

# 格点规范理论的层子质量重整化

## (I) 强耦合和过渡区

郭硕鸿 刘金明 陈启洲

(中山大学物理系)

### 摘 要

用固定  $\rho$  介子质量对层子质量  $m(g)$  重整化. 强耦合展开得到  $g \geq 2$  时的  $m(g)$ . 变分法计算把  $m(g)$  延拓到  $g \sim 1$  处, 即已进入过渡区. 在强耦合区两种计算方法结果相符. 进入过渡区后,  $m(g)$  迅速下降, 有明显的向弱耦合区过渡的趋势.

### 一、引 言

近年来, 纯规范场的格点规范理论<sup>[1]</sup>取得有意义的进展. 包括层子在内时, 关于强子能谱的 Monte Carlo 计算<sup>[2]</sup>表明格点规范理论有可能应用于低能强子现象, 但计算结果与实验比较还存在一些问题, 需要进一步研究. 在理论分析和解析计算方面, 含层子的格点规范理论还未取得比较满意的结果. Banks 等<sup>[3]</sup>和 Shigemitsu<sup>[4]</sup> 分别用 Casher-Susskind 费米子方案<sup>[5]</sup>和 Wilson 费米子方案<sup>[6]</sup>做过强子能谱理论计算. 介子和重子能谱分裂的趋势是和实验相符的, 但分裂的数值和实验比较并不很好. 对格点规范理论手征对称性的研究<sup>[7]</sup>表明手征对称是自发破缺的, 因而可导致较低的  $\pi$  介子质量. 这些工作表明, 虽然含层子的格点规范理论还有很多问题没有解决, 但它应用到低能强子现象的可能性是存在的. 因此, 对这个问题进行更多的理论探讨和解析计算是有意义的.

在强子能谱计算中, 层子质量重整化问题是一个基本问题. 由于禁闭性, 层子不作为自由粒子出现, 它的质量不是可测量的物理量, 仅作为依赖于标度的参量出现. 当动量标度改变时, 要描述同一物理过程, 层子质量必须相应地改变. 在大动量(弱耦合)区, 层子质量满足渐近自由关系<sup>[8]</sup>. 如果格点规范理论能应用到低能强子现象的话, 我们应该得到重整化的层子质量  $m(a)$  作为格点间距  $a$  的函数, 当  $a \rightarrow 0$  时  $m(a)$  过渡到渐近自由的层子质量关系.

本文探讨格点规范理论中的层子质量重整化问题. 理论含有两个依赖于  $a$  的变动参量: 耦合常数  $g(a)$  和层子质量  $m(a)$ . 我们用弦张力  $\alpha$  和  $\rho$  介子质量  $M_\rho$  作为两个固定物理量来对这两个参量重整化. 当  $a$  改变时, 要求  $\alpha$  和  $M_\rho$  不变, 由此定出  $g(a)$  和  $m(a)$ .

Hasenfratz 等<sup>[9]</sup>用固定强子质量比讨论过和层子质量有关的 Wilson 跳跃参数的重整化问题. 我们更直接地研究层子质量的重整化. 这将有助于更好地了解由强耦合到弱耦合的过渡.

第二节用强耦合展开计算  $m(g)$ . 这展开式可以应用到  $g \geq 2$  的区域. 为了把  $m(g)$  延拓到较小  $g$  值, 第三节我们用变分法计算. 选取非常简单的试探波函数, 所得的  $m(g)$  在  $g$  大时与强耦合展开结果相符, 而且可以延拓到  $g \cong 1$  处, 即已进入过渡区. 所得结果清楚地显示出由强耦合区进入到过渡区的行为. 第四节讨论所得结果. 变分计算用到的公式放在附录中.

## 二、强耦合展开

我们用哈密顿形式的理论<sup>[10]</sup>, 并采用 Wilson 费米子方案. 体系的哈密顿量为

$$H = \sum_{i=1}^5 H_i, \quad (1)$$

$$H_1 = \frac{g^2}{2a} \sum_{\mathbf{n}, \hat{k}, \alpha} [E^\alpha(\mathbf{n}, \hat{k})]^2, \quad (1a)$$

$$H_2 = -\frac{1}{ag^2} \sum_P \text{tr}(U_P + U_P^\dagger), \quad (1b)$$

$$H_3 = -\frac{i}{2a} \sum_{\mathbf{n}, \pm \hat{k}} \bar{\psi}(\mathbf{n}) \gamma_k U(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \hat{k}) \psi(\mathbf{n} + \hat{k}), \quad (1c)$$

$$H_4 = -\frac{B}{2a} \sum_{\mathbf{n}, \pm \hat{k}} \bar{\psi}(\mathbf{n}) U(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \hat{k}) \psi(\mathbf{n} + \hat{k}), \quad (1d)$$

$$H_5 = \left(m + \frac{6B}{2a}\right) \sum_{\mathbf{n}} \bar{\psi}(\mathbf{n}) \psi(\mathbf{n}). \quad (1e)$$

式中  $\mathbf{n}$  表示三维格点位置,  $\hat{k}$  为三个轴向单位矢量,  $U(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \hat{k})$  为链  $(\mathbf{n}, \mathbf{n} + \hat{k})$  上的规范群元素,  $U_P$  为方格  $P$  四边上  $U$  的乘积,  $E^\alpha$  为色电场,  $\psi$  为费米场. 含参数  $B$  的项是 Wilson 项<sup>[6]</sup>.

哈密顿量 (1) 式形式上和文献 [5] 中给出的相同, 但这里对层子质量作了不同处理, 即  $m$  不是任意参量, 而是由重整化条件定出的  $m(g)$ .

在强耦合区, 把  $x = 1/g^2$  作为小参量, 对  $x$  作微扰展开. 以  $H_1 + H_5$  作为  $H_0$ , 其他各项为微扰项, 写出

$$H = \frac{g^2}{2a} W, \quad (2)$$

$$W = W_0 + x(W_3 + W_4) + x^2 W_2. \quad (3)$$

其中  $W_0$  对应于  $H_1 + H_5$ ,  $W_2, W_3, W_4$  分别对应于  $H_2, H_3$  和  $H_4$ .

为了得出  $g(a)$  和  $m(a)$ , 需要计算弦张力  $\alpha$  和  $M_p$ . Kogut 等<sup>[11]</sup>给出了哈密顿形式下纯规范场弦张力强耦合展开式. 当考虑动力学层子在内地, 由于真空极化, 弦张力需要修正. 在弦张力计算中, 含层子圈的最低阶图如图 1 所示. 图中波形线表示某一链上的规范场, 实线圈表示该链两端层子对的产生和湮灭过程. 取  $SU(2)$  味群和  $SU(3)$  色群, 用

标准强耦合展开法<sup>[12,5]</sup>求出此图对弦张力的修正为

$$12x^2 \left[ \frac{1/9}{\frac{4}{3} - 2\omega} + \frac{8/9}{\frac{4}{3} - 3 - 2\omega} + \frac{1/3}{\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - 2\omega} + \frac{2/3}{\frac{4}{3} - \frac{10}{3} - 2\omega} - \frac{2}{\frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 2\omega} \right]. \quad (4)$$

因此,弦张力公式为

$$\alpha = \frac{2g^2}{3a^2} \left[ 1 + 3x^2 \left( \frac{1}{4 - 6\omega} - \frac{8}{5 + 6\omega} - \frac{1}{2\omega} - \frac{1}{1 + \omega} + \frac{9}{2 + 3\omega} \right) + \dots \right], \quad (5)$$

$$\omega \equiv (2ma + 6B)x, \quad (6)$$

由(5)式得

$$a = \sqrt{\frac{2}{3\alpha}} g \lambda(g). \quad (7)$$

其中  $\lambda(g)$  为(5)式方括号的  $\frac{1}{2}$  次方。

Shigemitsu<sup>[5]</sup> 给出了介子质量强耦合展开系数数值。为了得到函数  $m(g)$ , 我们重新推导了  $M_p$  的强耦合展开式

$$\begin{aligned} \frac{2a}{g^2} M_p = & 2\omega + \frac{12x^2}{\frac{4}{3} + 2\omega} - 18B^2x^2 + \frac{x^4}{\left(\frac{4}{3} + 2\omega\right)^2} \left\{ \frac{12}{\omega} - 21 - \frac{732}{\frac{4}{3} + 2\omega} \right. \\ & + \frac{512}{3 + 4\omega} + \frac{120}{\frac{2}{3} + 2\omega} + \frac{144}{\frac{5}{3} + 2\omega} \left. \right\} + B^2x^4 \left\{ \frac{1}{\frac{4}{3} + 2\omega} \left[ -270 - \frac{24}{\omega} \right. \right. \\ & - \frac{384}{3 + 2\omega} - \frac{144}{\frac{10}{3} + 2\omega} + \frac{1368}{\frac{8}{3} + 2\omega} \left. \right] + \frac{1}{\left(\frac{4}{3} + 2\omega\right)^2} \left[ -432 - \frac{16}{\omega} - \frac{256}{3 + 2\omega} \right. \\ & - \frac{96}{\frac{10}{3} + 2\omega} + \frac{1584}{\frac{4}{3} + 2\omega} + \frac{1200}{\frac{8}{3} + 2\omega} \left. \right] + 9 \left[ \frac{48}{\frac{8}{3} + 2\omega} - \frac{1}{\omega} - \frac{16}{3 + 2\omega} \right. \\ & \left. \left. - \frac{6}{\frac{10}{3} + 2\omega} \right] \right\} + 141.75B^4x^4. \quad (8) \end{aligned}$$

当  $g \rightarrow \infty$  时,由(6)-(8)式,  $M_p = 2m = \sqrt{\frac{3}{2}} \alpha g \omega$ , 因而  $\omega \sim O(g^{-1})$ . 令  $y = g^{-1} = x^{\frac{1}{2}}$ , 把  $\omega(y)$  写为

$$\omega(y) = y \lambda(y) \mu(y) + 6By^2, \quad \mu(0) = \sqrt{\frac{2}{3\alpha}} M_p, \quad (9)$$

把(9)式代入(7)和(8)式,对  $y$  展开,得

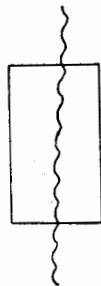


图 1

$$\lambda(y) = 1 - \frac{3}{4\mu_0} y^3 + \frac{129}{40} y^4 - \frac{2073}{400} \mu_0 y^5 + \dots \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mu(y) = & \mu_0 - 6By - \frac{1}{2}(9 - 18B^2)y^3 + \left(\frac{27}{4}\mu_0 - \frac{9B}{2\mu_0}\right)y^4 \\ & - \left(\frac{81}{8}\mu_0^2 - \frac{387}{20}B\right)y^5 + \left[\frac{243}{16}\mu_0^3 - \frac{27}{4\mu_0} - \frac{6219}{200}B\mu_0 + \frac{99}{4\mu_0}B^2\right]y^6. \end{aligned} \quad (11)$$

若取  $M_p = 770\text{MeV}$ ,  $\sqrt{\alpha} = 450\text{MeV}$ , 得  $\mu_0 = 1.40$ . 层子质量为

$$m(y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\alpha}{2}} \mu(y). \quad (12)$$

下面图3中的虚线画出  $\mu(y)/\mu_0$  的强耦合展开式. 取不同  $B$  值, 曲线形状大致相似. 当  $y$  由 0 增大时,  $\mu(y)$  下降, 在  $y \sim 0.5$  处达极小值, 然后迅速上升. 由展开式 (10), (11) 的系数估计, 级数在  $y \geq 0.5$  时发散. 这行为实际上是由  $M_p$  强耦合展开式 (8) 的能量分母的零点所引起的. 因此, 只有  $y \leq 0.5$  的曲线部分有意义. 如果我们较好地处理 (8) 式的能量分母, 可以把曲线延伸到较大  $y$  值. 这里我们准备进一步处理强耦合展开式. 但要指出, 强耦合展开式在  $y \leq 0.5$  时是可靠的, 它可以作为其他近似计算方法在强耦合区适用性的一个依据.

### 三、变分法

为了把层子质量  $m(g)$  从强耦合区延拓到弱耦合区, 我们用变分法<sup>[13-15]</sup>计算. 适当选择有特定对称性的, 含某些参数  $\lambda_i$  的变分态  $|\lambda_i\rangle$ , 计算哈密顿量  $\hat{H}$  在这态中的期待值

$$E(\lambda_i) = \langle \lambda_i | \hat{H} | \lambda_i \rangle, \quad (13)$$

则  $E(\lambda_i)$  对  $\lambda_i$  的极小值就是具有所规定的对称性的最低能态能量的一个上限.

在哈密顿量 (1) 式中, 把层子场表示为

$$\phi(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \xi(\mathbf{n}) \\ \eta(\mathbf{n}) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$\xi$  和  $\eta$  都是二分量子量.  $\xi(\mathbf{n})$  为层子湮灭算符,  $\eta(\mathbf{n})$  为反层子产生算符. 选择最简单的介子变分态

$$|\phi(\lambda)\rangle = \frac{1}{\sqrt{12\mathcal{N}}} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{l}, \Gamma} \xi^+(\mathbf{n} + \mathbf{l}) U_{\Gamma}(\mathbf{n} + \mathbf{l}, \mathbf{n}) O_{\eta}(\mathbf{n}) f(\Gamma; \lambda) |0\rangle \quad (15)$$

式中  $|0\rangle$  为强耦合规范场真空态 (即  $E^2 = 0$  的本征态),  $\Gamma$  为由格点  $\mathbf{n}$  到  $\mathbf{n} + \mathbf{l}$  的一条折线.  $U_{\Gamma}$  为这折线所有链上  $U$  的乘积.  $f(\Gamma; \lambda)$  为变分函数.  $\mathcal{N}$  为总格点数.  $O_i$  为与自旋和同位旋有关的矩阵, 由泡利矩阵  $\sigma$  和  $\tau$  构成. 不同介子对应不同的  $O_i$ . 由于对点阵平移的不变性, 可选反层子所在点为原点, 讨论较简单的波函数

$$|\phi(\lambda)\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}} \sum_{\mathbf{l}, \Gamma} \xi^+(\mathbf{l}) U_{\Gamma}(\mathbf{l}, \mathbf{0}) O_{\eta}(\mathbf{0}) f(\Gamma; \lambda) |0\rangle \quad (16)$$

$\Gamma$  可以包括由  $\mathbf{0}$  到  $\mathbf{l}$  的所有折线. 作为初步近似, 我们在 (16) 式中只取由  $\mathbf{0}$  到  $\mathbf{l}$  的所有最短折线. 这种变分态有以下一些缺点: (1) 规范场真空态平均场为 0, 因而没有

计及平均场效应; (2) 非球对称性, 因而不是纯零轨道角动量态; (3) 当  $a \rightarrow 0$  时 Wilson 项期待值不趋于零. 由于这些缺点, 不能期望这种变分态能应用到弱耦合区中去. 但可以预期, 用这种变分态可以把强耦合展开计算延拓到较小  $g$  值.

为了计算  $\hat{H}$  的期待值, 首先要数出路径  $\Gamma$  的数目. 以下  $\Gamma$  都代表由  $\mathbf{0}$  到某点  $\mathbf{l}$  的一条最短折线. 附录 1 证明, 由  $\mathbf{0}$  到不同  $\mathbf{l}$  点而总长度为  $Na$  的折线  $\Gamma$  的总数为

$$v_{\Gamma}(N) = 8 \times 3^N - 12 \times 2^N + 6 - \delta_{N,0}. \quad (17)$$

为了使计算简单, 我们选变分函数

$$f(\Gamma; \lambda) = \begin{cases} e^{-\lambda Na} & \Gamma \in V \\ \sqrt{2} e^{-\lambda Na} & \Gamma \in S \\ 2e^{-\lambda Na} & \Gamma \in A \\ 2\sqrt{2} & \Gamma \in O \end{cases} \quad (18)$$

$\Gamma \in V$  表示在体内而不全部在坐标平面上的折线,  $\Gamma \in S$  表示在坐标平面上而不全在坐标轴上的折线,  $\Gamma \in A$  表示在坐标轴上的  $\Gamma$ ,  $\Gamma \in O$  只含原点.

由 (16), (18) 和 (A3) 求得变分态归一化因子

$$\begin{aligned} Z &\equiv \langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_{\Gamma} f(\Gamma) \\ &= \sum_N (v_V(N) + 2v_S(N) + 4v_A(N) + 8\delta_{N,0}) e^{-2\lambda Na} \\ &= 8 \times \sum_N 3^N e^{-2\lambda Na} = \frac{8}{1 - 3e^{-2\lambda a}}. \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $v_V(N)$  为  $\Gamma \in V$  而总长为  $Na$  的折线数, 余类推.

由 (16)–(19) 式, 容易算出

$$Z^{-1} \langle \varphi | H_2 | \varphi \rangle = 2m + \frac{6B}{2a}, \quad (20)$$

$$Z^{-1} \langle \varphi | H_1 | \varphi \rangle = \frac{g^2}{2a} \frac{4}{3Z} \sum_{\Gamma} N f(\Gamma) = \frac{2g^2}{a} \frac{e^{-2\lambda a}}{1 - 3e^{-2\lambda a}}, \quad (21)$$

$$Z^{-1} \langle \varphi | H_3 | \varphi \rangle = 0. \quad (22)$$

附录 2 中证明

$$Z^{-1} \langle \varphi | H_2 | \varphi \rangle = -\frac{2}{ag^2} \frac{e^{-4\lambda a}}{1 - 3e^{-2\lambda a}}. \quad (23)$$

最后计算  $\hat{H}_4$  期待值

$$Z^{-1} \langle \varphi | H_4 | \varphi \rangle = -\frac{B}{2a} \frac{4}{Z} \sum_{(\Gamma, \Gamma')} f(\Gamma) f(\Gamma'). \quad (24)$$

其中  $\Gamma'$  为把  $\Gamma$  端点接上一条链而成的折线. 有下列几种情形: (1) 若  $\Gamma \in V$ , 则对每一  $\Gamma$  有三条  $\Gamma' \in V$ ; (2) 若  $\Gamma \in S$ , 则对每一  $\Gamma$  有二条  $\Gamma' \in S$ , 另有二条  $\Gamma' \in V$ ; (3) 若  $\Gamma \in A$ , 则有一条  $\Gamma' \in A$ , 四条  $\Gamma' \in S$ ; (4) 若  $\Gamma \in O$ , 则有六条  $\Gamma' \in A$ . 因此, 由 (18) 及 (A3), (A4) 式, 得

$$\sum_{(\Gamma, \Gamma')} f(\Gamma) f(\Gamma') = \sum_N (3 \times 8 \times 3^N + 2(\sqrt{2} - 1) \times 12 \times 2^N) e^{-(2N+1)a},$$

因而

$$Z^{-1}\langle\varphi|H_4|\varphi\rangle = -\frac{6B}{a}e^{-2a}\left[1 + \frac{(\sqrt{2}-1)(1-3e^{-2\lambda a})}{1-2e^{-2\lambda a}}\right]. \quad (25)$$

由(20)–(25)式并令  $\eta = \sqrt{3}e^{-\lambda a}$ , 得介子能量

$$E(\eta) = Z^{-1}\langle\varphi|\hat{H}|\varphi\rangle = 2m + \frac{6B}{a}\left[1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\eta + \frac{\sqrt{2}-1}{3\sqrt{3}}\frac{\eta^3}{1-\frac{2}{3}\eta^2}\right] + \frac{2g^2}{3a}\frac{\eta^2}{1-\eta^2} - \frac{2}{9ag^2}\frac{\eta^4}{1-\eta^2}. \quad (26)$$

由  $\partial E/\partial\eta = 0$  得  $\eta$  的 9 次方程. 用数字计算求此方程在  $0 \leq \eta \leq 1$  范围内的解  $\eta_0$ , 代入(26)式, 即得介子基态能量的一个上限  $E(\eta_0)$ .

由于所选变态不包括层子海的贡献, 在所用层子场的表示中也就忽略了层子动能的贡献, 因而  $\langle\hat{H}_3\rangle = 0$ , 不同介子能量没有分裂. 因此,  $E(\eta_0)$  是最高质量基态介子能量的一个上限. 为了和强耦合展开计算比较, 我们取此质量为  $M_p$  ( $M_p$  和  $M_w$  只有很小差别). 固定  $M_p$ , 由(26)式算出的  $m$  也就是层子质量的一个下限. 计算  $m(g)$  时, 必须先把  $a$  表为  $g$  的函数. 作为重整化耦合常数  $g(a)$ , 在  $y < 0.9$  时我们取 Kogut 等<sup>[11]</sup>给出的弦张力展开式, 在  $y > 0.9$  处接上弱耦合渐近自由公式

$$a = C\left(\frac{16\pi^2}{11g^2}\right)^{\frac{11}{12}}e^{-8\pi^2/g^2}. \quad (27)$$

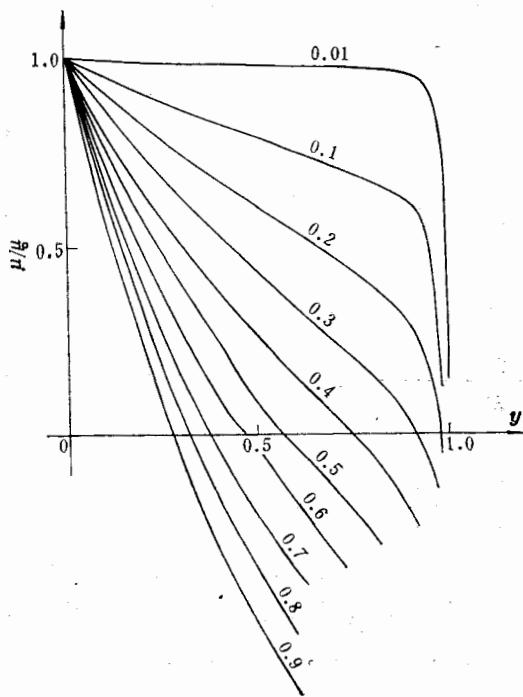


图 2 曲线上的数字为相应的  $B$  值

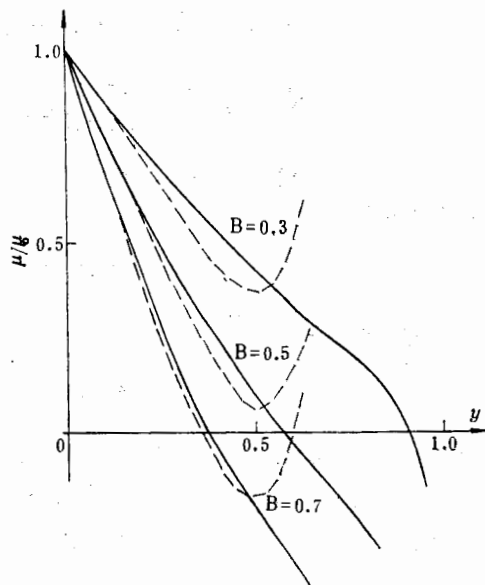


图 3 实线为变分法计算结果, 虚线为强耦合展开结果

选常数  $C$  使两式在  $y = 0.9$  处相接. 把函数  $a(g)$  代入  $E(\eta_0)$  式, 最后得  $m(g)$  的下限. 不同  $B$  值时  $m(g)$  的曲线如图 2 所示.

在图 3 中把强耦合展开曲线 (11) 式 (虚线) 和变分法曲线画在一起比较. 图 4 画出  $B = 0.3$  时, 强耦合展开曲线, 变分法曲线和渐近自由层子质量曲线以作比较. 渐近自由曲线取为

$$m(g) = \hat{m} \left( \ln \frac{Q}{\Lambda} \right)^{-4/11} = \hat{m} \left( \frac{11}{8\pi^2} g^2 \right)^{4/11}. \quad (28)$$

其中  $\hat{m}$  为层子的重整化群不变质量, 在图中我们取  $\hat{m} = 20 \text{ MeV}$ .

#### 四、讨 论

由图 2 和图 3 看出:

(1) 在强耦合区 ( $y \lesssim 0.5$ ), 变分计算和强耦合展开符合得相当好. 两者的差别主要来自: 在强耦合展开中所用的  $a(g)$  计及了层子效应, 而在变分计算中用的是纯规范场的  $a(g)$ . 两种计算方法的相符表明所用的变分态在强耦合区较好地反映介子波函数的行为.

(2) 变分计算把强耦合展开结果扩展到较大  $y$  值. 由于所用变分态并不满足  $a \rightarrow 0$  时 Wilson 项  $\rightarrow 0$  的要求 ((26) 式含  $B$  的一项), 当  $B$  较大时, 中间耦合区算出的  $m(g)$  都偏低. 但取较小  $B$  值时, Wilson 项的作用相对不大,  $m(g)$  在中间耦合区仍可反映出其主要行为. 由图 2, 取  $B = 0.01$  时,  $m(g)$  在  $g \lesssim 1$  区缓变, 但到  $g \gtrsim 1$  时急剧下降, 向着弱耦合区过渡. 虽然由于所选变分态的限制, 还不能描述弱耦合区的行为, 但从强耦合区进入到过渡区的趋势是很明显的. 由图也可看出 Wilson 项参数  $B$  的作用. 在强耦合区  $B$  值有较大影响, 但进入过渡区以后, 我们猜测, 不同  $B$  值的  $m(g)$  都将趋于渐近自由曲线, 与  $B$  值无关.

由于在过渡区内的急剧变化, 关于  $m(g)$  的强耦合展开不能用 Padé 近似延拓到弱耦合区, 而且在中间耦合区内所作的能谱计算<sup>[2]</sup>的可靠性都是需要认真考察的.

为了完成  $m(g)$  的计算并进一步计算强子能谱, 还必须研究由过渡区到弱耦合区的行为. 这要求我们选择比较复杂的变分波函数. 其中关键的一点是计及非零平均场的效应. 关于这一区域的计算我们正在研究中.

在进行数字计算时, 得到本校物理系引力研究室胡恩科同志, 微处理机实验室陈育新先生和王知光同志给予使用计算机的方便与帮助. 在此表示感谢.

#### 附录 1 折线数目的计算

由格点  $(0, 0, 0)$  到  $(l, m, n)$  的最短折线  $\Gamma$  的数目为

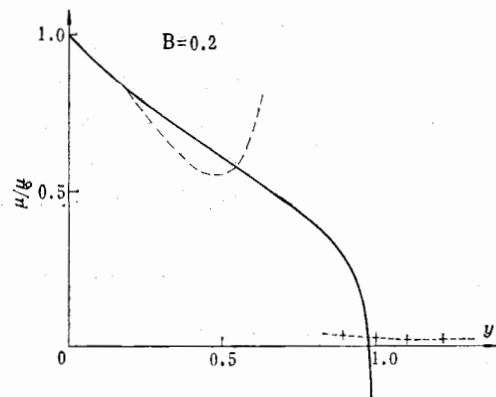


图 4 实线——为变分法计算结果; 虚线——为强耦合展开结果; 带十字虚线---+---+---为渐近自由计算结果

$$\nu_r(l, m, n) = \frac{(l+m+n)!}{l!m!n!} \quad (\text{A1})$$

一个象限内由原点到不同  $l$  点而总长为  $N_s$  的折线  $\Gamma$  总数为

$$\sum_{l+m+n=N} \nu_r(l, m, n) = 3^N \quad (\text{A2})$$

数目  $8 \times 3^N$  把  $\Gamma \in V$  的折线计算一次,  $\Gamma \in S$  计算二次,  $\Gamma \in A$  计算四次, 原点计算八次. 因此,

$$8 \times 3^N = \nu_V(N) + 2\nu_S(N) + 4\nu_A(N) + 8\delta_{N,0}, \quad (\text{A3})$$

同理

$$12 \times 2^N = \nu_S(N) + 4\nu_A(N) + 12\delta_{N,0}, \quad (\text{A4})$$

由此可得

$$\begin{aligned} \nu_V(N) &= 8 \times 3^N - 24 \times 2^N + 4\nu_A(N) + 16\delta_{N,0}, \\ \nu_S(N) &= 12 \times 2^N - 24 + 12\delta_{N,0}, \\ \nu_A(N) &= 6 - 6\delta_{N,0}, \\ \nu_0(N) &= \delta_{N,0}, \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

$$\nu_r(N) = \nu_V + \nu_S + \nu_A + \nu_0 = 8 \times 3^N - 12 \times 2^N + 6 - \delta_{N,0}. \quad (\text{A6})$$

### 附录 2 $\langle \varphi | \hat{H}_2 | \varphi \rangle$ 的计算

如图 5, 设  $P$  为由链 1234 组成的方格 (1 表示 1 的反向). 链 1, 2 为某折线  $\Gamma$  中的两条链,  $\Gamma$  是连

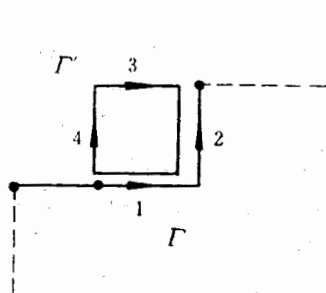


图 5

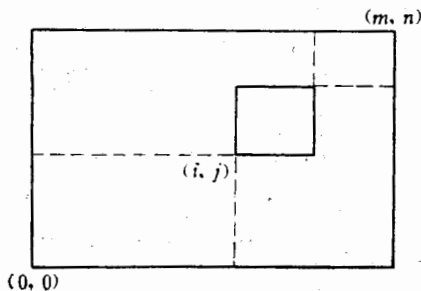


图 6

接  $0$  到  $l$  的一条最短折线. 由

$$\langle 0 | U_{ab}(1) U_{ji}(1) | 0 \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ai} \delta_{bj}$$

在计算期待值时, 相当于代换

$$(\text{tr} U_P) U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{3} U_{\Gamma'} \quad (\text{A7})$$

其中  $\Gamma'$  为把  $\Gamma$  中的链 1, 2 换成 4, 3 而得的折线.

现在计算受  $\text{tr} U_P$  作用的折线总数. 先看二维情形. 以  $P_{ij}$  表示顶点为  $(i, j)$ ,  $(i+1, j)$ ,  $(i, j+1)$  和  $(i+1, j+1)$  的方格. 如图 6, 受  $\text{tr} U_{ij}$  作用的总折线数  $\nu_{ij} = 2 \times$  由  $(0, 0)$  到  $(i, j)$  的折线数  $\times$  由  $(i+1, j+1)$  到  $(m, n)$  的折线数, 即

$$\nu_{ij} = \frac{(i+j)!}{i!j!} \frac{(m+n-2-i-j)!}{(m-1-i)!(n-1-j)!} \quad (\text{A8})$$

对方格  $P_{ij}$  求和, 得

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} \nu_{ij} = \binom{m+n-2}{m-1} \sum_{i,j} \binom{m-1}{i} \binom{n-1}{j} / \binom{m+n-2}{i+j}$$



$$= \frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} \sum_{r=0}^{m+n-2} 1 = \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!(n-1)!} \quad (A9)$$

在三维情形, 同样可证受到平行于  $xy$  面的方格作用的, 由  $(0, 0, 0)$  到  $(l, m, n)$  的折线总数为

$$\frac{(l+m+n-1)!}{(l-1)!(m-1)!n!} \quad (A10)$$

对所有  $l+m+n=N$  的点求和, 得

$$\sum_{l+m+n=N} \frac{(l+m+n-1)!}{(l-1)!(m-1)!n!} = (N-1)3^{N-2}, \quad (A11)$$

再加上平行于  $yz$  和  $zx$  面的方格  $P$  的贡献, 即得

$$Z^{-1} \langle \varphi | H_2 | \varphi \rangle = -\frac{1}{ag^2} \frac{8}{Z} \sum \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (N-1) 3^{N-1} e^{-2\lambda N a} = -\frac{2}{ag^2} \frac{e^{-4\lambda a}}{1-3e^{-2\lambda a}}. \quad (A12)$$

### 参 考 文 献

- [1] K. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445;  
R. Balian, J. M. Drouffe, C. Itzykson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3374;  
*ibid.*, **D11**(1975), 2098, 2104.
- [2] H. Hamber, G. Parisi, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1792.  
E. Marinari, G. Parisi, C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1975.  
H. Hamber, E. Marinari, G. Parisi, C. Rebbi, Brookhaven preprint (1981).
- [3] T. Banks, S. Raby, L. Susskind, J. Kogut, D. Jones, P. Scharbach, D. Sinclair, *Phys. Rev.*, **D15**  
(1977), 1111; D. Jones, J. Kogut, D. Sinclair, *Z. Phys.*, **C3**(1979), 29.
- [4] L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 3031.
- [5] J. Shigemitsu, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 1709.
- [6] K. Wilson, Erice lecture notes (1975).
- [7] J. Greensite, J. Primack, *Nucl. Phys.*, **B180**(1981), 170;  
J. Blairon, R. Brout, F. Englert, J. Greensite, *Nucl. Phys.*, **B180**(1981), 439.
- [8] C. Becchi, S. Narison, E. de Rafael, F. Yudurain, *J. Phys.*, **C8**(1981), 335.
- [9] A. Hasenfratz, Z. Kunszt, P. Hasenfratz, C. B. Lang, CERN preprint TH. 3220 (1982).
- [10] J. Kogut, L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 395.
- [11] J. Kogut, R. Pearson, J. Shigemitsu, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 484; *Phys. Lett.*, **98B**(1981), 63.
- [12] J. Kogut, D. Sinclair, L. Susskind, *Nucl. Phys.*, **B114**(1976), 199.
- [13] B. Sakita, preprint CCNY-HEP-81/5.
- [14] Zheng Xi-te, Chung-I Tan, Chen Tian-lun, Brown Univ. preprint, HET-470.
- [15] L. Masperi, C. Omero, *Nucl. Phys.*, **B200**(1982), 121;  
T. Banks, A. Zaks, *Nucl. Phys.*, **B200**(1982), 391.

QUARK MASS RENORMALIZATION IN LATTICE GAUGE  
THEORY (I) STRONG COUPLING REGION  
AND CROSSOVER REGION

GUO SHUO-HONG    LIU JIN-MING    CHEN QI-ZHOU

*(Department of Physics, Zhongshan University)*

ABSTRACT

The light quark mass  $m(g)$  is renormalized by fixing the  $\rho$  meson mass.  $m(g)$  for  $g \geq 2$  is obtained by strong coupling expansion. Variational calculation extends  $m(g)$  to  $g \sim 1$ , which is already in the crossover region. The two methods agree in the strong coupling region. In the crossover region,  $m(g)$  drops quickly towards the weak coupling value.