第8卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 8, No. 4
1984年7月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1984

对称反常、非对称反常和有效拉氏量

周光召　郭汉英　吴　可
（中国科学院理论物理研究所）
宋　行　长
（北　京　大　学）

摘　　要

本文进一步讨论作者利用 Chern-Simons 拓扑不变量建立的主手征模型的有效拉氏量，指出非阿贝尔三角反常的对称形式和非对称形式都可以由此拉氏量得到。

最近 E. Witten[1] 通过拓扑性质讨论主手征模型的规范协变的拉氏量

$$\tilde{\Gamma}=\Gamma+\frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}Z_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{1}$$

其中

$$\Gamma=\frac{1}{240\pi^2}\int_a d\Sigma^{ijklm}\mathrm{T}_r(U^{-1}\partial_iUU^{-1}\partial_jUU^{-1}\partial_kUU^{-1}\partial_mUU^{-1}\partial_nU) \tag{2}$$

并用试探的方法定出了 $Z_{\mu\nu\alpha\beta}$ 的具体表达式．然后，本文作者改进了 Witten 的方法和结果，充分运用了 Chern-Simons 拓扑不变量，给出了求规范协变作用量的系统方法，并且得到了与 Witten 不同的结果[2,3]，

$$\hat{\Gamma}=\Gamma+\frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}W_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{3}$$

其中

$$\begin{aligned}W_{\mu\nu\alpha\beta}=\mathrm{Tr}\{&[-A_{\mu L}U_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L}+\partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}U_{\beta L}+A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}U_{\beta L}+(L\to R)]\\&+\partial_\mu A_{\nu L}UA_{\alpha R}U^{-1}U_{\beta L}+\partial_\mu A_{\nu R}U^{-1}A_{\alpha L}UU_{\beta R}\\&-\frac{1}{2}[A_{\mu L}U_{\nu L}A_{\alpha L}U_{\beta L}-(L\to R)]+A_{\mu L}UA_{\nu R}U^{-1}U_{\alpha L}U_{\beta L}\\&-UA_{\mu R}U^{-1}A_{\nu L}U_{\alpha L}U_{\beta L}-A_{\mu L}\partial_\alpha A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1}-\partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1}\\&+A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha R}U^{-1}A_{\beta L}U+\partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha R}U^{-1}A_{\beta L}U+A_{\mu L}UA_{\nu R}U^{-1}A_{\alpha L}U_{\beta L}\\&+A_{\mu R}U^{-1}A_{\nu L}UA_{\alpha R}U_{\beta R}+[A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}U_{\beta L}+(L\to R)]\\&-A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1}+A_{\mu R}A_{\nu R}A_{\alpha R}U^{-1}A_{\beta L}U-\frac{1}{2}A_{\mu L}UA_{\nu R}U^{-1}A_{\alpha L}UA_{\beta R}U^{-1}\}\end{aligned} \tag{4}$$

1983年11月19日收到.

$U_{\mu L}$ 和 $U_{\mu R}$ 的定义为

$$U_{\mu L}=\partial_\mu UU^{-1},\quad U_{\mu R}=U^{-1}\partial_\mu U$$

和 Witten 结果相比，项数比他的少．但两者之差是规范协变项[1)]

$$\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}Z_{\mu\nu\alpha\beta}-\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu R}U^{-1}F_{\alpha\beta L}U)$$
$$=\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}W_{\mu\nu\alpha\beta}\tag{5}$$

因此，这两个不同的拉氏量在无穷小规范变换下得到相同的非阿贝尔三角反常（下面简称反常），即

$$\delta\tilde{\Gamma}=\delta\hat{\Gamma}=\frac{1}{24\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\ \Big\{\varepsilon_L\Big[\partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L}+\frac{1}{2}\partial_\mu(A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L})\Big]-(L\to R)\Big\}\tag{6}$$

它等价于 D. J. Gross 和 R. Jackiw 在夸克水平上用微扰论计算得到的反常[4]．

大家知道，先于 Gross 等，W. A. Bardeen 曾给过一个结果，他为了在矢量流上得到通常的 Ward 等式，引进抵削项，把反常移到轴矢流上，此时反常项表示为[5]

$$\int d^4x\varepsilon^aG^a\tag{7}$$

其中

$$G^a=\frac{1}{4\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{\lambda^a}{2}\Big[\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}+\frac{1}{12}A_{\mu\nu}A_{\alpha\beta}+\frac{2}{3}(A_\mu A_\nu V_{\alpha\beta}+A_\mu V_{\nu\alpha}A_\beta+V_{\mu\nu}A_\alpha A_\beta)+\frac{8}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta\Big]\Big\}\tag{8}$$

$V_{\mu\nu}$ 和 $A_{\mu\nu}$ 的定义为

$$\begin{aligned}V_{\mu\nu}&=\partial_\mu V_\nu-\partial_\nu V_\mu-[V_\mu,V_\nu]-[A_\mu,A_\nu]\\A_{\mu\nu}&=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu-[V_\mu A_\nu]-[A_\mu V_\nu]\end{aligned}\tag{9}$$

A_μ、V_μ 和上文 $A_{\mu L}$、$A_{\mu R}$ 的关系为

$$A_\mu=-\frac{1}{2}(A_{\mu L}-A_{\mu R})\qquad V_\mu=-\frac{1}{2}(A_{\mu L}+A_{\mu R})\tag{10}$$

于是，在讨论反常时通常有两个不同的表达形式，Gross-Jackiw 形式和 Bardeen 形式，为方便起见我们分别称之为反常的对称形式和非对称形式．

由反常方程出发得到的有效拉氏量应该包含所有通过反常而产生的手征场（Π 场和 K 场）和规范场的相互作用，在取一个 Π（或 K）的顶点时，它应和非对称的反常耦合．这个重要特征可以通过手征变换对于有效拉氏量的变更显示出来．

J. Wess 和 B. Zumino 正是基于这一点在讨论反常的相容性条件的同时，给出了 Wess-Zumino 的有效拉氏量[6]

$$W=\frac{1-\exp(-\xi\cdot U)}{\xi\cdot U}(\xi\cdot G)\tag{11}$$

1）此处所指的 Witten 表达式 $Z_{\mu\nu\alpha\beta}$ 是改正了他的明显笔误和补充了遗漏项之后得到的表达式[3]．

其中

$$\xi^a = \frac{1}{F_\Pi}\Pi^a,$$

U 是算子,它的定义可参阅[6]. 显然W可写成

$$W = \Pi^a G^a + O(\Pi^2) \tag{12}$$

G^a 就是非对称的反常项.

现在的问题是，我们得到的有效拉氏量 $\hat{\Gamma}$ 和 Witten 得到的有效拉氏量 $\tilde{\Gamma}$ 是否也具有这个性质?

为了分析 $\hat{\Gamma}$ 的性质,我们可以按照

$$U = e^{\Pi^a\lambda^a} = 1 + \Pi^a\lambda^a + \cdots \tag{13}$$

来展开 $\hat{\Gamma}$,

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_0 + \Pi^a\hat{\Gamma}_1^a + O(\Pi^2) \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_0 = \frac{1}{48\Pi^2}\int dx^4 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\Big(&- A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta R} - \partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta R}\\ &+ A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta L} + \partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta L} - A_{\alpha L}A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta R}\\ &+ A_{\mu R}A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta L} - \frac{1}{2}A_{\mu L}A_{\nu R}A_{\alpha L}A_{\beta R}\Big)\end{aligned} \tag{15}$$

以及

$$\begin{aligned}\Pi^a\hat{\Gamma}_1^a = \frac{1}{48\Pi^2}\int dx^4\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\{\Pi^a\lambda^a[&2\partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L} + 2\partial_\mu A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta R}\\ &+ \partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta R} + \partial_\mu A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta L} - \partial_\mu(A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L})\\ &- \partial_\mu(A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta R}) - \partial_\mu(A_{\nu L}A_{\alpha R}A_{\beta L}) - \partial_\mu(A_{\nu R}A_{\alpha L}A_{\beta R})\\ &- A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta R} - A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta R} - A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta L}\\ &- A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta L} - \partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta R} - \partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta L}\\ &- A_{\mu R}A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L} - A_{\mu L}A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta R}\\ &+ A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta R} + A_{\mu R}A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L} + A_{\mu L}A_{\nu R}A_{\alpha L}A_{\beta R}\\ &+ A_{\mu R}A_{\nu L}A_{\alpha R}A_{\beta L} + A_{\mu L}A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta R} + A_{\mu R}A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta L}]\}\end{aligned} \tag{16}$$

直接计算可以证明 $\hat{\Gamma}_1^a$ 就是非对称的反常 G^a,在此我们仅给出具体计算的几个主要步骤.

将(9)式代入(8)式可得

$$\begin{aligned}\Pi^a G^a = \frac{1}{8\Pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\Big\{\Pi^a\lambda^a\Big[&\partial_\mu V_\nu\partial_\alpha V_\beta + \frac{1}{3}\partial_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\beta\\ &- \partial_\mu V_\nu V_\alpha V_\beta - \frac{1}{3}\partial_\mu A_\nu V_\alpha A_\beta - \frac{1}{3}\partial_\mu A_\nu A_\alpha V_\beta + \frac{1}{3}\partial_\mu V_\nu A_\alpha A_\beta\\ &+ \frac{4}{3}A_\mu\partial_\nu V_\alpha A_\beta + \frac{1}{3}A_\mu A_\nu\partial_\alpha V_\beta - \frac{1}{3}V_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\beta\\ &- V_\mu V_\nu\partial_\alpha V_\beta - \frac{1}{3}A_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\beta + V_\mu V_\nu V_\alpha V_\beta + \frac{1}{3}V_\mu A_\nu V_\alpha A_\beta\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{3}A_\mu V_\nu A_\alpha V_\beta+\frac{1}{3}V_\mu A_\nu A_\alpha V_\beta-A_\mu V_\nu V_\alpha A_\beta$$

$$-\frac{1}{3}A_\mu A_\nu V_\alpha V_\beta-\frac{1}{3}V_\mu V_\nu A_\alpha A_\beta-\frac{1}{3}A_\mu A_\nu A_\alpha A_\beta\Big]\Big\} \tag{17}$$

再将 $A_\mu\ V_\mu$ 和 $A_{\mu L}$, $A_{\mu R}$ 的关系式 (10) 代入 (17) 式，其结果为

$$\begin{aligned}\Pi^a G^a=\frac{1}{48\Pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\{\Pi^a\lambda^a[&2\partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L}+2\partial_\mu A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta R}\\&+\partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta R}+\partial_\mu A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta L}\\&-A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta L}+A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta R}-A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta L}+A_{\mu L}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta R}\\&+A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta L}-A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha L}A_{\beta R}+A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta L}-A_{\mu R}\partial_\nu A_{\alpha R}A_{\beta R}\\&+\partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L}+\partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta R}+\partial_\mu A_{\nu L}A_{\alpha R}A_{\beta L}+\partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha L}A_{\beta R}\\&+\partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta L}+\partial_\mu A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta R}+A_{\mu L}A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L}+A_{\mu L}A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta L}\\&+A_{\mu R}A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L}+A_{\mu L}A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta R}+A_{\mu R}A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L}+A_{\mu R}A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta R}\\&+A_{\mu L}A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta R}+A_{\mu R}A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L}+A_{\mu L}A_{\nu R}A_{\alpha L}A_{\beta R}\\&+A_{\mu R}A_{\nu L}A_{\alpha R}A_{\beta L}+A_{\mu L}A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta R}+A_{\mu R}A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta L}]\}\end{aligned} \tag{18}$$

写成积分形式可知 $\hat{\Gamma}_1^a$ 就是非对称的反常 G^a.

而 Witten 的结果由于多了一些项，展开后

$$\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}_0+\Pi^a\tilde{\Gamma}_1^a+O(\Pi^2) \tag{19}$$

其中

$$\tilde{\Gamma}_0=\hat{\Gamma}_0+\frac{1}{48\Pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu L}F_{\alpha\beta R}) \tag{20}$$

$$\Pi^a\tilde{\Gamma}_1^a=\Pi^a\hat{\Gamma}_1^a+\frac{1}{48\Pi^2}\int dx^4\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\{\Pi^a\lambda^a[-F_{\mu\nu L}F_{\alpha\beta R}+F_{\mu\nu R}F_{\alpha\beta L}]\} \tag{21}$$

因而就不具有上述性质．这是 $\hat{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}$ 的区别．

另外，$\hat{\Gamma}$ 和 W-Z 的结果 W(本文(11)式)相比，虽然 Π 场的一阶项相同，但 0 阶项不同

$$W(\Pi=0)=0 \tag{22}$$

$$\hat{\Gamma}(\Pi=0)=\hat{\Gamma}_0 \tag{23}$$

应该指出 $\hat{\Gamma}_0$ 中被积函数(也记为 $\hat{\Gamma}_0$)有如下性质

$$d\left.\frac{\delta\hat{\Gamma}_0}{\delta A_L^a}\right|_{AL=0}=-\frac{1}{48\pi^2}\mathrm{Tr}\lambda^a[2\partial_\mu A_{\nu R}\partial_\alpha A_{\beta R}+\partial_\mu(A_{\nu R}A_{\alpha R}A_{\beta R})] \tag{24}$$

$$d\left.\frac{\delta\hat{\Gamma}_0}{\delta A_R^a}\right|_{AR=0}=\frac{1}{48\pi^2}\mathrm{Tr}\lambda^a[2\partial_\mu A_{\nu L}\partial_\alpha A_{\beta L}+\partial_\mu(A_{\nu L}A_{\alpha L}A_{\beta L})] \tag{25}$$

两式的右端正好是反常的对称形式．

最后的结论是，本文作者在文[2,3]中给出的有效拉氏量，即本文(3)式 $\hat{\Gamma}$，它包含了所有与反常有关的性质，既含有对称反常，又含有非对称反常，而且它所表示的 Π 场和规范场的相互作用也是正确的．

参 考 文 献

[1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223** (1983), 422.

[2] K. C. Chou, H. Y. Guo, K. Wu, X. C. Song, *Phys. Lett.*, **134**B (1984), 67; 周光召,郭汉英,吴可,宋行长,高能物理与核物理, **8**(1984), 252。

[3] K. C. Chou, H. Y. Guo, K. Wu, X. C. Song, "On Witten's effective Lagrangian of chiral field" Preprint AS-ITP-83-032 to be published in Commun. in Theor. Phys. (Beijing).

[4] D. J. Gross, R. Jackiw, *Phys. Rev.*, **D6** (1972), 477.

[5] W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, **184** (1969), 1848.

[6] J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.*, **37B** (1971), 95.

SYMMETRICAL ANOMALY, UNSYMMETRICAL ANOMALY AND EFFECTIVE LAGRANGIAN

CHOU KUANG-CHAO GUO HAN-YING WU KE

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

SONG XING-CHANG

(Peking University, Beijing, China)

ABSTRACT

Both the symmetrical anomaly and the unsymmetrical anomaly are derived from an effective Lagrangian recently constructed on the basis of Chern-Simons topological invariants.