

# 相互作用玻色子模型中的 $F$ 旋破缺

狄尧民

(徐州师范学院物理系)

## 摘 要

本文首先从  $F$  旋对称性出发, 简单地回顾和讨论了 IBM-I 和 IBM-II 的关系, 然后讨论  $F$  旋的破缺. 为了定量地讨论  $F$  旋的破缺, 我们将系统的哈密尔顿分成两部分: 一部分具有  $F$  旋对称性, 另一部分为  $F$  旋破缺部分. 文章最后给出了有关矩阵元的计算方法. 本文实质上是关于 IBM-II 的一种新的计算方案.

## 一、引 言

相互作用玻色子模型 (IBM) 是近年来发展起来的描述偶偶核低集体态的理论. 在 IBM-II 中, 中子对和质子对被考虑为两种类型的玻色子; 而在 IBM-I 中, 则不区分这两类粒子. IBM-II 的物理图象似乎要比 IBM-I 更为合理. 然而 IBM-I 的成功说明了核中  $F$  旋对称性近似成立. 文献[1]已从  $F$  旋对称出发简单地讨论了 IBM-I 和 IBM-II 的关系, 我们在第二节中对此作了回顾和进一步的讨论. 在第三节中讨论了  $F$  旋的破缺. 为了定量地进行讨论, 我们将系统的哈密顿分为两部分: 一部分具有  $F$  旋对称性, 另一部分为  $F$  旋破缺部分. 这种处理方法的优点之一是在破缺较小的情况下可以使用微扰论. 在第四节中给出了有关矩阵元的计算方法. 由于 IBM-I 和 IBM-II 的主要区别在于  $F$  旋破缺与否, 因此本工作实质上是 IBM-II 的另一种方案.

## 二、IBM 中的 $F$ 旋对称

在 IBM-II 中, 相应的群结构为  $U_\nu(6) \otimes U_\pi(6)$ , 其中下标  $\nu$  与中子玻色子相应,  $\pi$  与质子玻色子相应. 如果系统具有  $F$  旋对称性, 则群结构简化为  $U_F(2) \otimes U(6)$ . 第一个因子与  $F$  旋空间相应, 第二个因子与通常的  $sd$  空间相应. 与 IBM-I 相应, 这里也存在着三种群链

$$U_F(2) \otimes \begin{pmatrix} U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \\ U(6) \supset SU(3) \supset SO(3) \\ U(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \end{pmatrix} \quad (1)$$

群链的约化已由文献[2]给出. 当然在 IBM-II 中还存在另一类物理上有重要意义的群

链

$$\begin{aligned}
 U_v(6) \otimes U_\pi(6) &\supset U_v(5) \otimes U_\pi(5) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3) \\
 U_v(6) \otimes U_\pi(6) &\supset SO_v(6) \otimes SO_\pi(6) \supset SO(6) \supset SO(5) \supset SO(3) \\
 U_v(6) \otimes U_\pi(6) &\supset SU_v(3) \otimes SU_\pi(3) \begin{cases} SU(3) \supset SO(3) \\ SU^*(3) \supset SO(3) \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2)$$

但这些群链不具有  $F$  旋对称性, 我们这里就不再讨论.

如果我们用三个泡利矩阵作为  $U_F(2)$  的生成元, 则玻色子之间的相互作用可以写成如下形式:

$$V_{ij} = {}^3V_{ij} + {}^1V_{ij} = {}^3\mathcal{V} \frac{3 + \sigma_{Fi} \cdot \sigma_{Fj}}{4} + {}^1\mathcal{V} \frac{1 - \sigma_{Fi} \cdot \sigma_{Fj}}{4}, \quad (3)$$

其中  ${}^3V$ ,  ${}^1V$  分别为  $F$  旋三重态和  $F$  旋单态相互作用,  ${}^3\mathcal{V}$ 、 ${}^1\mathcal{V}$  为相互作用的空间部分.  ${}^3\mathcal{V}$  的形式与 IBM-I 中的相同,  ${}^1\mathcal{V}$  中包含三个参量.  ${}^1V$  也可以写成如下形式:

$$\begin{aligned}
 {}^1V = & \omega_1 [(d_v^\dagger d_\pi^\dagger)^{(1)} (\bar{d}_v \bar{d}_\pi)^{(1)}]^{(0)} + \omega_2 [(d_v^\dagger d_\pi^\dagger)^{(3)} (\bar{d}_v \bar{d}_\pi)^{(3)}]^{(0)} \\
 & + \omega_3 [(s_v^\dagger d_\pi^\dagger - d_v^\dagger s_\pi^\dagger)^{(2)} (\bar{s}_v \bar{d}_\pi - \bar{d}_v \bar{s}_\pi)^{(2)}]^{(0)},
 \end{aligned} \quad (4)$$

由于玻色子体系要求总的波函数对称, 则要求  $U_F(2)$  群和  $U(6)$  群有相同的配分.  $F$  旋取值范围为

$$F = \frac{1}{2}(n_v + n_\pi) = \frac{1}{2}N, \frac{1}{2}(N-2), \dots, \frac{1}{2}|n_v - n_\pi|_0 \quad (5)$$

相应的配分为

$$\{N\}, \{N-1, 1\}, \{N-2, 2\}, \dots, \{n_>, n_<\},$$

其中

$$\begin{aligned}
 n_> &= \max(n_v, n_\pi), \\
 n_< &= \min(n_v, n_\pi).
 \end{aligned} \quad (6)$$

系统的态为

$$\begin{aligned}
 &|[f]\alpha LM\rangle \\
 &\equiv |[f]\alpha LM, FM_F\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{h_{[f]}}} \sum_m |[f]\alpha LM/m\rangle |[f]FM_F/m\rangle.
 \end{aligned} \quad (7)$$

其中  $[f]$  为配分,  $h_{[f]}$  是置换群  $S_N$  的不可约表示  $[f]$  的维数,  $m$  为山内符号,  $\alpha$  是为了唯一地标记系统的态而引进的一些附加量子数.

$F$  旋越大, 系统在  $sd$  空间和  $F$  旋空间的对称程度就越高, 其能量就越低. 不同  $F$  旋的态之间的能量差别原则上可用 (1) 式来计算, 但我们也可方便地在哈氏算符中引入  $U(6)$  群的二次 Casimir 算符来区分. 以配分  $\{N\}$  标记的态 ( $F = N/2$ ) 与 IBM-I 相应, 这说明在两空间中均为全对称的态其能量最低, IBM-I 是 IBM-II 考虑了  $F$  旋对称后的低能极限.

### 三、 $F$ 旋的破缺

在 IBM-II 中, 系统的哈密顿可以写成如下形式

$$H = H_x + H_v + V_{xv}, \quad (8)$$

其中  $H_x$  和  $H_v$  分别为质子玻色子和中子玻色子的哈密顿,  $V_{xv}$  为质子玻色子和中子玻色子之间的相互作用。(8)式的一般形式较 IBM-I 包含更多的参数, 因此必须采用简化的哈密顿。现在通常采用的为<sup>[3]</sup>

$$H = \varepsilon(n_{d_x} + n_{d_v}) + xQ_x \cdot Q_v + aM, \quad (9)$$

其中  $n_{d_x}$  和  $n_{d_v}$  分别为质子玻色子和中子玻色子的粒子数算符, 并有

$$Q_\rho = [d_\rho^\dagger \tilde{s}_\rho + s_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho]^{(2)} + \chi_\rho [d_\rho^\dagger \tilde{d}_\rho]^{(2)} \quad \rho = \pi \cdot \nu \quad (10)$$

最后一项中  $M$  为 Majorana 算符。这一简化方案的提出是基于某种微观的考虑。

现在我们从另一侧面来考虑这一问题。由于 IBM-II 对于 IBM-I 的主要区别表现在  $F$  旋的破缺上, 我们可将系统的哈密顿分为两部分—— $F$  旋对称部分和  $F$  旋破缺部分。破缺部分在  $F$  旋空间不再是标量, 并使不同  $F$  值的态相混合。基于微观考虑, 异种玻色子之间的相互作用要强于同种玻色子之间的相互作用, 因此可以认为  $F$  旋破缺部分主要由异种玻色子之间的相互作用引起, 并可认为使  $\Delta F = \pm 1$  的态相互混合的相互作用是主要的, 其余部分可以忽略。则系统的哈密顿可以写成

$$H = H_F + H', \quad (11)$$

其中  $H_F$  具有  $F$  旋对称性, 其二体相互作用具有(3)式的形式。  $H'$  为破缺项, 其具体形式可写成

$$\begin{aligned} H' = & \chi_1 [(s_v^\dagger d_x^\dagger + d_v^\dagger s_x^\dagger)^{(2)} (\tilde{s}_v \tilde{d}_x - \tilde{d}_v \tilde{s}_x)^{(2)} \\ & + (s_v^\dagger d_x^\dagger - d_v^\dagger s_x^\dagger)^{(2)} (\tilde{s}_v \tilde{d}_x + \tilde{d}_v \tilde{s}_x)^{(2)}]^{(0)} \\ & + \chi_2 [(d_v^\dagger d_x^\dagger)^{(2)} (\tilde{s}_v \tilde{d}_x - \tilde{d}_v \tilde{s}_x)^{(2)} \\ & + (s_v^\dagger d_x^\dagger - d_v^\dagger s_x^\dagger)^{(2)} (\tilde{d}_v \tilde{d}_x)^{(2)}]^{(0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

这种处理方法与 IBM-I 型的联系密切, 定量地讨论  $F$  旋破缺较为方便, 当动力学破缺较小时可以方便地使用微扰论。

在实际的计算中, 我们还可用更为简化的哈密顿来讨论。例如我们可用下列哈密顿分别讨论  $SU(3)$  极限情形及  $SU(5)$  向  $SU(3)$  转移情形的  $F$  旋破缺。

$$H_1 = aC_{2U6} + \alpha C_{2SU3} + \beta C_{2SO3} + H' \quad (13a)$$

$$H_2 = aC_{2U6} + a_1 C_{1U5} + \alpha C_{2SU3} + \beta C_{2SO3} + H' \quad (13b)$$

其中  $C_{2U6}$ ,  $C_{2SU3}$ ,  $C_{2SO3}$  分别为  $U(6)$ ,  $SU(3)$ ,  $SO(3)$  群的二次 Casimir 算符,  $C_{1U5}$  为  $U(5)$  群的一次 Casimir 算子。

#### 四、矩阵元的计算

$H'$  能使与配分  $\{N - k, k\}$  与  $\{N - k \mp 1, k \pm 1\}$  相应的态混合。由于我们感兴趣的是能量较低的态, 因此我们主要考虑  $\{N\}$  和  $\{N - 1, 1\}$  相应的态之间的混合。

我们用某一群链来分类的波函数为基矢, 并考虑  $H'$  按这群链变换时的性质, 利用群论方法<sup>[4]</sup>, 可将  $H'$  的矩阵元用该群链的 I. S. F 来表示。

例如, 对于按群  $U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$  来分类的波函数可写成

$$|\{N - k, k\} [nn'] \xi(vv') \Delta LM\rangle \quad (14)$$

其中  $\{N-k, k\}$ ,  $[nn']$ ,  $(\nu\nu')$ ,  $L, M$  分别标记  $U(6), SU(5), SO(5), SO(3), SO(2)$  的不可约表示, 附加量子数  $\xi, \Delta$  的引入是因为  $SU(5)$  到  $SO(5)$  和  $SO(5)$  到  $SO(3)$  的约化不是简单可约的. 但是在与  $U(6)$  的不可约表示  $\{N\}$  和  $\{N-1, 1\}$  相应的群链约化中,  $SU(5)$  到  $SO(5)$  是简单可约的, 附加指标  $\xi$  可略去. 所以, 我们有

$$\begin{aligned} & \langle \{N\}[n_d](\nu)\Delta LM | H' | \{N-1, 1\}[n_1 n_2](\nu_1 \nu_2)\Delta' L' M' \rangle \\ &= \delta_{LL'} \delta_{MM'} \left\{ \chi_1 \left[ \sum_{\nu'' \Delta'' L''} \langle \{N-2\}[n_d-1](\nu'')\Delta'' L'' \otimes \{2\}[1](1) \right. \right. \\ & \quad \cdot 2 \| \{N\}[n_d](\nu)\Delta L \rangle \\ & \quad \cdot \langle \{N-2\}[n_d-1](\nu'')\Delta'' L'' \otimes \{11\}[1](1) \rangle \\ & \quad \left. \left. \cdot 2 \| \{N-1, 1\}[n_1 n_2](\nu_1 \nu_2)\Delta' L' \rangle \right] \right. \\ & \quad \left. + \chi_2 \left[ \sum_{\nu'' \Delta'' L''} \langle \{N-2\}[n_d-2](\nu'')\Delta'' L'' \otimes \{2\}[2](2) \right. \right. \\ & \quad \cdot 2 \| \{N\}[n_d](\nu)\Delta L \rangle \\ & \quad \cdot \langle \{N-2\}[n_d-2](\nu'')\Delta'' L'' \otimes \{11\}[1](1) \rangle \\ & \quad \left. \left. \cdot 2 \| \{N-1, 1\}[n_1 n_2](\nu_1 \nu_2)\Delta' L' \rangle \right] \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

式中带双杠的符号即为  $U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$  的 I. S. F. 对于给定的配分  $\{N-k, k\}$  和  $\{N-k-1, k+1\}$ , 波函数中  $F$  旋部分的贡献都相同. 在上式中, 我们已将它和其他一些常数吸收可调参数  $\chi_1$  和  $\chi_2$ .

“二体”的 I. S. F. 可以用“单体”的 I. S. F. 来表示:

$$\begin{aligned} & \langle \{f_1\} \alpha_1 L_1 \otimes \{f_2\} \alpha_2 L_2 \| \{f\} \alpha L \rangle \\ &= \left\langle \begin{matrix} \{f\} \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \{f_1\} & \{f_2\} \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \right\rangle^{-1} \\ & \quad \cdot \sum_{\alpha' L' l_1 l_2} \langle \{f_1\} \alpha_1 L_1 \otimes \{1\} l_1 \| \{f\} \alpha' L' \rangle \\ & \quad \cdot \langle \{f\} \alpha' L' \otimes \{1\} l_2 \| \{f\} \alpha L \rangle \cdot U(L_1 l_1 L_2; L' l_2) \quad (16) \end{aligned}$$

其中  $\{f\}$ ,  $\{f_1\}$  和  $\{f_2\}$  分别为  $N$  个粒子,  $N-2$  个粒子和最后两个粒子的配分,  $\left\langle \begin{matrix} \{f\} \\ m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \{f_1\} & \{f_2\} \\ m_1 & m_2 \end{matrix} \right\rangle$  为置换群  $S_N$  的标准基和非标准基间的变换系数, 其解析表达式已由文献 [5] 得出.  $U(L_1 l_1 L_2; L' l_2)$  为拉卡系数.

应用拉卡因式分解引理,  $U(6) \supset U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$  I. S. F. 可分解为  $SU(5)$  单态因子和  $U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$  的 I. S. F. 之积.  $SU$  群的单态因子与置换群的外积约化系数 (ORC) 有关. 因此有

$$\begin{aligned} & \langle \{N_1\}[n_1] \otimes \{1\}[1] \| \{f\}[\sigma] \rangle \\ &= \frac{C_{[\sigma] m_1, [\mu] m_2}^{(f) m}}}{C_{[n_1] m_1, [\mu] m_2}^{(N) m'}} \\ & \quad \cdot \langle \{N_1\}[n] \otimes \{1\}[0] \| \{f\}[n] \rangle \quad (17a) \end{aligned}$$

$$= \frac{C_{[n]m_1, [\mu]m_2, \omega_2}^{(f)m}}{C_{[n]m_1, [\mu']m_2, \omega_2'}^{(N)m'}} \quad (17b)$$

上式右方分子和分母均为外积约化系数, 其计算方法已由文献[6]给出.

对于(15)式形式的矩阵元, 我们只需计算如下形式的  $U(5) \supset SO(5) \supset SO(3)$  I. S. F.

$$\langle [n-1](v_1)\Delta_1 L_1 \otimes [1]2 \parallel [n](v)\Delta L \rangle \quad (18a)$$

$$\langle [n-1](v_1)\Delta_1 L_1 \otimes [1]2 \parallel [n-1.1](vv')\Delta L \rangle \quad (18b)$$

(18a) 形式的 I. S. F 即  $d$  玻色子的  $cip.$ , 文献[7]已给出了其数值表. 该表是用算符  $G(SU_5) + \lambda G(R_5)$  在态空间  $[\Psi_{1\dots N-1}(d^{N-1}v_1\alpha_1 L_1)\phi_N(d)]_M^L$  对角化而得出的, 其中  $C_1(SU_5)$  和  $G(R_5)$  分别为  $SU(5)$  和  $SO(5)$  群的 Casimir 算子. 由于态矢量  $[\Psi_{1\dots N-1}(d^{N-1}v_1\alpha_1 L_1)\phi_N(d)]_M^L$  荷载了  $SU(5)$  群的  $[n-1] \otimes [1]$  表示, 而

$$[n-1] \otimes [1] = [n] \oplus [n-1, 1] \quad (19)$$

因此该方法也能用来计算(18.6)形式的 I. S. F.

在大形变区, 用  $U(6) \supset SU(3) \supset SO(3)$  分类的波函数为基矢进行计算较为方便. 这类波函数可写成:

$$| \{N-k, k\} \xi(\lambda\mu) KLM \rangle \quad (20)$$

其中  $\{N-k, k\}$ ;  $(\lambda\mu)$ ,  $L$ ,  $M$  分别标记  $U(6)$ ,  $SU(3)$ ,  $SO(3)$  和  $SO(2)$  的不可约表示,  $\xi$  和  $K$  分别是  $U(6)$  到  $SU(3)$  和  $SU(3)$  到  $SO(3)$  约化而引进的附加量子数. 与  $U(6)$  全对称表示  $\{N\}$  相应的约化中,  $U(6)$  到  $SU(3)$  是简单可约的, 附加量子数  $\xi$  可略去.

为便于计算, 我们将  $H'$  进行适当变换. 我们令

$$\begin{aligned} X_M^\dagger &= C_1 X(\{2\}(40)2M) \\ &= (s^\dagger d_x^\dagger + d_x^\dagger s^\dagger)_M^{(2)} - \frac{2}{\sqrt{7}} (d_v^\dagger d_x^\dagger)_M^{(2)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} Y_M^\dagger &= C_2 X(\{2\}(02)2M) \\ &= (s^\dagger d_x^\dagger + d_x^\dagger s^\dagger)_M^{(2)} + \sqrt{7} (d_v^\dagger d_x^\dagger)_M^{(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_M^\dagger &= C_3 X(\{11\}(21)2M) \\ &= (s^\dagger d_x^\dagger - d_x^\dagger s^\dagger)_M^{(2)} \end{aligned}$$

$$\tilde{X}_M = (-1)^M (X_M^\dagger)^\dagger \quad \tilde{Y}_M = (-1)^M (Y_M^\dagger)^\dagger \quad \tilde{Z}_M = (-1)^M (Z_M^\dagger)^\dagger$$

其中  $X(\{f\}(\lambda\mu)L M)$  表示耦合张量算符, 括号中的符号表示算符按群链变换的性质. 则  $H'$  可写成

$$H' = \tilde{X}_1^\dagger (X^\dagger \tilde{Z} + Z^\dagger \tilde{X})^{(0)} + \tilde{X}_2^\dagger (Y^\dagger \tilde{Z} + Z^\dagger \tilde{Y})^{(0)} \quad (22)$$

$H'$  的矩阵元为:  $\langle \{N\}(\lambda\mu)KLM | H' | \{N-11\}(\lambda'\mu')K'L'M' \rangle = \delta_{LL'} \delta_{MM'}$

$$\begin{aligned} & \left\{ \chi_1' \left[ \sum_{\substack{(\lambda''\mu'') \\ K''L''}} \langle \{N-2\}(\lambda''\mu'')K''L'' \otimes \{2\}(40)2 \parallel \{N\}(\lambda\mu)KL \rangle \right. \right. \\ & \quad \left. \langle \{N-2\}(\lambda''\mu'')K''L'' \otimes \{11\}(21)2 \parallel \{N-11\}\xi(\lambda'\mu')K'L' \rangle \right] \\ & + \chi_2' \left[ \sum_{\substack{(\lambda''\mu'') \\ K''L''}} \langle \{N-2\}(\lambda''\mu'')K''L'' \otimes \{2\}(02)2 \parallel \{N\}(\lambda\mu)KL \rangle \right. \\ & \quad \left. \left. \langle \{N-2\}(\lambda''\mu'')K''L'' \otimes \{11\}(21)2 \parallel \{N-11\}\xi(\lambda'\mu')K'L' \rangle \right] \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

其中带双杠的符号为  $U(6) \supset SU(3) \supset SO(3)$  I. S. F. 波函数中  $F$  旋部分的贡献以及其他一些常数已吸收到参数  $\chi_1$  和  $\chi_2$  中了。

利用“二体” I. S. F 和“一体” I. S. F 之间的关系以及拉卡引理, 矩阵元的计算就归结为“一体”的  $U(6) \supset SU(3)$  I. S. F 和  $SU(3) \supset SO(3)$  I. S. F 的计算。“一体”  $SU(3) \supset SO(3)$  I. S. F 可以根据文献[8]计算,  $U(6) \supset SU(3)$  I. S. F 可用本征函数法计算[6].

其他有关矩阵元也可用类似的方法算出。

计算了有关矩阵元, 将哈密顿对角化即可得到能谱以及相应的波函数, 由波函数以及跃迁算符即可计算电磁跃迁几率。  $F$  旋破缺对跃迁几率的影响来自两个方面: 态的破缺和跃迁算符的破缺。在  $F$  旋对称的情况下, 具有不同  $F$  旋的值的态之间的跃迁是禁戒的, 考虑了  $F$  旋破缺, 即可计算相应的跃迁。下一步的工作准备编制程序, 进行数值计算, 计算结果将另文叙述。

作者感谢周孝谦、陈金全、苏耀中对本工作的支持和有益的讨论, 感谢 A. E. L. Dieperink 的详细讨论和 F. Iachello 的有益建议。

### 参 考 文 献

- [1] A. Arima, T. Otsuka, F. Iachello, I. Talmi, *Phys. Lett.*, **66B**(1977), 205.
- [2] 陈学俊, 张玫, 孙洪洲, 韩其智, 中国科学, (A)(1982), 张玫, 陈学俊, 孙洪洲, 韩其智, 中国科学, (A)(1982), 孙洪洲, 韩其智, 陈学俊, 张玫, 中国科学, (A)(1982).
- [3] T. Otsuka, A. Arima, F. Iachello, I. Talmi, *Phys. Lett.*, **76B**(1978), 139.
- [4] B. C. Wybourne, *Classical Groups for Physicist*, Wiley, N. Y., 1974.
- [5] H. Horie, *J. Phys. Soc.*, (Japan) **19**(1964), 1783.
- [6] 陈金全, 群表示论的新方法, 上海科技出版社, (1983).
- [7] B. Bayman, A. Lande, *Nucl. Phys.*, **77**(1966), 1.
- [8] J. D. Vergados, *Nucl. Phys.*, **A111** (1968), 681.

## F-SPIN BREAKING IN IBM

DI YAO-MIN

(Xuzhou Normal College)

### ABSTRACT

In this note the relation between IBM-I and IBM-II is briefly discussed from the  $F$ -spin symmetry. In order to discuss the symmetry breaking quantitatively, the Hamiltonian is divided into two parts: one is  $F$ -spin symmetric and the other breaks the  $F$ -spin symmetry. Finally the methods for calculating the relevant matrix elements are provided. This work essentially is another scheme for IBM-II.