第 9 卷 第 2 期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 2
1985 年 3 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1985

有约束系统的路径积分

马千乘 阮图南

(中国科学技术大学)

摘 要

当系统的约束构成函数群时，可以精确地导出路径积分量子振幅，而无需附加对选择规范条件的限制 $\{\chi_i,\chi_j\}=0$ 或采用"弱"的概念. 可以证明，由系统的对称性所引起的约束恰好构成函数群. 物理上有兴趣的多数系统都是这样的对称性系统.

任一系统既可以用拉氏形式也可以用哈密顿形式描述. 但对于由奇异拉氏量所描述的系统$\left(\text{即其 Hessian 矩阵}\left(\dfrac{\partial^2\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_i\partial\dot{q}_j}\right)\text{为奇异矩阵}\right)$，若采用哈密顿形式则必然会有约束出现. 首先对这一问题进行系统研究的是 Dirac[1]. 他将约束按泊松括号的性质分为两类，即通常所谓的第一类约束和第二类约束.

Faddeev[2] 在 Dirac 理论的基础上完成了有约束场论的路径积分量子化理论，不过他仅限于讨论含有第一类约束的系统. 其后，他的工作被推广到还包含第二类约束的情形[3].

在 Dirac 的理论中，若把第一类约束记为

$$\varphi_i(q,p)=0,\ (i=1,\cdots r),\tag{1}$$

则按定义它们之间的泊松括号应满足条件

$$\{\varphi_i,\varphi_j\}|_M=0,\ (i,j=1,\cdots,r),\tag{2}$$

其中 M 表示在 $2N$ 维相空间中由约束方程(1)所决定的超曲面. 通常为了确定与第一类约束相联系的不定乘子还必须附加上相应的规范条件.

$$\chi_i(p,q)=0,\ (i=1,\cdots r).\tag{3}$$

它们满足条件

$$\mathrm{Det}(\{\varphi_i,\chi_j\})\neq 0.\tag{4}$$

显然，规范条件的选取有一定的自由度. 但是，通常为了导出有约束情况下的路径积分量子振幅，总是假定[2]

$$\{\chi_i,\chi_j\}=0,\ (i,j=1,\cdots r).\tag{5}$$

原因是这一种限制在推导过程中是必需的. 尽管从原则上讲，我们可以限于选取满足条件(5)式的规范，但是在实际上所选取的规范却并不一定总满足条件(5)式. Kaptanoglu[4] 指出，若选取的规范不满足条件(5)式，可以利用"弱正则变换"的概念来导出路径积分量

本文 1984 年 2 月 18 日收到.

子振幅．实际上，Senjanovic 等人有关于存在第二类约束情况下的讨论，也是在这种“弱”意义下进行的[3]．另外，他还指出[4]，若约束本身满足一定条件，则无需对规范附加上额外的限制即可以导出精确的路径积分量子振幅．本文继续讨论并指出，这个条件就是系统的约束构成函数群．而且对于具有定域变换不变性的系统，由对称性所引起的约束恰好构成函数群．由于许多物理上有兴趣的系统具有这种定域变换不变性，因此总能导出精确的路径积分量子振幅．

为了简单起见，我们考虑一个N维自由度的系统，由此推广到场论情形是直接的．设系统的拉氏量为

$$L = L(q, \dot{q}). \tag{6}$$

于是可以定义正则动量

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \ (i = 1, \cdots N). \tag{7}$$

如果这个系统的拉氏量是奇异的，那么就必然存在约束，其中包括原始约束和导出约束．我们假定它们全都是第一类约束，即 $\varphi_i(q, p) = 0$，$(i = 1, \cdots r)$．相应的规范条件是 $\chi_i(q, p) = 0$，$(i = 1, \cdots r)$．它们满足条件(4)，但我们放弃限制条件(5)式．

为了得到通常的路径积分量子振幅，关键是要证明存在下列正则变换，

$$q_i, p_i \to Q_i, P_i, \ (i = 1, \cdots N),$$

或统一地写成

$$\xi_i \to \eta_i, \ (i = 1, \cdots 2N), \tag{8}$$

使得对于新的正则变量而言，其中的一部分变量是与约束无关的(即真正的物理上的独立变量，我们将它们记为 Q^*、P^* 或 η^*)，而其余的变量是完全由约束所决定的(即非独立变量，记为 $\tilde{Q} \cdot \tilde{P}$ 或 $\tilde{\eta}$)．

根据线性偏微分方程完全性的理论和函数群的概念，可以证明，如果约束构成函数群，即

$$\{\varphi_i, \varphi_j\} = \Phi_{ij}(\varphi), \tag{9}$$

其中 Φ_{ij} 是 φ 的某个函数，那么这样的正则变换是一定存在的．

事实上，由于 φ 构成函数群，因此可以构造 $2N$ 个正则变量 $\eta_i(i = 1, \cdots 2N)$，它们是原正则变量的独立函数，使得在这些 η 中有 r 个变量 $\eta_i(i = 1, \cdots r)$ 仅仅是 $\varphi_i(i = 1, \cdots r)$ 的独立函数．我们将它们写成为

$$\eta_i' = \eta_i = u_i(\varphi), \ (i = 1, \cdots r). \tag{10}$$

这里我们不打算重复关于这一结论的证明，而是建议读者去参阅有关文献[5]．

下一步我们来考虑规范条件．若用新的正则变量来表示，它们是

$$\chi_i(\eta) = 0, \ (i = 1, \cdots r). \tag{11}$$

众所周知，泊松括号是一个正则不变量．因而

$$\{\varphi_i, \chi_j\}_\xi = \{\varphi_i, \chi_j\}_\eta = \{\varphi_i, \chi_j\}_{\tilde{\eta}\eta^*} = \{\varphi_i, \chi_j\}_{\tilde{\eta}}. \tag{12}$$

这里泊松括号的下标指明了定义泊松括号时所取的正则变量．变量 η 的子集合 $\tilde{\eta}$ 由两部分所组成，一部分是 r 个仅由 φ 所构成的变量 η'，另一部分是 r 个η'的正则共轭变量 η''．所剩下的其他 $2N - 2r$ 个正则变量记为 η^*．

为了方便起见，我们将 φ_i、$\chi_i(i=1,\cdots r)$ 统一地记为 $f_i(i=1,\cdots 2r)$. 于是可以将 $\{f_i, f_j\}_{\tilde\eta}$ 改写为

$$\{f_i,\ f_j\}_{\tilde\eta} = \frac{\partial f_i}{\partial\tilde\eta_k} J_{kl} \frac{\partial f_j}{\partial\tilde\eta_l}, \tag{13}$$

其中 J 是一个 $2r\times 2r$ 的辛矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ -1 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ O & & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

由 (13) 式，我们有

$$\mathrm{Det}(\{f_i, f_j\}_{\tilde\eta}) = \left[\mathrm{Det}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde\eta}\right)\right]^2. \tag{15}$$

将 $\mathrm{Det}(\{f_i,\ f_j\})$ 具体写出来是，

$$\mathrm{Det}(\{f_i,\ f_j\}) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \{\varphi_k, \varphi_l\}_{\tilde\eta} & \{\varphi_k, \chi_n\}_{\tilde\eta} \\ \{\chi_m, \varphi_l\}_{\tilde\eta} & \{\chi_m, \chi_n\}_{\tilde\eta\eta^*} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

由(2)式在约束超曲面上有

$$\mathrm{Det}(\{f_i, f_j\})|_M = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} 0 & \{\varphi_k, \chi_n\}_{\tilde\eta}|_M \\ \{\chi_m, \varphi_l\}_{\tilde\eta}|_M & \{\chi_m, \chi_n\}_{\tilde\eta\eta^*}|_M \end{pmatrix}. \tag{17}$$

于是，

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde\eta}\right)\Big|_M = \mathrm{Det}(\{\varphi_k, \chi_n\})|_M. \tag{18}$$

另外由(10)式有

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial f}{\partial\tilde\eta}\right) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta'} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta''} \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial\eta'} & \dfrac{\partial\chi}{\partial\eta''} \end{pmatrix} = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta'} & 0 \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial\eta'} & \dfrac{\partial\chi}{\partial\eta''} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Det}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\right)\cdot\mathrm{Det}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\eta''}\right). \tag{19}$$

因而，

$$\mathrm{Det}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\eta''}\right) \neq 0. \tag{20}$$

这样，由方程(11)可以解出 η''

$$\eta_i'' = v_i(\varphi, \chi, \eta^*),\ (i=1, \cdots r). \tag{21}$$

上式表明，η'' 是非独立正则变量. 于是，全部的非独立正则变量为 $\tilde\eta$，而独立正则变量为 η^*，因此所要求的正则变换(8)式一定能找到.

众所周知，为了导出路径积分的量子振幅，对 δ 函数需作如下处理:

$$\prod_i \delta(\eta_i' - u_i(\varphi))\delta(\eta_i'' - v_i(\varphi, \chi, \eta^*))$$

$$= \prod_i \delta(\varphi_i)\,\delta(\chi_i)\,\mathrm{Det}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\right)\mathrm{Det}\left(\frac{\partial\chi}{\partial\eta''}\right)\Big|_M$$

$$= \prod_i \delta(\varphi_i)\delta(\chi_i)\mathrm{Det}(\{\varphi_i, \chi_j\})|_M = \prod_i \delta(\varphi_i)\delta(\chi_i)\mathrm{Det}(\{\varphi_i, \chi_j\}). \tag{22}$$

最后我们得到

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_i dq_i dp_i \prod_j \delta(\varphi_j)\delta(\chi_j)\mathrm{Det}(\{\varphi_i, \chi_j\}) e^{i\int dt(p\dot{q}-H)} \\ &= \int \prod_i dQ_i^* dP_i^* \prod_k d\tilde{Q}_k d\tilde{P}_k \prod_j \delta(\varphi_j)\delta(\chi_j)\mathrm{Det}(\{\varphi_i, \chi_j\}) e^{i\int dt(P^*\dot{Q}^*+\tilde{P}\dot{\tilde{Q}}-H'(Q^*P^*\tilde{Q}\tilde{P}))} \\ &= \int \prod_i dQ_i^* dP_i^* \prod_k d\tilde{Q}_k d\tilde{P}_k \prod_j \delta(\eta_j' - u_j(0))\delta \\ &\quad \times (\eta_j'' - v_j(0, 0, \eta^*)) e^{i\int dt(P^*\dot{Q}^*+\tilde{P}\dot{\tilde{Q}}-H''(Q^*P^*uv))} \\ &= \int \prod_i dQ_i^* dP_i^* e^{i\int dt(P^*\dot{Q}^*-H^*(Q^*P^*))}, \end{aligned} \tag{23}$$

这里

$$H^*(Q^*P^*) = H''(Q^*P^*u(0)v(00Q^*P^*)) - \tilde{P}(Q^*P^*)\dot{\tilde{Q}}(Q^*P^*).$$

下面我们扼要地证明一下，对于一个具有定域变换不变性的系统，由对称性而引起的约束构成函数群．关于此结论的证明是 Bergmann 在 30 年前讨论其他问题时所完成的[6]．为了便于和物理上有兴趣的系统直接联系，下面我们考虑场论系统．

设物理系统对于某一定域变换群具有不变性．将坐标和场量的无穷小变换记为

$$\begin{gathered} x^\mu \to x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu, \\ y_A(x) \to y_A'(x) = y_A(x) + \delta y_A(x), \ (A = 1, \cdots N). \end{gathered} \tag{24}$$

这里场量 $y_A(x)$ 的下标 A 标记它的分量．一般地，我们可以假定无穷小变换规律可以写成下列形式：

$$\begin{gathered} \delta x^\mu = a_i^\mu \xi^i(x), \qquad a_i^\mu = 1 \text{ 或 } 0\,, \\ \delta y_A(x) = c_{Ai}^\mu \xi^i_{,\mu}(x) + d_{Ai}\xi^i(x) - y_{A,\mu}a_i^\mu \xi^i(x). \end{gathered} \tag{25}$$

这里 $\xi^i(x)(i = 1, \cdots r)$ 是标征定域变换群的参量函数，而系数 c_{Ai}^μ、d_{Ai} 是场量的某些函数．

为了保证系统的不变性，拉氏密度函数在无穷小变换下的变换规律应该是

$$\mathscr{L}'(y_A'(x')y_{A,\mu}'(x')x') = \mathscr{L}(y_A'(x')y_{A,\mu}'(x')x') + \frac{d}{dx_\mu'}\Omega^\mu(y_A'(x')x'). \tag{26}$$

由(26)式容易证明，这时必须满足所谓的 Bianchi 恒等式

$$(\mathscr{L}^A c_{Ai}^\mu)_{,\mu} + \mathscr{L}^A(y_{A,\mu}a_i^\mu - d_{Ai}) \equiv 0, \ (i = 1, \cdots r). \tag{27}$$

其中符号 $\mathscr{L}^A$ 的定义为

$$\mathscr{L}^A = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_A} - \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y_{A,\mu}}\right)_{,\mu}. \tag{28}$$

若将 $\mathscr{L}^A$ 代入到恒等式(27)中，则由包含二阶导数的项将导致包含三阶导数的项．这些项应当彼此相消．我们特别有兴趣的是涉及场量对时间三阶导数的项，即

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{y}_A \partial \dot{y}_B} c_{Bi}^4 = 0, (i = 1, \ \cdots r). \tag{29}$$

而这意味着 Hessian 矩阵是一个奇异矩阵并且其秩为 $N - r$．进一步这也就表明，对应于 r 个独立的参量函数 $\xi^i(x)(i = 1, \ \cdots r)$ 就有 r 个约束(原始约束)存在，并且这些约

束将取下述形式

$$\varphi_i = \pi^A c^4_{Ai} + K_i(y_A y_{A,j}) = 0, \quad (i = 1, \cdots r) \tag{30}$$

其中 K_i 是场量和场量对空间导数的某个函数.

当我们由拉氏形式过渡到哈密顿形式时，无穷小变换(25)引起无穷小正则变换. 一般地，生成函数密度可以写成简单的形式

$$\mathscr{G} = {}^0A_i\xi^i + {}^1A_i\dot{\xi}^i, \tag{31}$$

其中有关参量函数 ξ_i 的空间导数的项已经通过分部积分而去掉了. 可以证明，${}^1A_i$ 就是原始约束而 ${}^0A_i$ 为导出约束. 并且它们均为第一类约束.

进一步，由于变换本身构成群，因此在无穷小变换下我们有

$$\delta^*(\delta y_A) - \delta(\delta^* y_A) = \delta^{**} y_A, \tag{32}$$

$$\delta y_A = \{y_A, \mathscr{G}\}. \tag{33}$$

而这就意味着

$$\{\mathscr{G}, \mathscr{G}^*\} = \mathscr{G}^{**}, \tag{34}$$

以及 ${}^1A_i$、${}^0A_i$ 构成函数群.

我们可以举一个例子来说明上面的结果. 例如电磁场的拉氏函数为

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{35}$$

这个系统具有 $U(1)$ 定域对称性. 场量和拉氏函数的变换规律分别为

$$\delta x^\mu = 0, \quad \delta A_\mu = \delta^\nu_\mu \xi_{,\nu},$$

$$\mathscr{L}'(A'_\mu(x')A'_{\mu,\nu}(x')) = \mathscr{L}(A'_\mu(x')A'_{\mu,\nu}(x')). \tag{36}$$

容易导出生成函数密度为

$$\mathscr{G} = \pi^\mu \xi_{,\mu} = \pi^4 \dot{\xi} - \pi^i_{,i} \xi. \tag{37}$$

将(37)式与(31)式作比较，得到

$${}^1A = \pi^4, \quad {}^0A = -\pi^i_{,i}. \tag{38}$$

这样原始约束和导出约束分别就是

$$\varphi_1 = \pi^4 = 0, \quad \varphi_2 = \pi^i_{,i} = 0. \tag{39}$$

显然，这和我们熟知的结果是一致的. 另外，

$$\{\varphi_1, \varphi_1\} = 0, \ \{\varphi_2, \varphi_2\} = 0, \ \{\varphi_1, \varphi_2\} = 0. \tag{40}$$

这表明，所有这些约束都是第一类约束而且它们构成函数群.

我们这样就证明了，当系统的约束构成函数群时可以精确地导出路径积分量子振幅. 而无需像通常那样，人为地引进一些条件. 并且，物理上有兴趣的系统大多是这类对称性系统. 但是，我们以上的讨论实际上仅限于第一类约束系统. 对于存在第二类约束的系统，甚至于由 Grassmann 数所描述的有约束系统，通常的讨论也均是在“弱”意义下进行的. 因此也有必要来回答同样的问题，即寻求能精确导出路径积分量子振幅的条件. 有关这方面的工作我们将在另一些论文中给出.

参　考　文　献

[1] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.*, **2**(1950) 129.
[2] L. D. Faddeev, *Theor. Mat. Fiz.*, **1**(1969), 3. (*Theor. Math. Phys. USSR* 1(1969) 1.).
[3] P. Senjanovic, *Ann. Phys.*, **100**(1976) 227.
[4] S. Kaptanoglu *Phys. Lett.*, **98**B (1981) 77.
[5] C. Caratheodory, Variationsrechnung und die Particlle Differential Gleichungen von Erster Ordnung, (Teubner, Berlin, 1935). A. R. Forshty, Theory of Differential Equations, Vol. 5—6, N. Y. 1959.
[6] P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, 75(1949), 680.
P. G. Bergnann and J. H. M. Brunings, *Rev. Modern Phys.*, **21**(1949) 480.
J. L. Anderson and P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **83**(1951) 1018.

PATH INTEGRAL OF A SYMMETRY SYSTEM WITH CONSTRAINTS

MA QIAN-CHENG　　RUAN TU-NAN
(China University of Science and Technology)

ABSTRACT

When constraints of a system form a function group, the path integral quantum amplitude can exactly be deduced without adding the restrictions $\{\chi_i, \chi_j\}=0$ which are imposed on the gauge conditions or the "weak" concept. It can be shown that the constraints produced by symmetry just form a function group. Most of the interesting systems in physics are such symmetrical systems.