第9卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 1
1985年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1985

有伴随表示的 $SU(3)$ 纯规范场格点模型相结构的变分研究*

何翔皓 冼鼎昌
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文报告了有伴随表示的 $SU(3)$ 纯规范场格点模型相结构的变分研究. 所求得的相变都是一级相变. 相变线的形状与 Monte Carlo 方法给出的结果也大致符合.

最近,不少人[1]用作用量变分的方法,讨论了格点规范理论中 $SU(2)$ 群的各种模型的相结构. 研究表明,作用量变分方法,在选取了适当的试探作用量以后,在讨论 $SU(2)$ 群的格点理论相变问题时是有效的. 在这篇短文中,我们讨论作用量变分方法在 $SU(3)$ 群加伴随表示的纯规范场相结构分析上的应用.

加伴随表示的纯规范场格点模型的作用量是:

$$S=\sum_{p}\frac{\beta}{6}\mathrm{Tr}(U_p+hc)+\frac{\beta_a}{8}(|\mathrm{Tr}\,U_p|^2-1), \tag{1}$$

配分函数是

$$Z=\int[DU_l]e^{S}. \tag{2}$$

参照 S 的形式,选试探作用量 S_0 为

$$S_0=\sum_{l}\mathrm{Tr}\,(U_lJ_l^{\dagger}+hc) \tag{3}$$

于是,(2)式可以改写成

$$Z=\int[dU_l]e^{S-S_0}e^{S_0}=\langle e^{S-S_0}\rangle_0\cdot Z_0 \tag{4}$$

式中,

$$Z_0=\int[dU_l]e^{S_0}, \tag{5}$$

在作用量为 S_0 的体系中力学量 $\boldsymbol{F}$ 的平均值 $\langle F\rangle_0$ 定义为

$$\langle F\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int[DU_l]Fe^{S_0}. \tag{6}$$

利用 Jensen 不等式

$$\langle e^x\rangle\geqslant e^{\langle x\rangle}, \tag{7}$$

---

* 本工作部分受科学院科学基金资助.
本文1984年5月9日收到.

由(4)可得

$$Z \geqslant Z_0 \exp\langle S - S_0\rangle_0 \tag{8}$$

元格的自由能W定义为

$$W = -\frac{1}{N_p}\ln Z, \tag{9}$$

式中 N_p 是元格数，由(8)可得，

$$W \leqslant -\frac{1}{N_p}\ln Z_0 + \frac{1}{N_p}\langle S_0 - S\rangle_0. \tag{10}$$

记 $W'(J)$ 为：

$$W'(J) = -\frac{1}{N_p}\ln Z_0 + \frac{1}{N_p}\langle S_0 - S\rangle_0, \tag{11}$$

于是，得

$$W'(J) \geqslant W, \tag{12}$$

用 J 作为变分参数，求得 $W'(J)$ 的极小值，将这极小值作为W的近似值，即

$$W \doteq \min\{W'(J)\}. \tag{13}$$

并在此近似上，讨论系统的相结构．这种变分讨论归结为 Z_0，$\langle S_0\rangle_0$ 及 $\langle S\rangle_0$ 的计算．我们的计算如下．

$$Z_0 = \int [DU_l]\, e^{\sum\limits_l \mathrm{Tr}(U_l J_l^t + hc)} = \prod_l \int dU e^{\mathrm{Tr}(UJ_l^t + hc)}, \tag{14}$$

当取 $J_l = J$ 时，有

$$Z_0 = \left[\int dU e^{\mathrm{Tr}(UJ^t + hc)}\right]^{N_l} = [f(J, J^t)]^{N_l}, \tag{15}$$

式中 f 是单键配分函数

$$f(J, J^t) = \int dU e^{\mathrm{Tr}(UJ^t + hc)}, \tag{16}$$

$\langle S_0\rangle_0$ 为

$$\langle S_0\rangle_0 = \left\langle \sum_l \mathrm{Tr}(U_l J_l^t + hc)\right\rangle_0 = \sum_l \mathrm{Tr}\left(J_l^t \frac{\partial \ln f_l}{\partial J_l} + hc\right), \tag{17}$$

式中

$$f_l = \int dU e^{\mathrm{Tr}(UJ_l^t + hc)},$$

当取 $J_l = J$ 时，有

$$\langle S_0\rangle_0 = N_l \,\mathrm{Tr}\left(J^t \frac{\partial \ln f}{\partial J} + hc\right), \tag{18}$$

式中 N_l 是键的总数，$N_l = \frac{2}{d-1}N_p$，当时空维数 $d = 4$ 时，$N_l = \frac{2}{3}N_p$.

$$\langle S\rangle_0 = \left\langle \frac{\beta}{6}\sum_p \mathrm{Tr}(U_p + hc) + \frac{\beta_a}{8}\sum_p (|\mathrm{Tr}\,U_p|^2 - 1)\right\rangle_0$$

$$= \frac{\beta}{6}\sum_p \mathrm{Tr}\left(\frac{\partial \ln f_{p_1}}{\partial J_{p_1}^+}\frac{\partial \ln f_{p_2}}{\partial J_{p_2}^+}\frac{\partial \ln f_{p_3}}{\partial J_{p_3}}\frac{\partial \ln f_{p_4}}{\partial J_{p_4}} + hc\right)$$

$$+\frac{\beta_a}{8}\sum_p\left[\frac{1}{f_{p_1}f_{p_2}f_{p_3}f_{p_4}}\mathrm{Tr}\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial J^+_{p_1}}\frac{\partial}{\partial J^+_{p_2}}\frac{\partial}{\partial J_{p_3}}\frac{\partial}{\partial J_{p_4}}\right)}\right.$$

$$\left.\cdot\,\mathrm{Tr}\frac{\partial f_{p_1}}{\partial J^t_{p_1}}\frac{\partial f_{p_2}}{\partial J^t_{p_2}}\frac{\partial f_{p_3}}{\partial J_{p_3}}\frac{\partial f_{p_4}}{\partial J_{p_4}}-1\right]. \tag{19}$$

$p_1\cdots\cdots p_4$ 是元格上的键的标号(图 1),当取 $J_l=J$ 时,(19)式还可以进一步化简. 但是,在 $SU(3)$ 群的情况下,任意形式的外源 J 的单键配分函数 f 的计算还是相当困难. 为了

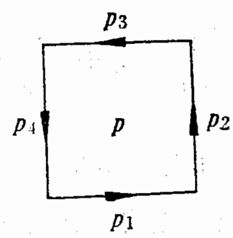

图 1 元格

避免引入过多的变分参数,作为初步讨论,我们限制外源 J 的形式为

$$J=ze^{-i\theta}V. \qquad V\in SU(3)$$

可以证明[3],此时单键配分函数 f 仅仅与 z,θ 有关,且对 f 作用时,有

$$\frac{\partial}{\partial J}=\frac{V^+e^{i\theta}}{6}\left[\frac{\partial}{\partial z}-\frac{i}{z}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial J^+}=\frac{Ve^{-i\theta}}{6}\left[\frac{\partial}{\partial z}+\frac{i}{z}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]$$

$$f=\mathrm{const}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi_1d\varphi_2\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\sin^2\frac{2\varphi_1+\varphi_2}{2}\sin^2\frac{2\varphi_2+\varphi_1}{2}$$

$$\cdot\exp\{2z[\cos(\varphi_1+\theta)+\cos(\varphi_2+\theta)+\cos(\varphi_1+\varphi_2-\theta)]\}$$

$$=\mathrm{const}\int_0^{2\pi}d\varphi e^B\times\left\{C\frac{I_1(A)}{A}-(2DA+3)\frac{I_2(A)}{A^2}\right\}. \tag{20}$$

其中, $A=4z\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\theta\right)$, $B=2z\cos(\varphi+\theta)$,

$$C=(3+\cos2\varphi)/2, D=\cos(3\varphi/2). \tag{21}$$

I_1, I_2 分别是一阶和二阶修正贝塞尔函数. 将(20)代入 (15), (18), (19) 可得

$$\ln Z_0=N_l\ln f, \tag{22a}$$

$$\langle S_0\rangle_0=N_lz\frac{\partial\ln f}{\partial z}, \tag{22b}$$

$$[\langle S\rangle_0=\frac{\beta}{6}\cdot N_p\cdot\frac{1}{6^3}\left[\left(\frac{\partial\ln f}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}\right)^2\right]^2$$

$$+\frac{\beta_a}{8}N_p\left\{\frac{1}{2^5\cdot3^8\cdot f^4}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)^2+\frac{1}{z^4}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\right]^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6^8}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{18}{z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+17^2\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\right]-1\right\}. \quad (22c)$$

将(22)代入(11)，得

$$W'(J)=-\frac{2}{3}\ln f+\frac{2}{3}z\frac{\partial\ln f}{\partial z}$$

$$-\frac{\beta}{6^4}\left[\left(\frac{\partial\ln f}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}\right)^2\right]^2$$

$$-\frac{\beta_a}{8}\left\{\frac{1}{2^5\cdot3^8\cdot f^4}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\right)^2+\frac{1}{z^4}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\right]^2\right.$$

$$+\frac{1}{6^8}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{18}{z}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right.$$

$$\left.\left.+\frac{17^2}{z^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\right]^2-1\right\}. \quad (23)$$

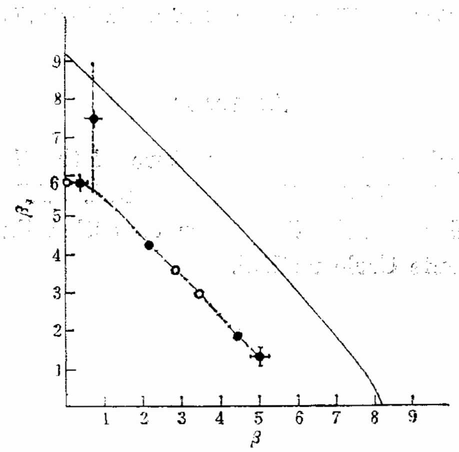

图 2　加伴随表示的格点模型一级相变线

●—○ Monte Carlo 计算结果　——变分法计算结果

式(23)是我们进行数值计算的出发点．当取 $W=\min\{W'(\theta, z)\}$ 时，系统的一级相变线如图 2 所示．

在作用量变分法中，试探作用量 S_0 的选择的好坏对计算结果的影响是相当大的．我们的计算结果与 Monte Carlo 数值计算结果在整体上是符合的(见图2)．我们所选的 S_0 的表达式是最初步的．$SU(2)$ 模型在用我们所选的 S_0 作为试探作用量时，其与 Monte Carlo 数值计算结果的差异，与我们的差异相同．在 $SU(2)$ 模型的分析上，还有许多改进的选择 S_0 的方案[1]，(例如抽中心的方法，将 S_0 中的键变量的一部分改成元格变量的方法)以及关于相变线中断的讨论，这些都可以应用 $SU(3)$ 模型上来．

感谢陈天崙、郑希特同志的讨论。

参 考 文 献

[1] T. L. Chen; C. I. Tan and X. T. Zheng, *Phys. Rev.*, D**26** (1982,) 2843; J. M. Alberty, H. Flyvbjerg and B. Lautrup, *Nucl. Phys.*, **B220**[**FS8**] (1982), 61—76; 郭硕鸿, 刘金明, 中山大学预印本, 1983.
[2] R. Brower, P. Rossi and C-I-Tan, *Nucl. Phys.*, **B190**[**FS3**] (1981), 699;
K. Ericksson, N. Svartholm and B. S. Skagerstam, CERN preprint TH-297 (1980).
[3] 何翔皓,李铁忠、冼鼎昌,"高能物理与核物理".
[4] G. Bhanot, *Phys. Lett.*, **108**B (1982), 337.
C. P. Bachas and R. F. Dashen, *Nucl. Phys.*, **B210**[**FS6**] (1982), 583.

VARIATIONAL ANALYSIS OF THE PHASE STRUCTURE OF THE *SU* (3) LATTICE GAUGE THEORY WITH A MIXED FUNDAMENTAL-ADJOINT ACTION*

He Xiang-hao Hsian Ding-chang
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

The variational analysis of the phase structure of the $SU(3)$ lattice gauge theory with a mixed fundamental-adjoint action is presented. All transitions are found to be the first order. The shape of the first order transition line is roughly consistent with the one given by Monte Carlo method.

* This work has supported in part by the Science Fund of Academia Sinica.