

关于壳模型和生成坐标方法在 j^3 系统的解

傅德基 夏克定 潘为平
(中国科学院上海市原子核研究所)

摘 要

本文分别从壳模型和生成坐标方法(GCM)出发给出了 j^3 体系的解。GCM 在同时考虑了所有可能的费米子和玻色子收缩后能够得出与壳模型完全一致的严格解。因此有理由预期在处理核内玻色和费米自由度之间的耦合时, GCM 是一种有效的微观方法。

一、引 言

生成坐标方法(GCM)提供了由原子核多费米子系统构成玻色型集体激发及它与费米子耦合以描述低能核谱的途径^[1,2]。GCM 能否在探索 IBM 的微观基础方面起到应有的作用是令人感兴趣的问题^[3]。本文试图由一个侧面: 即壳模型能有严格解的 j^3 系统, 采用 GCM 处理时, 后者能否给出和壳模型严格解等价的解? 分析 GCM 的特点, 提供一些处理玻色子和费米子相互作用(耦合)的知识。关于 j^4 系统问题, 我们拟另文叙述^[7]。

我们采取的原始哈密顿量为:

$$H = \sum_m \epsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} Z_\lambda [a_j^\dagger a_j^\dagger]_{\lambda\mu} [a_j a_j]_{\lambda\mu}, \quad (1)$$

其中 ϵ_j 、 a_{jm}^\dagger 、 a_{jm} 系单粒子能量、单粒子产生算符和湮没算符。

$$Z_\lambda = -\langle j^2; \lambda | v | j^2; \lambda \rangle = G_\lambda Q \quad (2)$$

$$[a_j^\dagger a_j^\dagger]_{\lambda\mu} = \sum_{m_1 m_2} C_{j m_1 j m_2}^{\lambda\mu} a_{j m_1}^\dagger a_{j m_2}^\dagger,$$

Z_λ 代表两体核力对于耦合成角动量为 λ 的两粒子组态的矩阵元。

$$Q = \frac{1}{2} (2j + 1).$$

其它符号与通常文献上一致。

二、壳模型对于 j^3 系统的严格解

若令三个处于单 j 壳上的粒子耦合成总角动量 I 的波函数为 $|j^3; I\rangle$, 则 $I=j, j \leq 7/2$

时,按 [6] 的壳模型亲态比系数技巧可求得能谱公式如下:

$$\begin{aligned} \langle j^3; I = j | H | j^3; I = j \rangle &= 3\epsilon_j + \frac{Q-1}{Q} \langle j^2; 0 | v | j^2; 0 \rangle \\ &+ \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{\lambda > 0} (2\lambda + 1) \langle j^2; \lambda | v | j^2; \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

当 $j > 7/2$ 时,由于 $|j^3; I = j\rangle$ 态可以不止一个,必须引入先辈数 ν 来区分:

$$|j^3, \nu = 1; I = j\rangle$$

及 $|j^3, \nu = 3; I = j\rangle$. 因此对于两体核力矩阵元可有:

$$\langle j^3 \nu IM | v | j^3 \nu' IM \rangle = 3 \sum_{J_1} [j^3 \nu \{ |j^2(J_1) j I \} | j^2(J_1) j I \} j^3 \nu' \{ |j^2(J_1) \nu | j^2(J_1) \nu \}], \quad (4)$$

$$[j^3, \nu = 1 \{ |j^2(0) j; I = j \}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{Q-1}{Q}}$$

$$[j^3, \nu = 1 \{ |j^2(2) j; I = j \}] = -\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{Q(Q-1)}}, \quad (5)$$

$$[j^3, \nu = 3 \{ |j^2(2) j; I = j \}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{5}{Q(Q-1)} + 10 \left\{ \begin{matrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{matrix} \right\} \right]^{1/2}, \quad (6)$$

若以 $|1\rangle \equiv |j^3, \nu = 1; j\rangle$, $|2\rangle \equiv |j^3, \nu = 3; j\rangle$, 则求能谱的行列式为:

$$\begin{vmatrix} E - \langle 1 | H | 1 \rangle & -\langle 1 | H | 2 \rangle \\ -\langle 2 | H | 1 \rangle & E - \langle 2 | H | 2 \rangle \end{vmatrix} = 0,$$

此处我们仅考虑 $J_1 = 0, 2$.

化开即得

$$\begin{aligned} [E - 3\epsilon_j + (Q-1)G_0] \left[E - 3\epsilon_j + \left(1 + 10 \left\{ \begin{matrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{matrix} \right\} \right) G_2 Q \right] \\ - 5G_0 G_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

这里不必求出 E 的值,只须由底下作出 GCM 和 NFT 的相应方程来比较就可以了.

三、GCM 对于 j^3 系统的解

在 GCM 作法中,关键在于取定生成元算符 $A_{\lambda\mu}^+$:

$$A_{\lambda\mu}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_j^+ a_j^+]_{\lambda\mu}; \quad A_{\lambda\mu} = \frac{-1}{\sqrt{2}} [a_j a_j]_{\lambda\mu} \quad (8)$$

在单 j 壳下,用通常的 Tamm-Dancoff 处理证明:

$$[H, A_{\lambda\mu}^+]_- = E(\lambda) A_{\lambda\mu}^+, \quad (9)$$

$$E(\lambda) = 2\epsilon_j - Z_\lambda \quad (10)$$

以生成元 $A_{\lambda\mu}^+$ 和生成坐标 $\alpha_{\lambda\mu}$, 可生成所需求的子空间 $|\Phi(\alpha)\rangle$:

$$|\Phi(\alpha)\rangle = \iint \cdots \int \prod_{\lambda\mu} d\alpha_{\lambda\mu(R)} d\alpha_{\lambda\mu(I)} e^{i \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^+} f(\alpha, \alpha^+) |0\rangle, \quad (11)$$

其中 $|0\rangle$ 是真空态,

$$A_{\lambda\mu}f(\alpha, a^+)|0\rangle = 0$$

使多余自由度不出现得到保证. $\alpha_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{\lambda\mu(R)} + i\alpha_{\lambda\mu(I)})$.

在子空间 $|\Phi(\alpha)\rangle$ 中求解薛丁格方程: 泛函 $I(f)$,

$$I[f] = \langle \Phi(\alpha') | (H - E) | \Phi(\alpha) \rangle, \quad (12)$$

E 为能量值, H 即(1)式的哈密顿量. 将(12)中算符 $e^{-i \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}} (H - E) e^{i \sum_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^\dagger}$, 按场论方法中维克定理(Wick's Law)写为正常积. 作收缩时, 用上收缩 $\overline{A_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^\dagger} = 1$, 这相应于一对费米子线收缩圈, 然后仿照文献[2]中第二节所叙路线推算下去, 运用 $I[f]$ 的

$$\langle 0 | f^+(\alpha; a^+) \rangle$$

变分, 再作变换:

$$b_{\lambda\mu}^+ \equiv \bar{\alpha}_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha_{\lambda\mu}}; \quad b_{\lambda\mu} \equiv \alpha_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}_{\lambda\mu}} \quad (13)$$

$$[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda'\mu'}^+]_- = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}$$

并求得

$$\hat{\mathcal{N}} \equiv W \left\{ e^{-i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}^+ A_{\lambda\mu}} e^{i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^\dagger} \right\}, \quad (14)$$

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv W \left\{ e^{-i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}^+ A_{\lambda\mu}} H e^{i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^\dagger} \right\}, \quad (15)$$

$$(\hat{\mathcal{N}}^{-1/2} \hat{\mathcal{H}} \hat{\mathcal{N}}^{-1/2} - E) F | 0 \rangle = 0, \quad (16)$$

其中 $W\{\}$ 表示按维克定理写出表达式, 但不包括 $\overline{A_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^\dagger}$ 直接收缩的那些项目. (15) 式是等效薛丁格方程. $\bar{\alpha}_{\lambda\mu}$ 系 $\alpha_{\lambda\mu}$ 的复共轭. 在(15)式中, $\hat{\mathcal{H}}$ 相应的弗曼图可区分为与 H 相连接的不可约图形项 $\hat{\mathcal{H}}_L$ 及有与 H 不相连的图形项.

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_L &= W \left\{ e^{-i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}^+ A_{\lambda\mu}} H e^{i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}^\dagger} \right\}_{\text{与}H\text{相连接的不可约部分}} \\ &= \hat{\mathcal{H}}_p + \hat{\mathcal{H}}_{\text{coll}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{coup}} \end{aligned} \quad (17)$$

单粒子项:

$$\hat{\mathcal{H}}_p = \sum_m \epsilon_j a_{jm}^+ a_{jm}, \quad (18)$$

集体项:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{coll}} = \sum_{\lambda\mu} (2\epsilon_j - Z_\lambda) b_{\lambda\mu}^+ b_{\lambda\mu}, \quad (19)$$

耦合项:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{coup}} &= \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ IM}} [2(Z_{\lambda_1} + Z_{\lambda_2}) - 6\epsilon_j] \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 W(j\lambda_1 \lambda_2 j; jI) [b_{\lambda_1}^+ a_j^+]_{IM} [b_{\lambda_2} a_j]_{IM} \\ &\quad - 4 \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ IM}} Z_\lambda (2\lambda + 1) \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 W(j\lambda \lambda_2 j; jI) W(j\lambda_1 \lambda j; jI) [b_{\lambda_1}^+ a_j^+]_{IM} [b_{\lambda_2} a_j]_{IM}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\hat{\lambda} \equiv \sqrt{2\lambda + 1}$, $W(\)$ 是拉卡系数. (19) 式相应的图形如下:

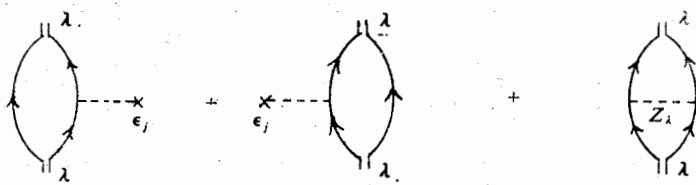


图 1

⑳式相应的图形则有：(与公式中各项次序对应)

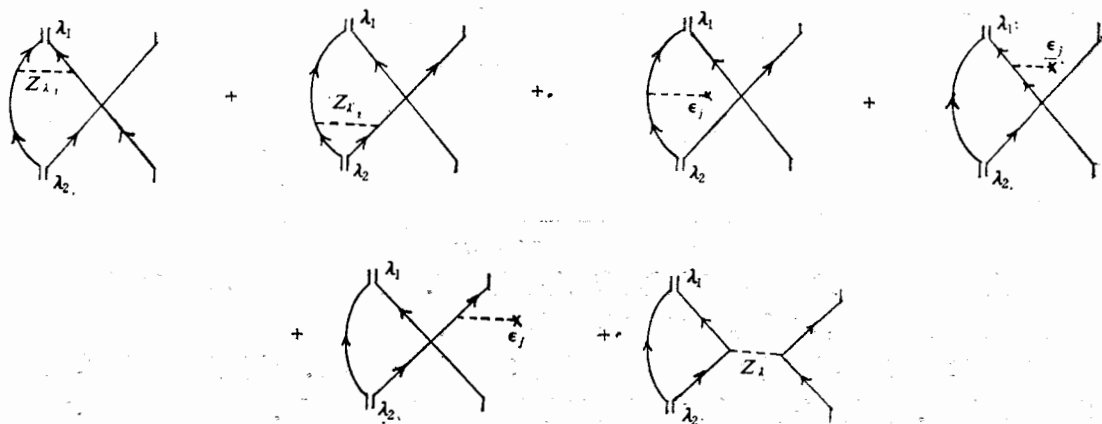


图 2

在求 $\hat{N}^{-1/2} \mathcal{E} \hat{N}^{-1/2}$ 等效哈密顿量时^[4], 必须由(14)作出相应于所求问题的 $\hat{N} = \hat{I} + \hat{U}$, \hat{I} 是单位算符. 在这里 (j^3 系统):

$$\hat{U} = \text{Diagram} = -2 \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ IM}} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 W(j \lambda_1 \lambda_2 j; j j) [b_{\lambda_1}^+ a_j^+]_{IM} [b_{\lambda_2} a_j]_{IM} \quad (21)$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时,

$$\hat{U} = \hat{U}_0 = -\frac{1}{Q} \sum_m b_0^+ b_0 a_{jm}^+ a_{jm} \quad (22)$$

对于 $j \leq 7/2$, 仅考虑 $|[b_0^+ a_{jm}^+]_{im}\rangle$ 组态就足够了. (理由见后面结语部分).

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_L \rangle_0 &= \langle [b_0^+ a_j^+]_{im} | \mathcal{E}_L | [b_0^+ a_j^+]_{im} \rangle \\ &= (3\epsilon_j - Z_0) - \frac{3\epsilon_j}{Q} + \frac{2Z_0}{Q} - \frac{1}{Q^2} \sum_{\lambda} (2\lambda + 1) Z_{\lambda} \end{aligned}$$

$$= 3\epsilon_j \left(1 - \frac{1}{Q}\right) - Z_0 \left(1 - \frac{2}{Q} + \frac{1}{Q^2}\right) - \frac{1}{Q^2} \sum_{\lambda > 0} (2\lambda + 1) Z_\lambda \quad (23)$$

显然, 当 $\hat{N}^{-1}\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}\hat{N}^{-1}$ 时, 求 $\hat{N}^{-1/2}\hat{\mathcal{H}}\hat{N}^{-1/2}$ 的问题可等价于求 $\hat{N}^{-1}\hat{\mathcal{H}}$ 的问题. 这在 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 条件下的 $\hat{\mathcal{H}}_L$ 和 \hat{U}_0 是满足的. 按 [4], 求 $\hat{N}^{-1}\hat{\mathcal{H}}$ 可由下列的叠代方程进行: (以 $\overline{\hat{\mathcal{H}}_L}$ 表示 $\hat{\mathcal{H}}_L$ 的收缩, 包括 b^+b 及 a^+a 按 Wick 定理安排, 并且仅包含和 $\hat{\mathcal{H}}_L$ 相连的收缩)

$$\begin{aligned} (\hat{N}^{-1}\hat{\mathcal{H}}) &= \hat{\mathcal{H}}_L - \overline{(\hat{N} - \hat{I})(\hat{N}^{-1}\hat{\mathcal{H}})} = \hat{\mathcal{H}}_L - \overline{(\hat{N} - \hat{I})\hat{\mathcal{H}}_L} \\ &\quad + \overline{(\hat{N} - \hat{I})(\hat{N} - \hat{I})\hat{\mathcal{H}}_L} + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

在矩阵表示之下, 目前情况下变为一阶矩阵, 很易求得:

$$\begin{aligned} \hat{N}^{-1/2}\hat{\mathcal{H}}\hat{N}^{-1/2} &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{Q}}\right)\hat{\mathcal{H}}_L \\ \langle \hat{N}^{-1/2}\hat{\mathcal{H}}\hat{N}^{-1/2} \rangle_0 &= \left(\frac{1}{1 - 1/Q}\right)\langle \hat{\mathcal{H}}_L \rangle_0 \\ &= 3\epsilon_j - Z_0 \frac{Q-1}{Q} - \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{\lambda > 0} (2\lambda + 1) Z_\lambda \end{aligned} \quad (25)$$

由(25)式可见, 按(2)式定义, (25)式与(3)式完全相等. 值得注意的是, GCM 中与 ϵ_j 有关的项既存在于 \mathcal{H}_{par} 与 $\mathcal{H}_{\text{coll}}$ 中也存在于 $\mathcal{H}_{\text{coup}}$ 中.

对于 $j > 7/2$ 时, 令 $|1\rangle \equiv |[b_0^+, a_j^+]_{jm}\rangle$ 及 $|2\rangle \equiv |[b_2^+ a_j^+]_{jm}\rangle$. 为什么取两个态, 理由见附录部份. 相应于(4)(5)(6)式, 这时仅考虑 Z_0 及 Z_2 就足够了.

$$\begin{aligned} H_{11} &= \langle 1 | \hat{\mathcal{H}}_L | 1 \rangle = \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \epsilon_j - \left(1 - \frac{1}{Q}\right)^2 Z_0 - \frac{5}{Q^2} Z_2 \\ H_{22} &= \langle 2 | \hat{\mathcal{H}}_L | 2 \rangle = \left[1 + 10 \left\{ \begin{matrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{matrix} \right\}\right] 3\epsilon_j - \frac{5}{Q^2} Z_0 \\ &\quad - \left[1 + 10 \left\{ \begin{matrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{matrix} \right\}\right]^2 Z_2 \\ H_{12} = H_{21} &= -\frac{3}{Q} \sqrt{5} \epsilon_j + \frac{\sqrt{5}}{Q} \left(1 - \frac{1}{Q}\right) Z_0 \\ &\quad + \frac{\sqrt{5}}{Q} \left[1 + 10 \left\{ \begin{matrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{matrix} \right\}\right] Z_2 \end{aligned} \quad (25A)$$

$$\begin{aligned} N_{11} &= \langle 1 | \hat{N} | 1 \rangle = 1 - 1/Q \\ N_{22} &= \langle 2 | \hat{N} | 2 \rangle = 1 + 10 \left\{ \begin{matrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{matrix} \right\} \\ N_{12} = N_{21} &= -\frac{\sqrt{5}}{Q} \end{aligned}$$

由于等效薛丁谔方程(16)式可与下面方程等价:

$$\{\hat{\mathcal{H}} - E\hat{N}\}f|0\rangle = 0$$

因此求能谱时,可求以下行列式:

$$\begin{vmatrix} H_{11} - EN_{11} & H_{12} - EN_{12} \\ H_{21} - EN_{21} & H_{22} - EN_{22} \end{vmatrix} = 0$$

将之乘开,归并之后,以 $Z_0 = G_0 Q$, $Z_2 = G_2 Q$ 代入可得:

$$\begin{aligned} [E - 3\epsilon_j + (\Omega - 1)G_0] \left[E - 3\epsilon_j + \left(1 + 10 \begin{Bmatrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{Bmatrix} \right) G_2 Q \right] \\ - 5G_0 G_2 = 0 \end{aligned}$$

因此获得与(7)式完全相同的结果.

四、BMSV 理论对于 j^3 系统的解

在此,我们把文献[4][5]统称为 BMSV 理论. 该文献的作者们借鉴了四极声子模型和相互作用玻色子模型的成就,在核场论框架的基础上提出若干规则或经验法则,试图建立一个仅包含核力参数的处理复杂核(偶偶核或奇 A 核)能谱的理论.

本节沿用文献[5]的作法,由(1)式 H 出发,仅考虑 $\lambda = 0$ 及 $\lambda = 2$, 即相应于 s 玻色子及 d 玻色子可得 BMSV 的等效哈密顿量为:

$$\begin{aligned} H_{\text{BMSV}} &= H_{\text{bose}} + H_{\text{bose-fermi}} \\ H_{\text{bose}} &= \omega_s s^+ s + \omega_d d^+ d \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{bose-fermi}} &= \sum_m \epsilon_j a_{jm}^+ a_{jm} + f_1 \sum_m [S^+ a_j^+]_{jm} [s a_j]_{jm} \\ &+ \left[f_2 \sum_m [d^+ a_j^+]_{jm} [s a_j]_{jm} + \text{H.C.} \right] \\ &+ \left[\sum_m f_3(\lambda) [d^+ a_j^+]_{jm} [d a_j]_{jm} \right] \end{aligned} \quad (27)$$

$$\omega_s = 2\epsilon_j - Z_0$$

$$\omega_d = 2\epsilon_j - Z_2$$

$$f_1 = \frac{1}{\Omega} Z_0$$

$$f_2 = \frac{2\sqrt{5}}{\Omega} \left(\frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2} \right) \left(\frac{\Omega - n - \hat{n}_d - 1}{\Omega - 2\hat{n}_d - 1} \right)^{1/2}$$

$$f_3 = -10 \begin{Bmatrix} 2 & j & j \\ 2 & \lambda & j \end{Bmatrix} \cdot Z_2 \left[\frac{(\Omega' - \hat{n}_s)^2}{\Omega'^2} + \frac{\hat{n}_s^2}{\Omega'^2} \right]$$

其中 n 为总玻色子数, \hat{n}_d 是 d 玻色子数, n_s 是 s 玻色子数,

$$\Omega = \frac{1}{2} (2j + 1), \quad \Omega' = \Omega - 2n_d - 1.$$

这都是为了在多玻色子组态下,考虑阻塞效应引入的^[5].

对于 $| (1) \rangle \equiv |[s^+ a_j^+]_{jm} \rangle$ 及 $| (2) \rangle \equiv |[d^+ a_j^+]_{jm} \rangle$ 来说:

$$\langle (1) | H_{\text{BMSV}} | (1) \rangle = \omega_s + \epsilon_j + \frac{1}{\Omega} Z_0 = 3\epsilon_j - Z_0 \left(1 - \frac{1}{\Omega} \right)$$

$$\begin{aligned} \langle(1)|H_{\text{BMSV}}|(2)\rangle &= \frac{2\sqrt{5}}{Q} \left(\frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2} \right) \cdot \left(\frac{Q-1-1-1}{Q-2-1} \right)^{1/2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{Q} \left(\frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle(2)|H_{\text{BMSV}}|(2)\rangle &= \omega_d + \epsilon_j + \left[-10 \begin{Bmatrix} 2 & j & j \\ 2 & j & j \end{Bmatrix} Z_2 \left[\frac{(Q-3-0)^2}{(Q-3)^2} + \frac{0}{Q^2} \right] \right] \\ &= \omega_d + \epsilon_j - 10 \begin{Bmatrix} 2 & j & j \\ 2 & j & j \end{Bmatrix} Z_2 = 3\epsilon_j - Z_2 \left[1 + 10 \begin{Bmatrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{Bmatrix} \right] \end{aligned}$$

有了以上矩阵元数值,解能谱方程:

$$\begin{vmatrix} E - \langle(1)|H_{\text{BMSV}}|(1)\rangle & -\langle(1)|H_{\text{BMSV}}|(2)\rangle \\ -\langle(2)|H_{\text{BMSV}}|(1)\rangle & E - \langle(2)|H_{\text{BMSV}}|(2)\rangle \end{vmatrix} = 0$$

化开可得

$$\begin{aligned} \left[E - 3\epsilon_j + Z_0 \left(1 - \frac{1}{Q} \right) \right] \left[E - 3\epsilon_j + Z_2 \left[1 + 10 \begin{Bmatrix} j & j & 2 \\ j & j & 2 \end{Bmatrix} \right] \right] \\ - \frac{20}{Q^2} \left(\frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2} \right)^2 = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

将(28)式与(7)式相比较:可见除非 $2G_0 G_2 = G_0 + G_2$, (28)式不会与(7)式相等,亦即 BMSV 与 GCM 不同,它不能得出与壳模型严格解相等的解。

审查起来,症结在于^{[3][5]} BMSV 作出 $H_{\text{bose-feimi}}$ 项时,对于含 f_2 的项取了不适当的能量分母值处理!比如核场论中的下面图形

$$= \frac{\sqrt{5}}{Q} Z_0 Z_2 \cdot \frac{1}{\text{DEN}}$$

图 3

按[3][5]的作法,取 $\text{DEN} = \frac{1}{\frac{1}{2}[(\omega_d - 2\epsilon_j) + (\omega_s - 2\epsilon_j)]}$,即取初末态的平均,这是

违反 Raileigh-Schrodinger 微扰论法则的,因而出现与严格解的差错是必然的。至于核场论严格求得 j^3 体系的解和壳模型所得相同,已由文献[6]给出。

五、讨论及结语

本文给出了 j^3 系统的 GCM 解,它与壳模型严格解完全相同。同时还列举了 BMSV 的解,目的想说明其不足之处。

GCM 解法还自然地解决了过完备的问题. 关于这一点, 在本文第三节中推算 $j \leq 7/2$, j^3 耦合成 $I = j$ 的状态数按严格壳模型理论只有一个的事例中可以反映出来. 用 GCM 作此事例时, 假若取多于一个组态来构成 N 的多维(阶)矩阵, 则很容易证明 N 必然会有零本征值的本征解, 因而 N 无法求逆, 也就无法求得(24)或(25)的等效哈密顿量. 具体计算时, N 具有零本征值反映在相应于 N 的行列式 $\det N = 0$. 这一点可与核场论中所谓假态去除规则相类比. 在 GCM 中, 剔除假态或称非物理态却是自然地包含在推导等效哈密顿量的步骤里.

附 录

为了使正文中(23)式、(25)式及(52A)式的推算及所取组态更有根据, 对表述上省略之处作些补充. 我们由正文中(16)式开始作些讨论: 由[4]可知,

$$(\mathcal{E} - E\mathcal{N})F|0\rangle = 0 \quad (A.1)$$

$$F|0\rangle \equiv \exp\left[\frac{1}{2} \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}_{\lambda\mu} \partial \alpha_{\lambda\mu}}\right] \exp\left[\sum_{\lambda\mu} \bar{\alpha}_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\mu}\right] f(\alpha, \alpha^\dagger)|0\rangle \quad (A.2)$$

对于粒子数算符 $\sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm}$ 可有,

$$\mathcal{A} = W \left\{ e^{-i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}^\dagger A_{\lambda\mu}^+} \sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm} e^{i \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} A_{\lambda\mu}} \right\} \quad (A.3)$$

$$(\mathcal{A} - n\mathcal{N})F|0\rangle = 0 \quad (A.4)$$

$$(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{A} - n)F|0\rangle = 0 \quad (A.5)$$

按[4]求 $\mathcal{N}^{-1}\mathcal{A}$ 可由与(24)式类似叠代方程进行,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{-1}\mathcal{A} &= \mathcal{A}_L - (\mathcal{N} - I)^{-1}(\mathcal{N}^{-1}\mathcal{A}) = \mathcal{A}_L - (\mathcal{N} - I)^{-1} \mathcal{A}_L \\ &\quad + (\mathcal{N} - I)^{-1}(\mathcal{N} - I)\mathcal{A}_L - \dots \end{aligned} \quad (A.6)$$

其中 \mathcal{A}_L 即(A.3)中与 $\sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm}$ 相连接的不可约部分, 可见 \mathcal{A}_L 与 \mathcal{E}_L 是含义类似的量. 可以严格求得:

$$\mathcal{N}^{-1}\mathcal{A} = 2 \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}^\dagger b_{\lambda\mu} + \sum_m a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad (A.7)$$

代入(A.5)求得 $n = 3$, $I = j$ 的本征解为 $[[b_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger]_{jm}]$. 对于 $j \leq 7/2$, 由于 $\mathcal{N} \equiv I + \hat{U}$, \hat{U} 见(21)式,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} | [b_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger]_{jm} \rangle &= \left\{ 1 - 2 \sum_{\substack{\lambda_1 \lambda_2 \\ IM}} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 W(j\lambda_1 \lambda_2 j; ij) [b_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_1}^\dagger]_{IM} [b_{\lambda_2} a_{\lambda_2}]_{IM} \right\} | [b_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger]_{jm} \rangle \\ &= [1 - 2(2\lambda + 1)W(j\lambda \lambda j; ij)] | [b_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger]_{jm} \rangle \\ &\quad - 2 \sum_{\lambda_1 (\neq \lambda)} \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 W(j\lambda_1 \lambda_2 j; ij) | [b_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_1}^\dagger]_{jm} \rangle \end{aligned} \quad (A.8)$$

上式中, \mathcal{N} 中无贡献的项目在 $\{ \}$ 内未列出. 可见以(A.8)式作出 \mathcal{N} 的矩阵表示维数取决于所取组态 $| [b_\lambda^\dagger a_\lambda^\dagger]_{jm} \rangle$ 个数. (λ 可为 $0, 2, 4, \dots, 2j - 1$). 当 $j \leq 7/2$ 时, $n = 3$, $I = j$ 的矩阵维数不可能大于 1, 这点可由具体算出 \mathcal{N} 的矩阵表示相应的行列式皆为零看出. 举例来说: (15A)式中的 $N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22}$ 构成 \mathcal{N} 的两维矩阵, 当 $j \leq 7/2$, 它们相应行列式的值都是零. 说明这种情况下, 不可能求 \mathcal{N}^{-1} , 同时 $| [b_0^\dagger a_0^\dagger]_{jm} \rangle$ 和 $| [b_2^\dagger a_2^\dagger]_{jm} \rangle$ 是线性相关的. 因此, 只需也只能考虑一维就足够了. 这就是(23)推算时, 只取 $| [b_0^\dagger a_0^\dagger]_{jm} \rangle$ 求 $\langle [b_0^\dagger a_0^\dagger]_{jm} | (\mathcal{E} - E\mathcal{N}) | [b_0^\dagger a_0^\dagger]_{jm} \rangle = 0$ 获得

$$\langle [b_0^\dagger a_0^\dagger]_{jm} | \left[\mathcal{E}_L - E \left(1 - \frac{1}{Q} \right) \right] | [b_0^\dagger a_0^\dagger]_{jm} \rangle = 0$$

的根据。其中 \mathcal{E} 换为 \mathcal{E}_L , 因为 $(\mathcal{E} - \mathcal{E}_L)$ 不给出贡献。

对于 $j > 7/2$ 时, 上述 \mathcal{N} 的两维矩阵相应行列式不为零, \mathcal{N} 可以求逆。(25A) 式中的 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 态是无关的了。

参 考 文 献

- [1] 徐躬耦, 中国科学, 1974, 6: 567.
- [2] 徐躬耦, 杨亚天, 王顺金, 中国科学, 1981, 4: 428.
- [3] Xu Gong-ou and Wang Shun-jin, *Nucl. Phys.*, A380 (1982), 529.
- [4] Broglia, R. A. et al., *Nucl. Phys.*, A348 (1980), 237.
- [5] Vitturi, A. Interacting Bose-Fermi System in Nuclei; Proc. of the Seminar. Erice, Sicily, June 12—19, 1980.
- [6] A de-shalit and I. Talmi, *Nuclear Shell Theory*; Academic, New York, 1963, P. 270.
- [7] Fu Deji, Xia Keding, *Nuclear Physics A* (in Press).

THE SOLUTIONS FOR j^3 SYSTEM FROM SHELL MODEL AND GENERATOR COORDINATE METHOD

FU DE-JI XIA KE-DING PAN WEI-PING

(Institute of Nuclear Research, Shanghai)

ABSTRACT

The solutions for the problem of 3 particles moving in a single- j shell are given from the shell model and the generator coordinate method (GCM) respectively. After taking all possible contractions of fermions as well as bosons, GCM can produce the same exact solution as the shell model. So it is quite reasonable to expect that GCM is an effective theory in treating coupling between boson and fermion degrees of freedom in nuclei microscopically.