

均匀场楔形磁铁的精确光学公式

刘继明 毛振麟

(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文推导了均匀场楔形磁铁在中心平面的精确光学公式。磁铁的入口和出口界面是带有一定曲率且与中心轨道成一定的角度。对这精确光学公式在一些特殊情况下的应用也进行了讨论。

一、引 言

在电子被复杂核的准弹性散射以及电子在原子核中激发产生 Δ 共振的实验中,被散射的电子谱具有非常宽(120~250MeV)的结构,适合这类实验的电子散射谱仪常常需要动量范围很宽(如最大最小能量比 $E_{\max}/E_{\min} \approx 2$)而分辨率不一定很高(如1%),建立这样谱仪的实验建议已经提出了^[1]。

在磁谱仪设计中,广泛采用TRANSPCRT程序^[2]。这程序能给出一级和二级光学矩阵,并且具有自动变码拟合等许多功能。因此是磁谱仪设计的重要工具。但在TRANSPORT程序中假设系统中的动量范围 $\delta = (P - P_0)/P_0$ 是一个小量,其中 P_0 是中心轨道粒子的动量, P 是任意轨道粒子的动量。在我们的设计中需要 $\delta \sim +50\% - -25\%$,不能满足TRANSPORT程序所作的假设,高于二级的光学矩阵可能仍有不可忽略的贡献。在DECAY TURTLE程序^[3]中给出了均匀场楔形磁铁的精确公式,其中假定磁铁的入口和出口边界是直的,并与中心轨道相垂直。本文的目的是推导出更普遍的均匀场楔形磁铁的精确公式,包括入口和出口边界是弯曲的,而且与中心轨道成一定的倾角,以便为宽量程电子散射谱仪的设计和数据分析提供理论计算方法。

二、在中心平面上的精确光学公式的推导

图1表示了为中心平面内粒子运动的轨迹。磁铁 M 的入口和出口倾斜角分别为 β_1 和 β_2 。入口和出口面的曲率半径分别为 R_1 和 R_2 。中心轨道的曲率半径为 ρ_0 ,它在 C 、 D 点分别进入和离开磁场区,偏转角为 α 。任意轨道相对于中心轨道的夹角在磁铁入口和出口处分别为 θ_1 和 θ_2 ,它在 A 、 B 点进入和离开磁场区,在磁场区的曲率半径为 ρ 。偏转角为 α' 。 A 、 B 点到中心轨道的入射线和出射线的距离分别为 x_A 和 x_B 。 OC 与 CA 的夹

角为 β_A . OD 与 DB 的夹角为 β_B . 在中心平面上我们选择的坐标是这样的: \widehat{CD} 弧的中心 O 点为原点, $\angle COD$ 的角平分线为 y 轴, 通过 O 点垂直于 y 轴的是 x 轴. 经过适当的几何运算可以得到 \widehat{AB} 弧中心的坐标为:

$$\left[-(\rho_0 + x_A) \sin \frac{\alpha}{2} + x_A \cos \frac{\alpha}{2} \tan \beta_A + \rho \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_1 \right), \right. \\ \left. (\rho_0 + x_A) \cos \frac{\alpha}{2} + x_A \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta_A - \rho \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_1 \right) \right]$$

B 点的坐标为:

$$\left[(\rho_0 + x_B) \sin \frac{\alpha}{2} - x_B \cos \frac{\alpha}{2} \tan \beta_B, (\rho_0 + x_B) \cos \frac{\alpha}{2} + x_B \tan \beta_B \sin \frac{\alpha}{2} \right]$$

B 点的坐标也可以从 O' 为中心, ρ 为半径的圆和 $O'B$ 相交的交点得到. 于是我们有:

$$-(\rho_0 + x_A) \sin \frac{\alpha}{2} + x_A \cos \frac{\alpha}{2} \tan \beta_A + \rho \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_1 \right) - \rho \sin \left(\theta_2 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ = (\rho_0 + x_B) \sin \frac{\alpha}{2} - x_B \cos \frac{\alpha}{2} \tan \beta_B \quad (1)$$

$$(\rho_0 + x_A) \cos \frac{\alpha}{2} + x_A \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta_A - \rho \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_1 \right) + \rho \cos \left(\theta_2 - \frac{\alpha}{2} \right) \\ = (\rho_0 + x_B) \cos \frac{\alpha}{2} + x_B \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta_B \quad (2)$$

由 (1) (2) 得到

$$\rho \sin (\theta_2 - \beta_B) = \rho \sin (\alpha + \theta_1 - \beta_B) - 2\rho_0 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \beta_B \right) \\ - \frac{x_A}{\cos \beta_A} \sin (\alpha - \beta_A - \beta_B) \quad (3)$$

$$x_B = \rho \cos \theta_2 - \rho \cos (\alpha + \theta_1) - \rho_0 (1 - \cos \alpha) + \frac{x_A}{\cos \beta_A} \cos (\alpha - \beta_A) \quad (4)$$

(3) (4) 式给出了在中心平面上任意轨道粒子从磁铁入口处 A 点(它的位置为 x_A, θ_1) 转移到磁铁出口处 B 点(它的位置和方向为 x_B, θ_2) 的精确公式. 同时容易证明任意轨道在磁铁 M 中的偏转角 α' 为

$$\alpha' = \alpha + \theta_1 - \theta_2 \quad (5)$$

在光学公式的矩阵表示方法^[2,4]中, 常用 P, α 点到中心轨道的距离 x_1 和 x_2 来表示 x_A 和 x_B . 用 β_1, β_2 来表示 β_A 和 β_B . 从简单的几何运算可以得到 x_A, β_A 与 x_1, β_1 以及 x_B, β_B 与 x_2, β_2 之间的关系为

$$x_1 = x_A (1 - \tan \theta_1 \tan \beta_A) \quad (6)$$

$$\beta_1 = \beta_A - \sin^{-1} \frac{x_A}{2R_1 \cos \beta_A} \quad (7)$$

$$x_2 = x_B (1 + \tan \theta_2 \tan \beta_B) \quad (8)$$

$$\beta_2 = \beta_B - \sin^{-1} \frac{x_B}{2R_2 \cos \beta_B} \quad (9)$$

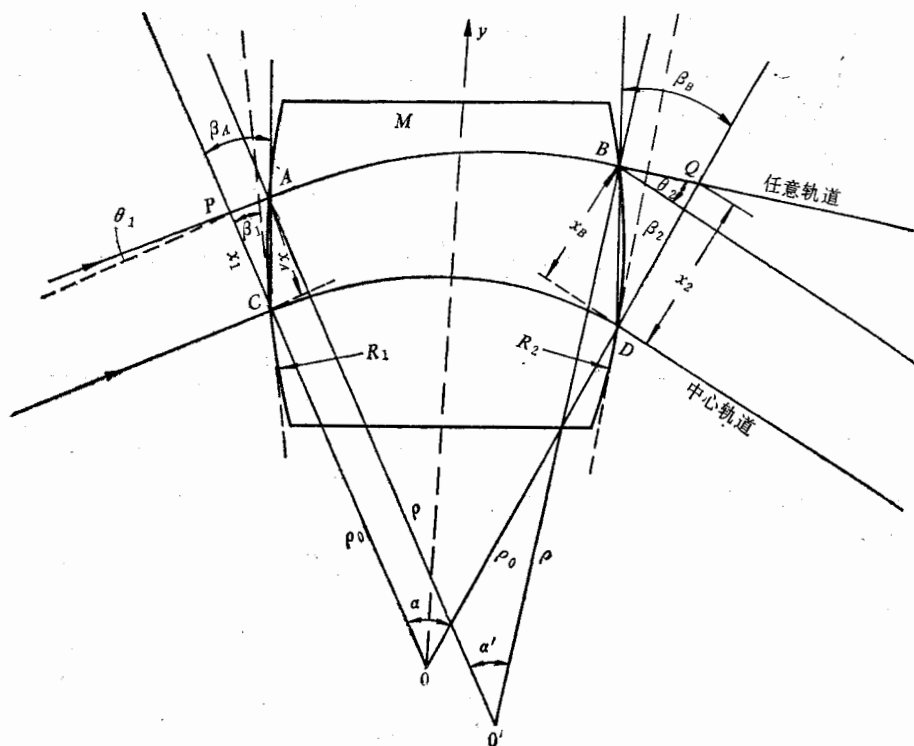


图1 磁中心平面上粒子的轨道

公式(3)(4)和(6)(7)(8)(9)给出了入口和出口边界是带一定曲率的且与中心轨道成一定角度的均匀场楔形磁铁在中心平面内的精确光学公式

三、精确公式的应用

1. 垂直于入口和出口光轴的楔形磁铁,入口边缘和出口边缘的精确公式.

文献[2-4]中,把实际的楔形磁铁(即入口和出口边缘是带有一定曲率的且与中心轨道成一定角度的均匀场楔形磁铁)的光学矩阵看作是入口边缘,垂直于入口和出口光轴的楔形磁铁以及出口边缘三部分光学矩阵相乘的结果.我们从上节推导的普遍公式出发分别导出入口边缘,垂直于入口和出口光轴的楔形磁铁和出口边缘的精确公式

(i) 垂直于入口和出口光轴的楔形磁铁的精确公式

这情况相当在上节的普遍公式中假定: $1/R_1 = 1/R_2 = 0$ 和 $\beta_1 = \beta_2 = 0$ 把这些条件代入(6)一(9)得到 $x_A = x_1$ $x_B = x_2$ $\beta_A = 0$ $\beta_B = 0$. 所以(3)(4)式可简化为:

$$\rho \sin \theta_2 = \rho \sin(\alpha + \theta_1) - (\rho_0 + x_1) \sin \alpha \quad (10)$$

$$x_2 + \rho_0 = \rho \cos \theta_2 - \rho \cos(\alpha + \theta_1) + (x_1 + \rho_0) \cos \alpha \quad (11)$$

(10)(11)是垂直于入口和出口光轴的楔形磁铁的精确公式. 它和 DECAY TORTLE 程序中给出的均匀场楔形磁铁的精确公式是一致的.

如果我们假定 $x_1, x_2, \theta_1, \theta_2$ 和 $\delta = (\rho - \rho_0)/\rho_0$ 都是小量. 把(10)(11)式对这些

小量展开, 计算 θ_2 和 x_2 , 取到二级小量就可得到与文献 [4] 的 (3)(4) 式相同的结果。

(ii) 均匀场楔形磁铁入口边缘的精确光学公式

这情况相当在上节的普遍公式中假定: $\alpha = 0$, $\beta_2 = 0$, $1/R_2 = 0$ 把这些条件代入 (3)–(9) 式得到 $\beta_B = 0$, $x_B = x_2$ 并有

$$\rho \sin \theta_2 = \rho \sin \theta_1 + x_A \tan \beta_A \quad (12)$$

$$x_2 = \rho(\cos \theta_2 - \cos \theta_1) + x_A \quad (13)$$

$$x_1 = x_A(1 - \tan \theta_1 \tan \beta_A) \quad (14)$$

$$\beta_1 = \beta_A - \sin^{-1} \frac{x_A}{2R_1 \cos \beta_A} \quad (15)$$

(12)–(15) 式是均匀场楔形磁铁入口边缘的精确光学公式。

同样, 如果假定 x_1 , x_2 , θ_1 , θ_2 和 δ 都是小量并把 (12)–(15) 对这些小量展开, 计算 θ_2 和 x_2 取到二级小量就可得到与文献 [4] 的 (8)(9) 式相同的结果。

(iii) 均匀场楔形磁铁出口边缘的精确光学公式

这情况相当在上节普遍公式中假定 $\alpha = 0$, $\beta_1 = 0$, $1/R_1 = 0$ 。把这些条件代入 (3)–(9) 式得到 $\beta_A = 0$, $x_A = x_1$ 。并有

$$\rho \sin(\theta_2 - \beta_B) = \rho \sin(\theta_1 - \beta_B) + x_1 \sin \beta_B \quad (16)$$

$$x_B = \rho \cos \theta_2 - \rho \cos \theta_1 + x_1 \quad (17)$$

$$x_2 = x_B(1 + \tan \theta_2 \tan \beta_B) \quad (18)$$

$$\beta_2 = \beta_B - \sin^{-1} \frac{x_B}{2R_2 \cos \beta_B} \quad (19)$$

(16)–(19) 式是均匀场楔形磁铁出口边缘的精确光学公式

把 (16)–(19) 式对 x_1 , x_2 , θ_1 , θ_2 , δ 这些小量展开, 计算 θ_2 和 x_2 , 取到二级小量就可得到与文献 [4] 第 (14)(15) 式相同的结果。

2. 均匀场楔形磁铁(入口和出口边缘是弯曲的, 且与中心轨道成一定角度)的一级和二级光学矩阵

在 (3)(4) 和 (6)–(9) 的均匀场楔形磁铁的精确公式中, 我们假定 x_1 , x_2 , θ_1 , θ_2 和 δ 都是小量。把这些精确公式对这些小量展开, 计算 θ_2 和 x_2 取到二级小量就可得到与文献 [4] 中的第 (16)(17) 式相同的结果。而我们的方法在计算上更简单一些。原则上如需要, 这方法可用于计算比二级更高级的光学矩阵。

3. 矩形磁铁的精确光学公式

在束流运输系统中常用极头为矩形的均匀场偏转磁铁, 这类矩形磁铁是实验室的通用磁铁。这情况相当于在上节的普遍公式中假定: $1/R_1 = 1/R_2 = 0$, $\beta_A = \beta_B = \beta_1 = \beta_2 = \frac{\alpha}{2}$ 。把这些条件代入上节的精确公式得到

$$\theta_2 = \frac{\alpha}{2} - \sin^{-1} \left[\frac{2\rho_0}{\rho} \sin \frac{\alpha}{2} - \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \theta_1 \right) \right] \quad (20)$$

$$x_2 = \left(1 + \tan \theta_2 \tan \frac{\alpha}{2} \right) \left[\rho \cos \theta_2 - \rho \cos(\alpha + \theta_1) \right]$$

$$- \rho_0(1 - \cos\alpha) + x_1 / \left(1 - \tan\theta_1 \tan \frac{\alpha}{2}\right) \quad (21)$$

(20)(21) 是矩形磁铁的精确光学公式的显函数表达式。

参 考 文 献

- [1] 毛振麟, 王朝俊, 电子散射的低分辨研究高能所内部报告 (1984).
- [2] K. L. Brown, F. Rothacker, D. C. Carey and Ch. Iselin, TRANSPORT-A Computer Program for Designing Charged Particle Beam Transport Systems SLAC Report 91 (1977).
- [3] K. L. Brown and Ch. Iselin, DECAY TURTLE- A Computer Program for Simulating Charged Particle Beam Transport Systems, Including Decay Calculations CERN 74-2 (1974).
- [4] K. L. Brown, R. Belbeoch and P. Bounin, *Rev. Sci. Instr.*, 35 (1964), 482.

EXACT OPTICS FORMULA SET FOR THE UNIFORM-FIELD WEDGE MAGNET

LIU JI-MING MAO ZHEN-LIN

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The exact formula set for the midplane of the uniform-field wedge magnet is derived. The calculations include input and output wedges and curved surface on the input and output faces. The applications of the exact formula set in some cases are discussed.