (1.8)$$

而当

$$\sin\left(\frac{k-1}{n+2}\pi\right) = 0$$

时,即当 $k = (n+2)j+1$, $j = 0, 1, 2, \dots$ 时则有

$$B = \frac{n}{2} \cos^2 \frac{nj}{2}\pi = \frac{n}{2}. \quad (1.9)$$

于是

$$D = \sin mva - (-1)^k \sin myb + \begin{cases} n \sin mvc, & k = (n+2)j+1 \\ -2 \sin mvc, & k \neq (n+2)j+1 \text{ 的奇数} \\ 0, & k \text{ 为偶数.} \end{cases} \quad (1.10)$$

从上式可看出,若各磁体宽度均选相同时,即若选取

$$a = b = c = \frac{\varepsilon\lambda}{4(n+2)}. \quad (1.11)$$

则只有当

$$\dots k = (n+2)j+1,$$

时, D 才不为零而有

$$D = (n+2) \sin \frac{\varepsilon m \pi}{2(n+2)}. \quad (1.12)$$

这里 ε 是磁体填充系数,而

$$m = 2(n+2)j+1. \quad (1.13)$$

由此可见,当满足上述条件(1.6)及(1.11)时,可消除一大批高次寄生谐波;故称这个条件为磁体宽度及其磁化方向的优化条件。

在满足优化条件情况下,气隙内部横向磁场分量的最终表达式可写成:

$$H_y(P) = 16AM \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{\varepsilon m \pi}{2A} \beta \alpha c h m v y \cos m v x, \quad (1.14)$$

式中

$$m = 2Aj + 1,$$

$$\beta = e^{-m \frac{2\pi h_1}{\lambda}}$$

$$\alpha = 1 - e^{-m \frac{2\pi \Delta h}{\lambda}}, \quad \Delta h = h_2 - h_1$$

$$A = \begin{cases} n+2 & \text{当 } a = b = c \neq 0 \\ 2 & c = 0 (n = 0, \text{ 无斜向体}) \\ 1 & b = c = 0 (\text{无斜向及纵向磁体}) \end{cases}$$

对 $A = n + 2$ 及 $A = 2$, 统称为渐变磁化型; 而 $A = 1$ 则称为简易型, 它既无斜向磁化体又无纵向磁化体, 而仅由沿纵向倒正相间排列的横向磁化体 (宽度 $2a$) 构成。

从式 (1.14) 不难得到在相同 h_1 及 Δh 条件下渐变型与简易型横向磁场基波 ($j = 0$) 幅值比

$$G_1 = \frac{\gamma\pi}{2 \sin \frac{\varepsilon\pi}{2}}, \quad \gamma = \frac{2(n+2)}{\pi} \sin \frac{\varepsilon\pi}{2(n+2)}. \quad (1.15)$$

当 $\varepsilon = 1$ 时, $n \rightarrow \infty$, $\gamma \rightarrow 1$, $G_1 = \pi/2$, 即渐变型基波场强比简易型可高出 50% 以上. γ 随 n 的变化见图 2 (曲线①). 如取 $n = 2$, γ 已为最大值的 97%. 值得特别指出的是 $n = 0$ 的情况, 此时 γ 约为 0.9, 即较 $n \rightarrow \infty$ 系统的磁场基波只低约 10%, 而较简易型提高了 40% 左右. 由此可见, 渐变型磁场基波的提高主要来源于增加了纵向磁化体; 至于增加斜向体数目 n , 对场强提高并不显著. 不过下面就会看到 n 的增加对减小寄生谐波有极明显作用. 但由于 $n = 0$ 的结构工艺简单易行, 具有重要的实用价值.

由 (1.14) 式还可得到渐变型与简易型二者最低次残留谐波幅值比 ($\varepsilon = 1$, 且 $\Delta h, h_1$ 相同):

$$G_2 = \frac{3(n+2)}{(2n+5)} \sin \left(\frac{2n+5}{2(n+2)} \pi \right) \frac{1 - e^{-(2n+5)\nu\Delta h}}{1 - e^{-3\nu\Delta h}} e^{-2(n+1)\nu h_1}. \quad (1.16)$$

显见, 当 $\Delta h/\lambda, h_1/\lambda$ 在相当宽的范围内变化, 上述比值始终较小, 且随 n 的增加指数性衰减.

在进行上述比较时还应注意二者最低次寄生谐波的次数是不相同的. 简易型为第 3 次, 渐变型则为第 $2n + 5$ 次, 因而后者对实际器件的影响还可望会更小一些. 此外上述比较是以 $\varepsilon = 1$ 为例进行的, 若要进一步减少寄生谐波, 还可对磁体填充系数 ε 进行优化, 使

$$\varepsilon = \frac{2n+4}{2n+5}. \quad (1.17)$$

来消除渐变型的第 $2n + 5$ 次谐波——以场强的略为下降为代价. 此时最低次谐波为第 $4n + 9$ 次, 具有更小的振幅. 对简易型, 选 $\varepsilon = 2/3$ 可消除第 3 次谐波, 接着出现的是第 5 次谐波.

最后还有一点值得指出, 式 (1.14) 表明波动器磁场基波同 α 因子, β 因子成正比. β

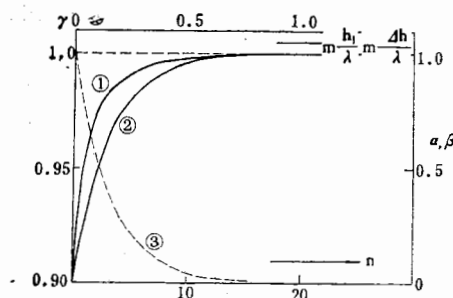


图 2 α, β, γ 变化曲线

强的镜象效应就等于在原无软铁板的简易型系统场强表达式上乘以如下因子

$$F_m = \frac{(1 + e^{-m\nu\Delta h})}{(1 - e^{-2m\nu(h_1 + \Delta h)})} \quad (2.1)$$

对于基波, 镜象因子为

$$F_1 = \frac{(1 + e^{-2\pi \frac{\Delta h}{\lambda}})}{(1 - e^{-4\pi (\frac{h_1 + \Delta h}{\lambda})})} \quad (2.2)$$

F_1 即是混合型与简易型场强基波模量比。镜象因子随相对气隙 h_1/λ 及磁体相对厚度 $\Delta h/\lambda$ 变化曲线示如图 4。

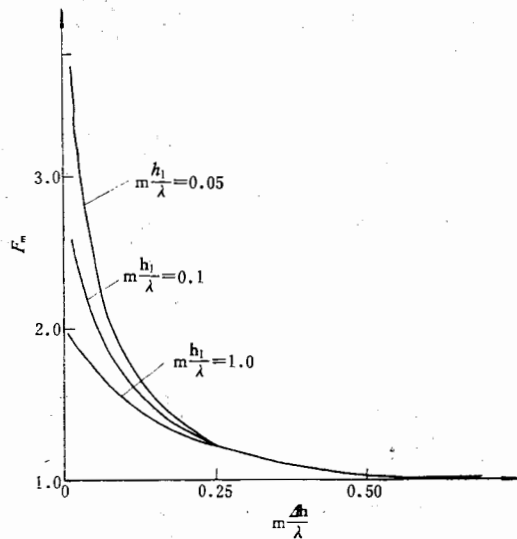


图 4 镜象因子

当气隙及周期相同时, 为获得同样场强, 简易型与混合型磁体厚度 $\Delta h'$ 与 $\Delta h''$ 之比为 ($\epsilon = 1$):

$$G_4 = \frac{\Delta h'}{\Delta h''} = \frac{1 - e^{-6\pi \frac{\Delta h'}{\lambda}}}{1 - e^{-6\pi \frac{\Delta h''}{\lambda}}} \cdot \frac{1 + e^{-6\pi \frac{\Delta h'}{\lambda}}}{1 - e^{-12\pi (\frac{h_1}{\lambda} + \frac{\Delta h'}{\lambda})}} \quad (2.3)$$

G_4 随 $\Delta h''/\lambda$ 变化曲线示于图 5。由图可见, 随着 h_1/λ 与 $\Delta h''/\lambda$ 的增加, 此比值趋近于 2。这是可以想见的; 它说明, 当气隙及磁体厚度足够大时, 考虑镜象后的总场强相当于没有镜象而使象源磁体厚度加倍后所产生的磁场。

由此可见, 混合型的镜象效应对提高基波场强具有显著作用; 图 4 表明, 磁体厚度及气隙愈小, 效果愈明显。而在 $\Delta h/\lambda > 0.5$ 区域, 则镜象作用极微。由上讨论可见, 简易型没有单独使用价值, 应以混合型取代之。

下面我们比较渐变型与混合型的优缺点及其应用范围。

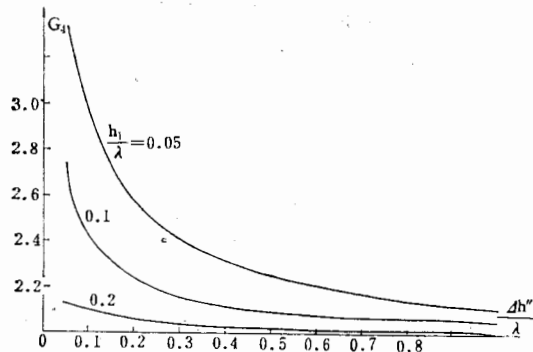


图5 为获得同样场强, 简易型与混合型波动磁铁磁体厚度比的变化曲线 ($\Delta h'$ - $\Delta h''$ 分别为简易型及混合型磁体厚度 $G_4 = \frac{\Delta h'}{\Delta h''}$)

三、渐变型结构与混合型结构比较

由式 (1.14), (2.2) 可得渐变型与混合型波动器工作磁场基波比为

$$G_6 = \frac{\pi}{2} \frac{\gamma}{F_1 \sin \frac{\varepsilon \pi}{2}} \quad (3.1)$$

γ 意义见 (1.15) 式. 它表征场强如何随斜向体数目 n 而变化. 对 $\varepsilon = 1$, 当 n 从零变到无穷大时, γ 从 0.9 变到 1 故有:

$$G_6 = (0.9 \sim 1.0) \frac{\pi}{2F_1} \quad (3.2)$$

G_6 随 h_1/λ 及 $\Delta h/\lambda$ 变化曲线见图 6. 由图可见, 只当 $\Delta h/\lambda \lesssim 0.1$ 时, 混合型结构才优于渐变型, 而在 $\Delta h/\lambda \lesssim 0.15$, 即大部分实用范围, 渐变型场强较混合型为高. 至于寄生谐波, 如前所述, 前者远为优越. 故在多数情况下, 采用渐变磁化系统要比混合型系统为有利. 由此我们认为渐变磁化是一种很值得注意的新型磁路结构.

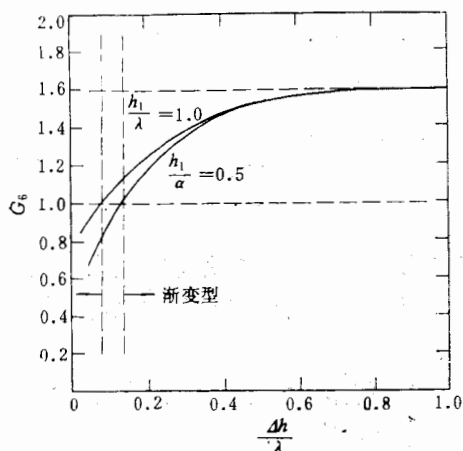


图6 渐变型与混合型波动磁铁主波幅值比 ($h_1, \lambda, \Delta h$ 相同, $\varepsilon = 1, n \rightarrow \infty$)

下面我们根据前几节导出的表达式进行一些具体的数值计算, 以及具体地比较这二种形式的波动器(限于 $y = 0$ 平面).

例 1: $\lambda = 84\text{mm}$, $h_1 = 5\text{mm}$, $h_2 = 47\text{mm}$
 $\varepsilon = 1$, $4\pi M = 7500$ 高斯

此例 $\Delta h/\lambda = 0.5$, $h_1/\lambda = 0.0595$, 从图 6 可见, 采用渐变型结构较混合型优越.

(i) 渐变型: 由 (1.14) 在 $y = 0$ 平面上, 基波模量:

$$H_y = \begin{cases} 9623 \text{ 高斯} & n = 2 \\ 8889 \text{ 高斯} & n = 0 \end{cases}$$

最低次寄生谐波与基波模量比 ($y = 0$):

$$\frac{H_{ym}}{H_y} = \begin{cases} 5.83 \times 10^{-3} & n = 2 (m = 9) \\ 4.68 \times 10^{-2} & n = 0 (m = 5) \end{cases}$$

(ii) 混合型(软铁紧贴永磁体)

$$H_y = 6559.4 \text{ 高斯}$$

$$\frac{H_{y3}}{H_y} = 0.158$$

例 2: $\lambda = 40\text{mm}$, $h_1 = 10\text{mm}$, $h_2 = 20\text{mm}$

$$\varepsilon = 1, 4\pi M = 7500 \text{ 高斯}$$

此例 $\Delta h/\lambda = h_1/\lambda = 0.25$

(i) 渐变型

$$H_y = \begin{cases} 2407 \text{ 高斯} & n = 2 \\ 2224 \text{ 高斯} & n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{H_{ym}}{H_y} = \begin{cases} 4.89 \times 10^{-7} & n = 2, (m = 9) \\ 4.72 \times 10^{-4} & n = 0, (m = 5) \end{cases}$$

(ii) 混合型

基波

$$H_y = 1899.3 \text{ 高斯}$$

三次谐波与基波比

$$\frac{H_{ym}}{H_y} = 1.57 \times 10^{-2}$$

(iii) 电磁铁

若要在不增加磁铁尺寸前提下用电磁铁产生 2407 高斯磁场(同样气隙), 粗略估算可知其电流密度将超过 70 安/平方毫米, 这在直流情况下是无法实现的。

四、小 结

(1) 所导出的 (1.14), (2.1) 式及相关的图 2, 4, 6 可方便地用于计算简易型、渐变型及混合型波动器的场强及寄生谐波。

(2) 可用加大磁体厚度办法提高场强, 但应尽量避免使用在 $\Delta h/\lambda > 0.5$ 范围, 因为这时增加 Δh 对场强贡献甚微。

(3) 相对气隙 h_1/λ 影响高次谐波。加大 h_1/λ 可减小谐波。对渐变型则可增加斜向磁化体数目以减小谐波。同时满足优化条件 (1.6) 及 (1.11)。

(4) 渐变型结构对磁场的提高主要来自纵向磁化体。斜向磁化体的作用主要为抑制高次谐波。渐变型中 $n = 0$ 的特例由于工艺简单而又有较高场强, 特具实用价值。

(5) 镜像的作用, 一般而言约相当于将磁体厚度加倍, 但在 $\Delta h/\lambda$ 及 h_1/λ 很小的场合, 则其影响将更强烈; 而在 $\Delta h/\lambda > 0.5$ 范围, 则镜象作用极为微弱。

(6) 要求谐波很小的场合, 应当采用渐变型结构。在谐波要求不甚苛刻的场合, 则在 $\Delta h/\lambda < 0.1$ 范围, 以应用混合型为有利, 因为此时镜象作用极显著。在 $\Delta h/\lambda > 0.15$ 范围, 则采用渐变型可获更高场强。

(7) 简易型结构无单独使用价值。

(8) 在实际波动器尺度内, 永磁波动器可以达到用普通电磁铁无法达到的场强。

参 考 文 献

- [1] J. E. Spencer "Wigglers—The Newest profession", SLAC-PUB-2677, PEP-NOTE 341 (1981).
 [2] K. Halbach et al., "A Permanent Magnet Undulator for SPEAR", IEEE, NS-28, No. 3(1981).
 [3] 刘茂三等, 高能物理与核物理, 6(1982), 764.
 [4] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик «Таблицы Интегралов, Сумм, Рядов и Произведений» (1971), Москва

MAGNETIC FIELD ANALYSIS OF PERMANENT MAGNET UNDULATOR

LIU MAO-SAN SHI CAI-TU CHEN REN-HUAI

(*Institute of High Energy Physics, Academic Sinica*)

ABSTRACT

2 Dimensional magnetic field expression of permanent magnet undulator with gradually varied magnetization is derived. Conditions for minimizing high order harmonics are given. Three different types of permanent magnet undulator — the "gradually varied" type, mixed type and simple type — are compared. Upon these comparisons we conclude that "gradually varied" type is superior to mixed type except for $\Delta h/\lambda \approx 0.1$.