第9卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 4
1985年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1985

$U(6/20)$ 超对称性的 $U(5)$ 极限

朱培豫　　曹雨芳　　吴佑实
(上海铁道学院)　(华东师范大学)　(安徽机电学院)

摘　要

本文讨论 $U(6/20)$ 超对称性的 $U(5)$ 极限，先在数学上导出有关的约化公式，接着在 $M=1$ 情况下，讨论了动力学对称性，画出典型能谱，然后就 ${}^{103}_{44}\mathrm{Ru}_{59}$ 核将理论与实验作了比较.

一、引　言

我们在前面一篇文章[1]中讨论了 $U(6/20)$ 超对称性及其 Spin(6) 极限. 本文讨论 $U(6/20)$ 超对称性的 $U(5)$ 极限. 正如前文一样，我们将群表示一律写成 Partition 形式，以便直接与扬 (Young) 图联系起来.

第二节里，我们找到了 $SP(4)$ 表示到相应的 $SO(5)$ 表示的变换公式，又用推广的群表示 Kronecker 积的扬 (Young) 图法[2]，导出了 $SO(5)\otimes SP(4)\to \mathrm{Spin}(5)$ 的整套约化公式.

第三节里，我们得出了在 $M=1$ 情况下 $U(6/20)$ 超对称性的 $U(5)$ 极限的波函数和激发能公式，画出了典型能谱，而后就 ${}^{103}_{44}\mathrm{Ru}_{59}$ 核将理论与实验作了比较.

二、群链与约化

如果原子核中的偶质量核心具有 $U(5)$ 极限对称性

$$U(6)\supset U(5)\supset SO(5)\supset SO(3)\supset SO(2) \tag{2.1}$$

那末原子核的 $U(6/20)$ 超对称性有相应一条群链

$$\begin{aligned} &U(6/20)\supset U^{(B)}(6)\otimes U^{(F)}(20)\supset U^{(B)}(5)\otimes U^{(F_k)}(5)\otimes U^{(F_i)}(4)\supset U^{(B+F_k)}(5)\otimes U^{(F_i)}(4)\\ &\supset SO^{(B+F_k)}(5)\otimes SP^{(F_i)}(4)\supset \mathrm{Spin}(5)\supset \mathrm{Spin}(3)\supset \mathrm{Spin}(2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

(1) $U(6)$ 到 $U(5)$ 的约化，由文献 [3, 4] 给出.

(2) $U(5)$ 到 $SO(5)$ 的约化，也由文献 [4] 给出. 应注意到我们所用的 $SO(5)$ 的不可约表示 $(\tau_1\tau_2)$ 和文献 [4] 中 $(\lambda\ \mu)$ 之间关系是 $\tau_1=\dfrac{\lambda}{2}+\mu,\ \tau_2=\dfrac{\lambda}{2}$.

本文 1983 年 12 月 12 日收到.

(3) $SU(4)$ 到 $SP(4)$ 的约化，由文献[3]给出．并注意到 $SU(4)$ 到 $SP(4)$ 的约化是完全可约的．

(4) $SP(4)$ 与 $SO(5)$ 表示的 Partition 指标之间的变换关系．设 $SP(4)$ 的 Partition 指标为 $\langle n_1 n_2\rangle$，而 $SO(5)$ 为 $(\tau_1\tau_2)$，我们有

$$n_1 = \tau_1 + \tau_2,\quad n_2 = \tau_1 - \tau_2 \tag{2.3}$$

(5) $SO(5)\otimes SP(4)$ 到 Spin(5) 的约化．用推广的群表示 Kronecker 积的扬 (Young) 图法[2]，我们导出下列约化公式：

$$\begin{aligned}(\tau_1\tau_2)\otimes\left(\frac{1}{2}\ 1/2\right) &= (\tau_1 + 1/2,\ \tau_2 + 1/2)\\ &\oplus\left(\tau_1 - \frac{1}{2}\quad \tau_2 + \frac{1}{2}\right)\oplus\left(\tau_1 + \frac{1}{2}\quad \tau_2 - \frac{1}{2}\right)\\ &\oplus(\tau_1 - 1/2, \tau_2 - 1/2).\qquad \tau_1 > \tau_2\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}(\tau_1 0)\otimes(n + 1/2,\ 1/2) &= (\tau_1 + n + 1/2\quad 1/2)\\ &\oplus\left(\tau_1 + n - \frac{1}{2},\ 3/2\right)\oplus\left(\tau_1 + n - 1/2,\ \frac{1}{2}\right)\\ &\oplus(\tau_1 + n - 3/2,\ 5/2)\oplus(\tau_1 + n - 3/2,\ 3/2)\\ &\oplus(\tau_1 + n - 3/2\ \ 1/2)\oplus\cdots\oplus(\tau_1 + 1/2\ \ n + 1/2)\\ &\oplus(\tau_1 + 1/2,\ n - 1/2)\oplus\cdots\oplus(\tau_1 + 1/2\ \ 1/2)\\ &\oplus(\tau_1 - 1/2\ \ n + 1/2)\oplus(\tau_1 - 1/2\ \ n - 1/2)\oplus\cdots\\ &\oplus\left(\tau_1 - 1/2\ \frac{1}{2}\right)\oplus(\tau_1 - 3/2,\ n - 1/2)\\ &\oplus(\tau_1 - 3/2\ \ n - 3/2)\oplus\cdots\oplus(\tau_1 - 3/2\ \ 1/2)\oplus\cdots\\ &\oplus(\tau_1 - n + 1/2,\ 3/2)\oplus(\tau_1 - n + 1/2,\ 1/2)\\ &\oplus(\tau + n - 1/2,\ 1/2)\quad \tau > n\end{aligned} \tag{2.5}$$

当 $\tau = n$ 时，(2.3) 和 (2.4) 化为

$$\begin{aligned}(\tau\tau)\otimes\left(\frac{1}{2}\ \ 1/2\right) &= (\tau + 1/2\ \ \tau + 1/2)\oplus(\tau + 1/2,\ \tau - 1/2)\\ &\oplus(\tau - 1/2,\ \tau - 1/2)\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}(\tau 0)\otimes(\tau + 1/2\ \ 1/2) &= (2\tau + 1/2\ \ 1/2)\oplus(2\tau - 1/2\ \ 3/2)\\ &\oplus(2\tau - 1/2\ \ 1/2)\oplus(2\tau - 3/2\ \ 5/2)\oplus(2\tau - 3/2\ \ 3/2)\\ &\oplus(2\tau - 3/2\ \ 1/2)\oplus\cdots\oplus(\tau + 1/2\ \ \tau + 1/2)\\ &\oplus(\tau + 1/2\ \ \tau - 1/2)\oplus\cdots\oplus(\tau + 1/2\ \ 1/2)\\ &\oplus(\tau - 1/2\ \ \tau - 1/2)\oplus(\tau - 1/2\ \ \tau - 3/2)\oplus\cdots\\ &\oplus(\tau - 1/2\ \ 1/2)\oplus\cdots\oplus(3/2\ \ 3/2)\oplus(3/2\ \ 1/2)\oplus(1/2\ \ 1/2)\end{aligned} \tag{2.7}$$

(6) Spin(5) 到 Spin(3) 的约化．文献[2]中，用推广的群表示 Kronecker 积的扬

(Young) 图法，已完成了 Spin(5) 到 Spin (3) 的约化，这一约化不是完全可约的.

三、M=1 情况下群链的约化

在 $M=1$ 的情况下，群链 (2.2) 中 $U^{(F)}(20)$, $U^{(F_k)}(5)$, $U^{(F_i)}(4)$ 的表示分别为

$$\underbrace{[1,00\cdots0]}_{20} \quad [1,0,0,0,0] \quad 和 \quad [1000].$$

设玻色子数为 N，则 $U^{(B)}(6)$ 到 $U^{(B)}(5)$ 的约化为

$$[N]=[N]+[N-1]+\cdots+[1]+[0] \tag{3.1}$$

$U^{(B)}(5)\otimes U^{(F_k)}(5)$ 到 $U^{(B+F_k)}(5)$ 的约化为

$$[n]\otimes[1,0,0,0,0]=[n+1,0,0,0,0]+[n,1,000] \tag{3.2}$$

$U^{(F_i)}(4)$ 到 $SP^{(F_i)}(4)$ 的约化为

$$[1000]=\langle 10\rangle \tag{3.3}$$

$\langle 10\rangle$ 可变换为 $SO^{(F_i)}(5)$ 下的指标 (1/2 1/2)

$SO^{(B+F_k)}(5)\otimes SP^{(F_i)}(4)$ 到 Spin(5) 及 Spin(5) 到 Spin(3) 的约化可按公式(2.4)—(2.7) 以及文献 [7] 中约化表进行.

表 1 列出了 $N=7$, $M=1$ 时 $U^{(B)}(5)$ 的最低表示 [7.0000] 所对应的 $U^{(B+F_k)}(5)$, $SO^{(B+F_k)}(5)$, Spin(5) 和 Spin(3) 的全部表示. 也就是说，列出了 $N=7$, $M=1$ 时 $U^{(B)}(5)$ 表示 [7, 0000] 所对应的全部量子态.

四、动力学对称性

由 $U(6/20)$ 超对称性群链 (2.2). 偶质量核心具有 $U(5)$ 极限对称性，奇粒子数 $M=1$ 的原子核的 $U(6/20)$ 超对称波函数为

$$\left|\begin{matrix} U(6/20) & U^{(B)}(6) & U^{(F)}(20) & U^{(B)}(5) & U^{(B+F_k)}(5) & SO^{(B+F_k)}(5) & \mathrm{Spin}(5) & \mathrm{Spin}(3) & \mathrm{Spin}(2) \\ N & N & M & N^1 & (n_1n_2) & (\tau_1\tau_2) & (\sigma_1\sigma_2), & \delta, J & M_J \end{matrix}\right\rangle \tag{4.1}$$

哈密顿量为

$$H=H_B+H_F+V_{BF} \tag{4.2}$$

用群链 (2.2) 中出现的诸群的 Casimir 不变量写出 H，我们就可以求出这种核的本征值问题的解析解：

$$\begin{aligned} E=&E_0(NN)+\alpha N'+\beta N'(N'+4)+A(n_1+n_2)+B[n_1(n_1+4)\\ &+n_2(n_2+2)]+C[\tau_1(\tau_1+3)+\tau_2(\tau_2+1)]+D[\sigma_1(\sigma_1+3)\\ &+\sigma_2(\sigma_2+1)]+FJ(J+1) \end{aligned} \tag{4.3}$$

(4.1) 式中的 δ 是由于 Spin (5) 到 Spin (3) 不是完全可约而引进的一个附加量子数，它不影响激发能.

$N=3$, $M=1$ 的典型能谱如图 1 所示.

表 1 $N=7$，$M=1$ 时 $U^{(B)}(5)$ 最低表示 [70000] 所对应的 $U^{(B+F_k)}(5)$，$SO^{(B+F_k)}_{(5)}$，Spin(5) 和 Spin(3) 的表示

$U^{(B+F_k)}(5)$ $[n_1n_2]$	$SO^{(B+F_k)}(5)$ $(\tau_1\tau_2)$	Spin(5) $(\sigma_1\sigma_2)$	Spin(3) J
[80]	(80)	(17/2 1/2)	35/2 33/2 31/2 $(29/2)^2$ $(27/2)^2$ $(25/2)^2$ $(23/2)^3$ $(21/2)^3$ $(19/2)^3$ $(17/2)^3$ $(15/2)^3$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ (7/2) (5/2) (3/2)
		(15/2 1/2)	31/2 29/2 27/2 $(25/2)^2$ $(23/2)^2$ $(21/2)^2$ $(19/2^3)$ $(17/2)^3$ $(15/2)^2$ $(13/2)^3$ $(11/2)^2$ (9/2) $(7/2)^2$ 5/2 1/2
	(60)	(13/2 1/2)	27/2 25/2 23/2 $(21/2)^2$ $(19/2)^2$ $(17/2)^2$ $(15/2)^3$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
		(11/2 1/2)	23/2 21/2 19/2 $(17/2)^2$ $(15/2)^2$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
	(40)	(9/2 1/2)	19/2 17/2 15/2 $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ 9/2 $(7/2)^2$ 5/2 1/2
		(7/2 1/2)	15/2 13/2 11/2 $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
	(20)	(5/2 1/2)	11/2 9/2 7/2 5/2 3/2
		(3/2 1/2)	7/2 5/2 1/2
	(0,0)	(1/2 1/2)	3/2
(71)	(7,1)	(15/2 3/2)	33/2 31/2 $(29/2)^2$ $(27/2)^3$ $(25/2)^3$ $(23/2)^4$ $(21/2)^5$ $(19/2)^4$ $(17/2)^5$ $(15/2)^5$ $(13/2)^4$ $(11/2)^4$ $(9/2)^4$ $(7/2)^2$ $(5/2)^2$ $(3/2)^2$
		(13/2 3/2)	29/2 27/2 $(25/2)^2$ $(23/2)^3$ $(21/2)^3$ $(19/2)^4$ $(17/2)^4$ $(15/2)^4$ $(13/2)^4$ $(11/2)^4$ $(9/2)^3$ $(7/2)^3$ $(5/2)^2$ 3/2 1/2
		(15/2 1/2)	31/2 29/2 27/2 $(25/2)^2$ $(23/2)^2$ $(21/2)^2$ $(19/2)^3$ $(17/2)^3$ $(15/2)^2$ $(13/2)^3$ $(11/2)^2$ 9/2 $(7/2)^2$ 5/2 1/2
		(13/2 1/2)	27/2 25/2 23/2 $(19/2)^2$ $(21/2)^2$ $(17/2)^2$ $(15/2)^3$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
	(51)	(11/2 3/2)	25/2 23/2 $(21/2)^2$ $(19/2)^3$ $(17/2)^3$ $(15/2)^3$ $(13/2)^4$ $(11/2)^3$ $(9/2)^3$ $(7/2)^3$ $(5/2)^2$ 3/2 1/2
		(9/2 3/2)	21/2 19/2 $(17/2)^2$ $(15/2)^3$ $(13/2)^2$ $(11/2)^3$ $(9/2)^3$ $(7/2)^2$ $(5/2)^2$ $(3/2)^2$
		(11/2 1/2)	23/2 21/2 19/2 $(17/2)^2$ $(15/2)^2$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
		(9/2 1/2)	19/2 17/2 15/2 $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ 9/2 $(7/2)^2$ 5/2 1/2
	(31)	(7/2 3/2)	17/2 15/2 $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ $(7/2)^2$ $(5/2)^2$ 3/2 1/2
		(5/2 3/2)	13/2 11/2 9/2 $(7/2)^2$ 5/2 3/2 1/2
		(7/2 1/2)	15/2 13/2 11/2 $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
		(5/2 1/2)	11/2 9/2 7/2 5/2 3/2
	(11)	(3/2 3/2)	9/2 5/2 3/2
		(3/2 1/2)	7/2 5/2 1/2
		(1/2 1/2)	3/2
	(60)	(13/2 1/2)	27/2 25/2 23/2 $(21/2)^2$ $(19/2)^2$ $(17/2)^2$ $(15/2)^3$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
		(11/2 1/2)	23/2 21/2 19/2 $(17/2)^2$ $(15/2)^2$ $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
	(40)	(9/2 1/2)	19/2 17/2 15/2 $(13/2)^2$ $(11/2)^2$ (9/2) $(7/2)^2$ 5/2 1/2
		(7/2 1/2)	15/2 13/2 11/2 $(9/2)^2$ 7/2 5/2 3/2
	(20)	(5/2 1/2)	11/2 9/2 7/2 5/2 3/2
		(3/2 1/2)	7/2 5/2 1/2
	(00)	(1/2 1/2)	3/2

表 2　$^{103}_{44}\mathrm{Ru}_{59}$ 核的激发能级

$(n_1\,n_2)$	$(\tau_1\,\tau_2)$	$(\sigma_1\sigma_2)$	J^π	$E^{理论}$(keV)	$E^{实验}$ (keV)	$\triangle$ (keV)
(80)	(80)	(17/2 1/2)	3/2+	0	0.0	0
			5/2+	110	136.0	−26
			7/2+	264	213.4	+51
			9/2+	462	557.8	−96
			11/2+	704	774.0	−70
		(15/2 1/2)	1/2+	162	174.2	−12
			5/2+	338	346.3	−8
			7/2+	492	479.5	+12
			9/2+	690	735.2	−45
			11/2+	932	927.2	+5
(71)	(71)	(15/2 3/2)	3/2+	400	405.6	−6
			5/2+	510	500.9	+9
			7/2+	664	621.9	+42
			9/2+	862	874.1	−12
			11/2+	1104	1174.1	−70
		(15/2 1/2)	1/2+	370	431.9	−62
			5/2+	546	548.3	−2
			7/2+	700	697.3	+3
			9/2+	898	911.6	−14
		(13/2 3/2)	1/2+	538	554.6	−17
			3/2+	604	592.2	+12
			5/2+	714	661.2	+53

E 实验值底下划虚线者为该能级的 J^π 值在实验上尚未确定

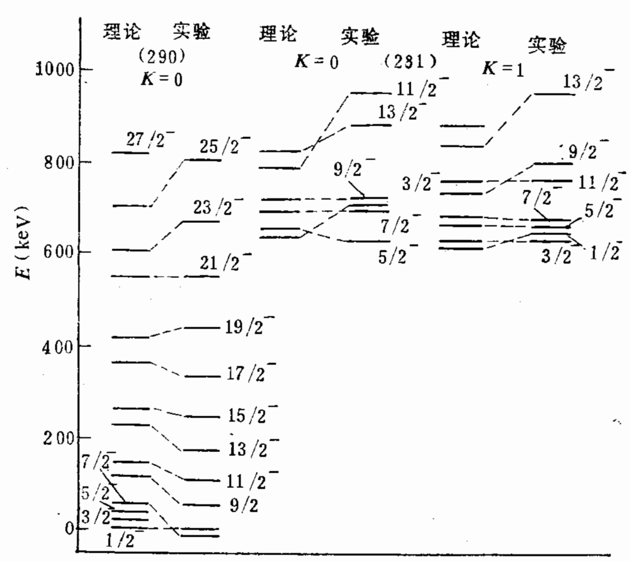

图 1　$N=3$　$M=1$ 的典型能谱　方括号内为 $U^{(B+F)}(5)$ 表示的指标，
圆括号内为 $SO^{(B+F)}(5)$ 和 Spin(5) 表示的指标

下面讨论 $^{103}_{44}\mathrm{Ru}_{59}$ 核．这时有 $N=7$，$M=1$，即 $\mathcal{N}=8$．利用 (4.3) 式，取系数值如下

$\alpha = 50\text{keV}$, $\beta = -10\text{keV}$, $A = 50\text{keV}$, $B = 10\text{keV}$, $C = -23\text{keV}$,
$D = -12\text{keV}$, $F = 22\text{keV}$.

计算 $U^{(B)}(5)$ 最低表示 [7.0.0.00] 所对应的能级中的低激发能级. 表 2 列出了理论计算值,并列出了实验值，后者取自文献 [5]. 表 2 末栏列出 $\Delta = E^{理论} - E^{实验}$值. 如同文献 [6] 那样，引进

$$\phi = \sum_i |E_i{}^{理论} - E_i{}^{实验}| \Big/ \sum_i E_i{}^{实验} \tag{4.4}$$

作为超对称性破缺的量度. 对于 $^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 核的 22 个低激发能级中计算 ϕ 值,我们得到 $\phi = 5.1\%$. 若考虑到其中七个能级所对应的 J^π 值在实验上尚未测定，而将这七个能级除外，对 15 个能级计算 ϕ 值，则得 $\phi = 6.5\%$.

图 2 画出了 $^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 低激发能谱，左边是实验谱，右边是理论谱.

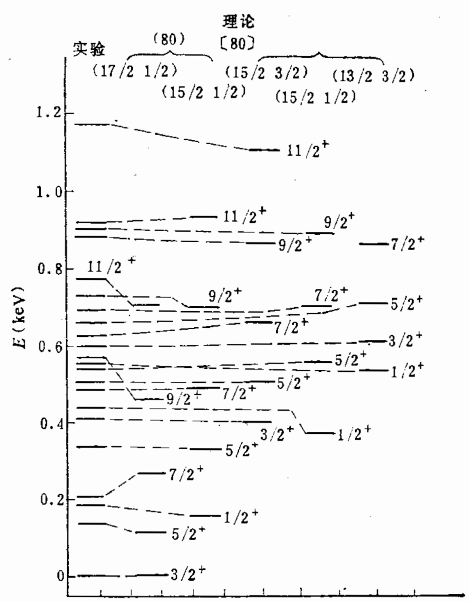

图 2　$^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 核的激发能级

$^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 核低激发能谱的理论计算值与实验值比较表明:在低于 1 MeV 时，$^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 核具有 $U(6/20)$ 超对称性的可能性是存在的.

但是，为了确定 $^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 核是否具有 $U(6/20)$ 超对称性，除了能谱外，还得讨论: (1) $^{103}_{44}\text{Ru}_{59}$ 核的电磁性质，(2) 是否存在相应的核超对称多重态. 有关 (2) 的讨论要涉及 $U(6/20)$ 的 $U(5)$ 极限的普遍情形 ($M = 0, 1, 2 \cdots N$). 在我们以后的文章里将讨论这两个方面.

参　考　文　献

[1] 朱培豫　曹雨芳　吴佑实，高能物理与核物理，9 (1985), 273.
[2] M. Fischler. J. Math Phys **22** (1981), 637.
[3] M. Hamermesh. Group Theory and its Application To Physical Problems (1962)
[4] 陈学俊　张玫　孙洪洲和韩其智，中国科学(英文版). **A25** (1982), 834.
[5] Nuclear Data Sheets **28** (1979), 343.
[6] A. B. Balantekin. I. Bars and F. Iachello., *Nucl Phys* **A370** (1981), 284.
[7] 朱培豫　曹雨芳　吴佑实　高能物理与核物理，**9**(1985), 154.

U (5) LIMIT OF $U(6/20)$ SUPERSYMMETRY IN NUCLEI

ZHU PEI-YU
(Shanghai Institute of Railway Technology)

CAO YU-FANG
(East China Normal University)

WU YOU-SHI
(Anwei Institute of Mechanical and Electrical Engineering)

ABSTRACT

In this paper we discuss the $U(5)$ limit of $U(6/20)$ supersymmetry in nuclei. First we discuss the reduction of the relevant group chain. Then we discuss the dynamical symmetry in the case of $M=1$. Finally we make comparison between the theoretical calculation and experimental measurement in the case of nucleus $^{103}_{44}Ru_{59}$