第9卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 9, No. 2
1985年3月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Mar., 1985

任意偶维时空的有效作用和手征反常

周光召　郭汉英　李小源　吴可
（中国科学院理论物理研究所）

宋行长
（北京大学）

摘要

由于同时考虑了左手和右手规范场，我们利用 Weil 同态的方法从 $2n+2$ 维时空上 Abel 反常的 Ward 恒等式,得到了规范协变反常流的一般表达式;再利用 Chern 类与 Chern-Simons 第二拓扑不变量的性质证明了用一个公式就包括了 $2n$ 维时空上的无反常条件，规范不变的 Wess-Zumino 有效作用,以及手征反常的一般形式;进一步揭示了 M^{2n+2} 与 M^{2n} 上这些问题之间的联系.

近来,关于有效作用量的大范围性质的研究引起了广泛的兴趣，Witten[1] 首先揭示了 Wess-Zumino 反常有效作用[2]的一些大范围性质；Skyrme[3] 关于重子可能是有效作用理论的孤子的考虑重新得到了重视[4]；对有效作用的规范不变性以及规范反常的拓扑起源从不同角度进行了探讨[5-9]；低维物理中的分数电荷、一些宏观量子效应等等也可与这些课题有着内在的联系[10,11].

本文将从大范围的角度对任意偶数维紧致时空上的有效作用的规范不变性以及规范反常的拓扑起源进行进一步的探讨． 我们将考虑 $SU(N)_L\times SU(N)_R$ 自发破缺到对角 $SU(N)$ 的有效作用理论，运用 Weil 同态[12]的方法求解 $2n+2$ 维时空上 Abel 反常的 Ward 恒等式,得到规范协变反常流的一般表达式;利用 Chern 类与 Chern-Simons 第二拓扑不变量的关系和性质给出 $2n$ 维时空上的无反常条件、规范不变的有效作用以及规范反常的一般形式． 这样，我们也进一步揭示了 $2n$ 维时空上的有效作用及非 Abel 反常与 $2n+2$ 维时空上协变反常流及 Abel 反常之间的内在联系.

令 $U(x)$ 是 $SU(N)$ 的元素,在 $SU(N)_L\times SU(N)_R$ 的元素 (g_L,g_R) 的作用下的变换性质为

$$U\to g_LU(x)g_R^{-1}. \tag{1}$$

为了得到在规范群 $H\subseteq SU(N)_L\times SU(N)_R$ 下不变的作用泛函，必须引入 U 的规范协变导数

$$DU=dU+A_LU-UA_R, \tag{2}$$

本文 1984 年 4 月 29 日收到.

其中 $A_{L(R)}$ 分别是 $H_{L(R)}$ 的规范势 1 形式，相应的场强 2 形式为[1)]

$$F_{L(R)} = dA_{L(R)} + A^2_{L(R)}. \tag{3}$$

在规范变换

$$U \to h_L(x)U(x)h_R^{-1}(x), \quad (h_L, h_R) \in H_L \times H_R, \tag{4}$$

的作用下

$$\begin{aligned} &A_{L(R)} \to h_{L(R)}(d + A_{L(R)})h^{-1}_{L(R)}, \quad F_{L(R)} \to h_{L(R)}F_{L(R)}h^{-1}_{L(R)}, \\ &DU \to h_L(x)DU(x)h_R^{-1}(x), \quad U^{-1}DU \to h_R(x)U^{-1}DUh_R^{-1}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$U^{-1}DU = U^{-1}(d + A_L)U - A_R =: {}^U A_L - A_R. \tag{6}$$

${}^U A_L$ 的变换性质与 A_R 是一致的．

在 $2n+2$ 维空间中，膺矢流的 Abel 反常为

$$C^{n+1}(A_L) - C^{n+1}(A_R)$$

其中 $C^{n+1}(A)$ 是 A 的第 $n+1$ 阶陈类，设由膺标 Goldstone 场 U 和规范场组成的反常流用 1 形式表示出来为 $J(U, A_L, A_R)$，则反常流的守恒方程为

$$d^*J(U, A_L, A_R) = C^{n+1}(A_L) - C^{n+1}(A_R). \tag{7}$$

其中*是 Hodqe 对偶算子．

我们首先研究的问题是找到一个协变的有效反常流 $J(U, A_L, A_R)$ 满足方程(7)．引入

$$\begin{aligned} &A_t = A_R + tU^{-1}DU, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ &F_t = dA_t + A_t^2 = t\,{}^U F_L + (1-t)F_R - t(1-t)(U^{-1}DU)^2 \end{aligned} \tag{8}$$

利用 Weil 同态态式和 Chern 类的表达式立即得到

$$C^{n+1}({}^U A_L) - C^{n+1}(A_R) = \alpha_{n+1}(n+1)d\int_0^1 dt \mathrm{Tr}(U^{-1}DUF_t^n). \tag{9}$$

其中 $\alpha_{n+1} = \dfrac{i^{n+1}}{(2\pi)^{n+1}(n+1)!}$．由于 $C^{n+1}({}^U A_L) = C^{n+1}(A_L)$，因此立即可以得到(7)的一般解

$$^*J(U, A_L, A_K) = \alpha_{n+1}(n+1)\int_0^1 dt \mathrm{Tr}(U^{-1}DUF_t^n) + {}^*\mathscr{I}_0. \tag{10}$$

其中 ${}^*\mathscr{I}_0$ 是任意的协变的正合 $2n+1$ 形式． 由(8)式可以看到 $U^{-1}DU$ 和 F_t 都是明显规范协变的，因此 $^*J$ 是规范不变的．对于 4 维时空 $(n=1)$，直接计算表明 ${}^*\mathscr{I}_0 = 0$．J 通常叫 Skyrmion 流[11]． 因此，(10)式给出了 $2n+2$ 维空间中的协变反常流的一般形式．

其次，我们考查 $2n$ 维空间上的 Wess-Zumino 有效作用．利用 Chern 类与 Chern-Simons 第二拓扑不变量的局部关系式，

$$C^{n+1}(A) = d\Pi^{(2n+1)}(A), \tag{11}$$

以及 Chern-Simons 不变量的性质，由(7)、(9)可以得到

$$^*J = \Pi^{(2n+1)}(U^{-1}dU) + dW^{(2n)} + \Pi^{(2n+1)}(A_L) - \Pi^{(2n+1)}(A_R), \tag{12}$$

1) 在本文中乘积指外乘积，A^2 为 $A_\wedge A$ 的缩写．

令

$$\Gamma(U, Q^{2n+1}) = 2\pi i \int_{Q^{2n+1}} \Pi^{(2n+1)}(U^{-1}dU). \tag{13}$$

其中 Q^{2n+1} 是 $2n+1$ 维流形，$\partial Q^{2n+1} = M^{2n}$ 为 $2n$ 维紧致化时空，当 $n=2$ 时就是 Witten[1] 所称的 Wess-Zumino 项[2]. 不难看出，$\Gamma(U, Q^{2n+1})$ 就是该项在 M^{2n} 上的推广. 同时，由于 $^*J$ 是规范协变的，因此在充要条件

$$\Pi^{(2n+1)}(A_L) = \Pi^{(2n+1)}(A_R), \tag{14}$$

下，可以定义 M^{2n} 上推广的规范不变的 Wess-Zumino 项

$$\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1}) = \Gamma(U, Q^{2n+1}) + 2\pi i \int_{M^{2n}} W^{(2n)}. \tag{15}$$

为了求出 $W^{(2n)}$ 的一般表达式，我们引入

$$\begin{aligned} &A_{tu} = t^U A_L + u A_R \quad 0 \leqslant t, u \leqslant 1, \\ &F_{tu} = dA_{tu} + A_{tu}^2, \quad {}^U F_{Lt} = td^U A_L + t^{2U} A_L^2, \quad F_{Ru} = nd A_R + n^2 A_R^2. \end{aligned} \tag{16}$$

考虑 (u, t) 平面上以原点及$(1,0)$，$(0,1)$为顶点的三角形 L，其边 $\partial L = l$. 可以证明

$$\begin{aligned} I_l &= \alpha_{n+1}(n+1) \int_l \mathrm{Tr}\{(dt^U A_L + du A_R) F_{tu}^n\} \\ &= -\Pi^{(2n+1)}({}^U A_L) + \Pi^{(2n+1)}(A_R) + {}^*J_{\min}. \end{aligned} \tag{17}$$

这里 $^*J_{\min}$ 为 $^*\mathscr{I}_0$ 为 0 时的 $^*J$[1)]，我们并用到

$$\Pi^{(2n+1)}(A) = \alpha_{n+1}(n+1) \int_0^1 dv \mathrm{Tr}(A F_v^n), \quad F_v = v dA + v^2 A^2, \tag{18}$$

另一方面，利用 Green 公式

$$\begin{aligned} I_l &= \alpha_{n+1}(n+1) \int_L \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial}{\partial u}({}^U A_L F_{tu}^n) - \frac{\partial}{\partial t}(A_R F_{tu}^n)\right\} du dt \\ &= \alpha_{n+1} d\left\{(n+1)n \int_L \mathrm{Str}(A_R {}^U A_L F_{tu}^{n-1}) du dt\right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

因此，

$$\begin{aligned} {}^*J_{\min} &= \Pi^{(2n+1)}({}^U A_L) - \Pi^{(2n+1)}(A_R) \\ &\quad + d\left\{(n+1)n\alpha_{n+1} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} du \mathrm{Str}(A_R {}^U A_L F_{tu}^{n-1})\right\}. \end{aligned} \tag{20}$$

同样，可以证明

$$\begin{aligned} \Pi^{(2n+1)}({}^U A_L) &= \Pi^{(2n+1)}(A_L) + \Pi^{(2n+1)}(U^{-1}dU) \\ &\quad + d\left\{(n+1)n\alpha_{n+1} \int_0^1 dv \int_0^{1-v} dw \mathrm{Str}(UdU^{-1} A_L F_{vw}^{n-1})\right\}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $F_{vw} = F(vA_L + \omega UdU^{-1})$，$0 \leqslant v, w \leqslant 1$. 于是我们得到

$$\begin{aligned} W^{(2n)} = (n+1)n\alpha_{n+1} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} du \mathrm{Str}\{&A_R {}^U A_L F^{n-1}(t^U A_L + u A_R) \\ &+ UdU^{-1} A_L F^{n-1}(tA_L + uUdU^{-1})\}. \end{aligned} \tag{22}$$

取 $n = 2, 3$，直接计算表明 $\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1})$ 分别给出 M^4 与 M^6 上规范不变 Wess-Zumino 项

1) 因为这里讨论的 $\tilde{\Gamma}$ 也是在这种最小意义下的 Wess-Zumino 项. 一般说来，由于 $^*\mathscr{I}_0$ 是正合形式，$\tilde{\Gamma}$ 会有我们讨论过的不确定性[8,9].

的结果．[5,8]而且 Goldstonl 场的零阶项和一阶项分别给出 Bardeen 的抵消项 R_3 子非对称反常[5]，这表明 $\tilde{\Gamma}(U, Q^5)$ 满足 M^4 上非 Abel 反常的 Ward 恒等式以及 Wess-Zumino 自洽性条件． 同样的结论可以推广到 M^{2n} 上的 $\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1})$，特别是可以证明 M^{2n} 上 Bardeen 的抵消项 $R_3(M^{2n})$ 与非对称反常 $G_A^a(M^{2n})$ 分别为

$$R_3(M^{2n}) = (n+1)n\alpha_{n+1}\int_0^1 dt\int_0^{1-t} du\mathrm{Str}\{A_R A_L(F_{Lt}+F_{Ru})^n\}, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}G_A^a(M^{2n}) = {} & 2\pi i(n+1)n\alpha_{n+1}\int_0^1 dt(1-t)\mathrm{Str}\{\lambda^a d[A_L F^{n-1}(tA_L)]\} \\ & + 2\pi i(n+1)n\alpha_{n+1}\int_0^1 dt\int_0^{1-t} du\mathrm{Str}(\lambda^a\{[d(E^{n-1}A_R) \\ & + A_L E^{n-1}A_R + E^{n-1}A_R A_L] + (n-1)[E^{n-2}A_R A_L F(tA_L) \\ & - F(tA_L)E^{n-2}A_R A_L] + (n-1)(t-t^2)d[A_L E^{n-2}A_R A_L \\ & - E^{n-2}A_R A_L^2] + (n-1) + u[d(E^{n-2}A_R A_L A_R) \\ & + A_L E^{n-2}A_R A_L A_R + E^{n-2}A_R A_L A_R A_L - d(A_R E^{n-2}A_R A_L) \\ & - A_L A_R E^{n-2}A_R A_L - A_R E^{n-2}A_R A_L^2]\}),\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$E = F(tA_L) + F(uA_R) + tu\cdot(A_L A_R + A_R A_L). \tag{25}$$

显然，如果条件(14)不能满足，那么 $\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1})$ 就不是规范不变的，在规范变换(4)下 $\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1})$ 的改变量满足

$$\Delta\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1}) + 2\pi i\Delta(\Pi^{(2n+1)}(A_L) - \Pi^{(2n+1)}(A_R)) = 0, \tag{26}$$

利用类似于(21)的公式不难证明

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1}) = {} & -\Gamma(h_L, Q^{2n+1}) + \Gamma(h_R, Q^{2n+1}) \\ & - 2\pi i d\left\{(n+1)n\alpha_{n+1}\int_0^1 dv\int_0^{1-v} dw\mathrm{Str}(h_L^{-1}dh_L A_L F_{vw}^{n-1}) - (L\to R)\right\}.\end{aligned} \tag{27}$$

同样可以给出无穷小改变量 $\delta\tilde{\Gamma}(U, Q^{2n+1})$ 的一般表达式． 当 $n=2$ 时，直接计算表明 $\delta\tilde{\Gamma}(U, Q^5)$ 就是 Gross-Jackiw 的对称反常[13]，而 $\Delta\tilde{\Gamma}(U, Q^5)$ 则可给出 Witten 的 $SU(2)$ 大范围反常[1]．这表明，条件(14)是 M^{2n} 上无反常条件的大范围形式，它不仅是通常微扰论意义下的无反常条件的推广，而且也概括了非微扰下的无反常的条件．另一方面，从 Q^{2n+1} 上的条件(14)可得

$$C^{n+1}(A_L) = C^{n+1}(A_R). \tag{28}$$

这恰恰是 M^{2n+2} 上无 Abel 矢量反常的条件．

总之，M^{2n+2} 上的 Abel 反常和 M^{2n} 上的非 Abel 反常，二者的拓扑起源相同，有着深刻的内在联系．我们知道，Abel 反常以及非微扰的非 Abel 反常都是 Atiyah-Singer 指数定理[12]的体现，因此，通常的非 Abel 反常也必然直接与间接与 Atiyoh-Singer 定理相联系．关于这个问题我们将留待以后进一步讨论．

参　考　文　献

[1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, B**223**(1983), 422.
[2] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett.*, **37**B(1971), 95.

[3] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A**260**(1961), 127.
[4] E. Witten, *Nucl. Phys.*, B**223**(1983), 433.
G. W. Adkins, C. R. Nappi and E. Witten, *ibid.*, B**228**(1983), 552.
[5] K. C. Chou, H. Y. Guo, K. Wu and X. C. Song, *Phys. Lett.*, **134**B (1984), 67; Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica preprint AS-ITP-83-032; 033; Stony Brook preprint ITP SB-84-18.
[6] B. Zumino, Les Houches lectures 1983, LBL-16747 (1983).
B. Zumino, Y. S. Wu and A. Zee, *Nucl. Phys.* (to be published).
[7] K. Kawai and S. -H. H. Tye, Cornell preprint CLNS-84/595.
[8] Y. P. Kuang, X. Y. Li, K. Wu and Z. Y. Zhao, preprint AS-ITP-84-015.
[9] C. H. Chang, H. Y. Guo and K. Wu, preprint AS-ITP-84-016.
[10] J. Goldstone and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 986.
[11] A. Zee, *Phys. Lett.*, **135**B(1984), 307.
F. Wilczek and A. Zee, *Phys. Rev. Lett.*, **51**(1983), 2250.
[12] 例如见 T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hanson, *Phys. Reports*, **66**(1980), 213,及其中所引文献.
[13] D. J. Gross and R. Jackiw, *Phys. Rev.*, D6(1972), 477.

EFFECTIVE ACTION AND CHIRAL ANOMALIES IN ANY EVEN DIMENSIONAL SPACE

CHOU KUANG-CHAO, GUO HAN-YING
LI XIAO-YAUN, WU KE
(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica)

SONG XING-CHANG
(Peking University)

ABSTRACT

General expression for gauge covariant anomalous current is obtained from the difference of left handed and right handed Abelian anomaly in $2n+2$ dimensions by the method of Weil homomorphism. The general form of symmetric and asymmetric anomalies, gauge invariant Wess-Zumino effective action and anomaly free condition in $2n$ dimensions are summarized in one closed formula, showing the deep connections among all these topological properties of gauge fields and pseudascalar Goldstone fields in $2n$ and $2n+\acute{e}$ dimensions.