第9卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 6
1985年11月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1985

相对论性等时方程的厄密性

卫 华 尹鸿钧 阮图南
(中国科技大学)

摘 要

本文系统地分析了各种时间平移算子的物理性质的差别,合理地利用 Feynman 传播函数构造时间平移算子,导出了相对论性等时方程的厄密位势. 从而使等时方程成为一个相对论性的 Schrödinger 方程,其哈密顿量是一个厄密的微分-积分算子. 计算了最小电磁耦合下的一级等时位势. 在两个粒子的质量比趋于无限时方程自然退化为 Dirac 方程.

一、引 言

Schrödinger 方程作为量子力学的基本方程在研究低速微观现象中发挥了巨大的作用,至今仍然是探索低能现象的物理规律的基本工具. 在这些研究中,从单体问题到多体问题,从束缚态到散射态,从原子、分子到原子核结构,Schrödinger 方程涉及到一个广泛而深入的微观领域,这是其它方程所不能比拟的. 诚然,这个方程是非相对论性的,不具有“相对论协变性”. 然而在相对论性理论中,虽然时间与空间被纳入四维协变矢量,但是时间与空间在物理观测上毕竟是有区别的,在理论上也并非处于完全同等的地位. 甚至在高能范围的相对论性量子现象的实验检测也需要把测量与几率概念联系起来. 而粒子于一段时间内在空间某点出现的“几率”却是一个与三维空间相联系的非协变量. 因此,与几率相联系的应该是仅含一个时间的空间波函数,即 Schrödinger 波函数,它不仅在实验测量中是必要的,而且在理论上也应占有一定的地位.

通过对光量子及高能粒子过程的研究而建立起来的量子场论揭示出粒子运动的新的规律性. 这些规律性常常是 Schrödinger 方程不能描述的. 因此就需要在场论基础上建立一个描述多粒子系统的相对论性方程. Nambu, Schwinger, Salpeter 和 Bethe 等人分别独立地导出了所谓的 B-S 方程[1]. 这样,就可以将 Schrödinger 方程、Dirac 方程、Klein-Gordon 方程和 Breit 方程以及其它一些唯象性方程作为 B-S 方程的某种近似而从 B-S 方程导出[2]. 而且 B-S 方程包含了各种虚粒子过程给出的效应. 因此,与非相对论性的 Schrödinger 方程相比,相对论性的 B-S 方程无疑取得了明显的进步.

但是象 B-S 方程这种描述多粒子系统的方程由于含有多个时间而产生了极为复杂的性质. 甚至在经典情况下,多个时间也不应是互相独立的变量,而必须加上适当的约束才

本文 1984年6月21日收到.

能成为一个自洽的力学系统[3]. 因此如果描述 n 个粒子系统的方程有 n 个时间,则必然含有多余的非物理自由度. B-S 方程就是具有这种性质的方程[4]. 这样就出现了一些从多体相对论性方程出发分离出三维单时方程的研究(参考[4]所引的文献[5—10]). 例如在文献[5]中提出了相对论性波函数的概念. 文献[4]在纠正 Todorov 的错误的基础上,从 B-S 方程出发严格地导出了相对论性等时方程. 这种方程消除了非物理的鬼态,并得出 B-S波函数可用它的等时 P 分表示出的重要结论. 但是它存在一个尚待解决的所谓"厄密性问题"——位势不厄密,而且方程与共轭波函数满足的方程没有共轭关系.

由此本文对等时方程的时间平移算子进行了讨论,分析了它们的物理性质,并指出了用费曼传播子构造时间平移算子的合理性. 在第三节导出了厄密的等时位势,使得等时方程的总哈密顿量成为厄密算子,从而使等时方程化为一个相对论性 Schrödinger 方程. 第四节讨论了动量空间方程. 计算了最小电磁耦合下两个不等质量粒子系统的一阶等时位势. 在单体极限下证明方程自然退化为 Dirac 方程. 而在非相对论近似下给出通常的二体 Schrödinger 方程和类氢原子能谱.

二、自由费密子的时间平移算子

自由费密子的波函数可用量子场论表述为[6]

$$u_{pr}(x) = \langle 0|\psi(x)|pr\rangle = u_{pr}e^{ipx - iE_pt}V^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.1}$$

其共轭波函数为

$$\bar{u}_{pr}(x) = \langle pr|\bar{\psi}(x)|0\rangle = \bar{u}_{pr}e^{-ipx + iE_pt}V^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

反粒子波函数与共轭波函数分别为

$$v_{pr}(x) = \langle pr|\psi(x)|0\rangle = v_{pr}e^{-ipx + iE_pt}V^{-\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

和

$$\bar{v}_{pr}(x) = \langle 0|\bar{\psi}(x)|pr\rangle = \bar{v}_{pr}e^{ipx - iE_pt}V^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

费曼在提出传播函数时[7]给出了费密子传播函数 S_F 的下述性质,即对任意正频波函数 $u_{pr}(x)$ 有

$$\theta(t - t')u_{pr}(x) = \int d^3x' S_F(x - x')\beta u_{pr}(x'). \tag{2.5}$$

类似地还可写出

$$\theta(t' - t)\bar{u}_{pr}(x) = \int d^3x' \bar{u}_{pr}(x')\beta S_F(x' - x), \tag{2.6}$$

$$-\theta(t' - t)v_{pr}(x) = \int d^3x' S_F(x - x')\beta v_{pr}(x'), \tag{2.7}$$

$$-\theta(t - t')\bar{v}_{pr}(x) = \int d^3x' \bar{v}_{pr}(x')\beta S_F(x' - x). \tag{2.8}$$

这些关系亦可由 S_F 的表达式

$$\begin{aligned} S_F(x) &= \frac{-i}{(2\pi)^4}\int d^4p\, e^{ipx}\frac{m - i\gamma p}{m^2 + p^2 - i\varepsilon} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\, e^{ipx - iE_p|t|}[\theta(t)\Lambda_+(\boldsymbol{p}) - \theta(-t)\Lambda_-(\tilde{\boldsymbol{p}})]\beta \end{aligned} \tag{2.9}$$

得出．从费曼图看，它们表示入射（出射）粒子波函数 $u_{\boldsymbol{p}r}(x)(\bar{u}_{\boldsymbol{p}r}(x))$ 顺着 S_F 线传播，入射（出射）反粒子波函数 $\bar{v}_{\boldsymbol{p}r}(x)(v_{\boldsymbol{p}r}(x))$ 逆 S_F 线传播．考虑可区分二费密子自由波函数

$$\chi^0(1,2)=\langle 0|T\psi_1^{in}(x_1)\psi_2^{in}(x_2)|\boldsymbol{p}_2r_2\boldsymbol{p}_1r_1\rangle=u_{\boldsymbol{p}_1r_1}u_{\boldsymbol{p}_2r_2}e^{ip_1x_1+ip_2x_2}V^{-1}\tag{2.10}$$

和

$$\bar{\chi}^0(1,2)=\langle\boldsymbol{p}_1r_1\boldsymbol{p}_2r_2|T\bar{\psi}_2^{in}(x_2)\bar{\psi}_1^{in}(x_1)|0\rangle=\bar{u}_{\boldsymbol{p}_2r_2}\bar{u}_{\boldsymbol{p}_1r_1}e^{-ip_1x_1-ip_2x_2}V^{-1}.\tag{2.11}$$

定义与 B-S 波函数 χ 相应的等时波函数为

$$\Phi(12)=\delta(t_1-t_2)\chi(12)=\delta(t_1-t_2)\langle 0|T\psi_1(1)\psi_2(2)|\boldsymbol{p}\alpha\rangle\tag{2.12}$$

和

$$\bar{\phi}(12)=\delta(t_1-t_2)\bar{\chi}(12)=\delta(t_1-t_2)\langle\boldsymbol{p}\alpha|T\bar{\psi}_2(2)\bar{\psi}_1(1)|0\rangle\tag{2.13}$$

则利用 S_F 可以构造时间平移算子

$$U(121'2')=\delta(11')S_2^F(22')\beta_2+S_1^F(11')\beta_1\delta(22'),\tag{2.14}$$

$$\bar{U}(121'2')=\beta_1\beta_2U(121'2')\beta_1\beta_2,\tag{2.15}$$

以致任意时空点 (x_1, x_2) 的自由 B-S 波函数可用等时波函数表述为

$$\chi^0(12)=\int d^4x_1'd^4x_2'U(121'2')\phi^0(1'2'),\tag{2.16}$$

$$\bar{\chi}^0(12)=\int d^4x_1'd^4x_2'\bar{\phi}^0(1'2')\bar{U}(1'2'12).\tag{2.17}$$

而对正反费密子的自由波函数

$$\chi^0(12)=\langle 0|T\psi^{in}(1)\bar{\psi}^{in}(2)|\boldsymbol{p}_2r_2\boldsymbol{p}_1r_1\rangle=u_{\boldsymbol{p}_1r_1}(1)\bar{v}_{\boldsymbol{p}_2r_2}(2)\tag{2.18}$$

$$\bar{\chi}^0(12)=\langle\boldsymbol{p}_1r_1\boldsymbol{p}_2r_2|T\psi^{in}(2)\bar{\psi}^{in}(1)|0\rangle=v_{\boldsymbol{p}_2r_2}(2)\bar{u}_{\boldsymbol{p}_1r_1}(1)\tag{2.19}$$

则有类似的时间平移算子

$$U(122'1')=S_1^F(11')\tilde{\beta}_1\delta(22')-\delta(11')\tilde{\beta}_2S_2^F(2'2),\tag{2.20}$$

$$\bar{U}(1'2'21)=\tilde{\beta}_1S_1^F(1'1)\delta(2'2)-\delta(1'1)S_2^F(22')\tilde{\beta}_2.\tag{2.21}$$

下面我们将讨论利用不同的奇异函数所构造的时间平移算子的物理性质．例如文献[4]和[8]利用反对易函数 $S(x, x')$ 构造时间平移算子

$$U_s(121'2')=-i[(1-\lambda)S_1(11')\beta_1\delta(22')+\lambda\delta(11')S_2(22')\beta_2],\tag{2.22}$$

$$U_S(121'2')=-S_1(11')\beta_1S_2(22')\beta_2\delta(X_0-X_0'),\tag{2.23}$$

以及利用推迟格林函数 $S^R(x, x')$ 构造时间平移算子．

$$U_R(121'2')=iS_1^R(11')\beta_1\delta(22')+i\delta(11')S_2^R(22')\beta_2.\tag{2.24}$$

在文献[9]中还利用超前格林函数构造了时间平移算子 U_A．显然它们具有不同的物理性质，并导致不同的结果：

（1）通过时间平移算子 U_{SS} 可由任一时刻 X_0' 的等时波函数推移两个粒子的时间，确定时刻 t_1t_2 的 B-S 自由波函数．特别是 X_0' 可以取质心时间．但是时间平移算子 U_R、U_S、U 只能推移一个粒子的时间．

（2）时间平移算子 U_S 有一些不定性，例如它以 λ 为权重将粒子 2 的时间从 X_0' 推移到 t_2．但是时间平移算子 U_{SS}、U_R、U 没有这种不定性．

（3）时间平移算子 U_{SS}、U_S、U_R 仅仅在每个粒子前后坐标 x_i' 与 $x_i(i=1, 2)$ 为类空间隔时才有贡献．即 x_i' 处于 x_i 为顶点的光锥内的波函数 $\Phi^0(\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0')$ 才对 $\chi^0(12)$ 有

贡献，积分区域 $|\boldsymbol{x}_i' - \boldsymbol{x}_i| \leqslant |t_i' - t_i|$ 是有限空间，奇异性较低．时间平移算子 U 在光锥外关于类空间隔有指数衰减式的贡献，积分区域是无限大空间，奇异性较高．

(4) 按照时间平移算子 U_{SS} 和 U_S，粒子和反粒子既可由 x_i 为顶点的前光锥内向 x_i 传播，又可由后光锥内向 x_i 传播．如果用 Feynman 图语言讲，"S 线"是双向性的，粒子和反粒子都可以顺时间传播，也可以逆时间传播．按照时间平移算子 U_R，$u_{pr}(x)$ 与 $u_{pr}(x)$ 都可由前光锥内向 x_i 点顺时间传播．这些情况与因果律不符[7]．例如按照时间平移算子 U_{SS} 从质心时间 X_0 推移两个粒子 $u_{p_1r_1}(\boldsymbol{x}_1'X_0)$ 与 $u_{p_2r_2}(\boldsymbol{x}_2'X_0)$，其中必有一个"向过去"传播到 $x_i(t_i < X_0)$，这就与因果律矛盾．时间平移算子 U 使粒子 $u_{pr}(x)$ 顺时间传播，使反粒子 $v_{pr}(x)$ 逆时间传播，这就保证了粒子与反粒子都是"由过去向未来"传播，这与因果律是一致的．因此，时间平移算子 U 处于优越地位，它表现了费曼传播子的因果性．

(5) 利用时间平移算子 U_{SS}、U_S 或 U_R 构成的传播函数 Q (见(3.10)式)所得到的不可约核 J (见 3.12 式)不是 B-S 不可约核的 Feynman 图的重排列．

(6) 利用时间平移算子 U_{SS}，U_S 或 U_R 得到的等时位势难以给出厄密的形式．实际上若对 B-S 共轭方程也使用这种时间平移算子导出相应的等时方程的共轭方程，则可以证明这种等时位势必定是非厄密的． 下面的计算表明：用 S_F 构造的时间平移算子 U 导致一个 B-S 不可约核的重排列核 J (见 3.12 式)并给出明显厄密的等时位势，位势函数可用 Feynman 图进行分析．

时间平移算子 U_A 的主要性质与 U_R 类似．上述时间平移算子的适当组合仍可给出新的时间平移算子．但是这种可能的组合对给出一个厄密位势并不提供益处．

三、等时方程的厄密位势

考虑质量分别为 m_1 与 m_2 的两个可区分粒子组成的系统． 质心坐标和相对坐标分别为

$$X = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 \tag{3.1}$$

和

$$x = x_1 - x_2, \tag{3.2}$$

其中 $\eta_i = m_i/(m_1 + m_2)$，$i = 1, 2$．相应的质心动量与相对动量分别为

$$P = p_1 + p_2 \tag{3.3}$$

和

$$q = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2. \tag{3.4}$$

由此给出等式 $p_1x_1 + p_2x_2 = PX + qx$．引进两体 B-S 波函数

$$\chi(12) = \langle 0|T\psi_1(1)\psi_2(2)|\boldsymbol{P}\alpha\rangle. \tag{3.5}$$

它所满足的方程为

$$(G_0'^{-1} - I^{BS})\chi = 0, \tag{3.6}$$

其中 $G_0' = S_1'^F S_2'^F$，S'^F 是重正化的两点 Green 函数．这个方程可改写为

$$(G_0^{-1} - I)\chi = 0, \tag{3.7}$$

其中 $G_0 = S_1^F S_2^F$，S_i^F 是自由物理粒子的 Feynman 传播函数，$I = I^{BS} + G_0^{-1} - G_0'^{-1}$ 是包含外线辐射修正的重正化两体 B-S 不可约核．将方程(3.7)写成积分方程

$$\chi = \chi^0 + G_0 I \chi = \chi^0 + G_0 T \chi^0, \tag{3.8}$$

式中散射振幅 T 定义为

$$T = I + I G_0 T. \tag{3.9}$$

类似文献[4]作下列处理，即让 T 按

$$Q(121'2') = \int d^4x_1'' d^4x_2'' U(121''2'')\delta(t'')G_0(1''2''1'2') \tag{3.10}$$

传播，满足积分方程

$$T(121'2') = J(121'2') + \int d^4(y_1y_2y_1'y_2')T(12y_1y_2)Q(y_1y_2y_1'y_2')J(y_1'y_2'1'2'). \tag{3.11}$$

由此给出一个新的核 J，易证 J 是 I 的重排列，即

$$\begin{aligned} J(121'2') = I(121'2') + \int d^4(y_1y_2y_1'y_2')I(12y_1y_2)[G_0(y_1y_2y_1'y_2') \\ - Q(y_1y_2y_1'y_2')]J(y_1'y_2'1'2'). \end{aligned} \tag{3.12}$$

于是可导出等时波函数满足的方程为

$$\phi(12) = \phi^0(12) + \int d^4(x_1'x_2')\delta(t)\{G_0JU\}(121'2')\phi(1'2'). \tag{3.13}$$

其中引进了符号

$$\{AB\cdots C\}(121'2') = \int d^4(y_1y_2\cdots)A(12y_1y_2)B(y_1y_2\cdots)\cdots C(\cdots 1'2').$$

其次，B-S 方程的共轭方程为

$$\bar{\chi} = \bar{\chi}^0 + \bar{\chi} I G_0. \tag{3.14}$$

采用本文的时间平移算子，并注意到由 (2.15) 式易得

$$\begin{aligned} \bar{Q}(121'2') &\equiv \int d^4(x_1''x_2'')G_0(121''2'')\delta(t'')\bar{U}(1''2''1'2') \\ &= \int d^4(x_1''x_2'')U(121''2'')\delta(t'')G_0(1''2''1'2') \\ &= Q(121'2'), \end{aligned} \tag{3.15}$$

则可导出等时共轭波函数满足的方程[10]

$$\bar{\phi}(12) = \bar{\phi}^0(12) + \int d^4(x_1'x_2')\bar{\phi}(1'2')\{\bar{U}JG_0\}(1'2'12)\delta(t). \tag{3.16}$$

定义微分算子

$$D_x = i\frac{\partial}{\partial X_0} - H_1(-i\nabla_1) - H_2(-i\nabla_2), \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{D}_x = -i\frac{\boldsymbol{\partial}}{\partial X_0} - H_1(i\boldsymbol{\nabla}_1) - H_2(i\boldsymbol{\nabla}_2), \tag{3.18}$$

其中 $H_i(-i\nabla_i) = -i\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \nabla_i + \beta_i m_i$，则有

$$D_x G_0(121'2') = iU(121'2')\beta_1\beta_2, \tag{3.19}$$

$$G_0(121'2')\beta_1\beta_2\boldsymbol{D}_{x'} = iU(121'2'), \tag{3.20}$$

$$D_x\phi^0(12) = \bar{\phi}^0(12)\beta_1\beta_2\boldsymbol{D}_x = 0. \tag{3.21}$$

于是由 (3.13) 式与 (3.16) 式立得微分积分方程

$$D_x\phi(12) = i\delta(t)\int d^4(x_1'x_2')\{U\beta_1\beta_2 JU\}(121'2')\phi(1'2') \tag{3.22}$$

$$\bar{\phi}(12)\beta_1\beta_2\boldsymbol{D}_x = i\int d^4(x_1'x_2')\bar{\phi}(1'2')\{\bar{U}JU\}(1'2'12)\delta(t) \tag{3.23}$$

定义

$$\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int dt\,\phi(12), \tag{3.24}$$

$$\phi^+(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int dt\,\bar{\phi}(12)\beta_1\beta_2, \tag{3.25}$$

$$V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = i\int dt\,dt'\,\delta(t)\{U\beta_1\beta_2JU\}(121'2')\delta(t'), \tag{3.26}$$

则 (3.22) 式与 (3.23) 式分别变为

$$D_x\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\phi(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'), \tag{3.27}$$

$$\phi^+(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_x = \int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'\phi^+(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')V(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2). \tag{3.28}$$

若将 (3.28) 式作厄密共轭操作，则得到

$$D_x\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'[V(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)]^+\phi(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'). \tag{3.29}$$

注意到 V 是由一系列编时 Green 函数所构成，而 V^+ 将其中的编时乘积变为反编时乘积，因此与通常对过程的描述不相符合。但由于等时波函数具有性质（符号的定义见 (3.25) 式与(2.13) 式）

$$\phi^+(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = [\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)]^+, \tag{3.30}$$

所以波函数 $\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)$ 不但满足 (3.27) 式，而且满足 (3.29) 式. 于是，尽管

$$V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') \neq [V(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)]^+, \tag{3.31}$$

但是这两个量之间的差乘以等时波函数积分时必然消去，即

$$\int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'\{V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') - V(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)^+\}\phi(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = 0. \tag{3.32}$$

因此可定义等时位势

$$\hat{V}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2') = \frac{1}{2}V(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) + \frac{1}{2}V(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0x_1\boldsymbol{x}_2)^+, \tag{3.33}$$

它具有明显的厄密性

$$\hat{V}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')^+ = \hat{V}(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2). \tag{3.34}$$

由 (3.27) 式与 (3.29) 式得

$$D_x\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) = \int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'\hat{V}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\phi(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'). \tag{3.35}$$

由 (3.28) 式和 (3.27) 式的厄密共轭操作又得

$$\phi^+(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)\boldsymbol{D}_x = \int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'\phi^+(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\hat{V}(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2',\ X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2). \tag{3.36}$$

显然 (3.35) 式与 (3.36) 式互为厄密共轭，即等时波函数满足的方程与其共轭波函数满足的方程有厄密共轭关系。由此只需研究方程(3.35)就足够了. 利用 D_x 的定义可将(3.35)改写为

$$i\frac{\partial}{\partial X_0}\phi(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)=\int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'H(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\phi(X_0\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2'),\tag{3.37}$$

其中总哈密顿量H是厄密算子

$$\begin{aligned}H(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')=&[H_1(-i\nabla_1)+H_2(-i\nabla_2)]\delta(X_0-X_0')\delta(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_1')\delta(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_2')\\&+\hat{V}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2').\end{aligned}\tag{3.38}$$

这样就得到了一个相对论性的 Schrödinger 方程，它的位势函数包括了量子场相互作用过程的各级贡献，也包含了各种虚粒子过程的贡献。根据H的厄密性，本征方程

$$\int dX_0'd^3x_1'd^3x_2'H(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2,\ X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')\phi_E(X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')=E\phi_E(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)$$

将给出质量谱的物理值。

四、动量空间和位势的一级近似

根据时空的平移不变性，哈密顿H是坐标差的函数。相应的付氏变换可以表述为

$$\begin{aligned}H(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2X_0'\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{x}_2')&=\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}e^{iP(X-X')}H_P(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')\\&=\int\frac{d^4P}{(2\pi)^4}\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}e^{iP(X-X')-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{q}'\boldsymbol{x}'}H_P(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}').\end{aligned}\tag{4.1}$$

显然厄密性给出

$$H_P(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')^+=H_P(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}),\tag{4.2}$$

$$H_P(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')^+=H_P(\boldsymbol{q}'\boldsymbol{q}).\tag{4.3}$$

我们称 H_P 为相对运动波函数的哈密顿，并可写成下列形式

$$H_P(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')=[H_1(\eta_1\boldsymbol{P}-i\nabla)+H_2(\eta_2\boldsymbol{P}+i\nabla)]\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+\hat{V}_P(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'),\tag{4.4}$$

$$H_P(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')=[H_1(\eta_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{q})+H_2(\eta_2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q})]\delta(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')+\hat{V}_P(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}').\tag{4.5}$$

将等时波函数分离出质心运动部分，可得

$$\phi_{P\alpha}(X_0\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)=e^{i\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}-iE_Pt}/\sqrt{2E_PV}\,\phi_{P\alpha}(\boldsymbol{x})\tag{4.6}$$

$$\phi_{P\alpha}(\boldsymbol{x})=\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}e^{i\boldsymbol{q}\boldsymbol{x}}\phi_{P\alpha}(\boldsymbol{q}).\tag{4.7}$$

于是相对运动波函数遵循的方程为

$$\int d^3x'H_P(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')\phi_P(\boldsymbol{x}')=E_P\phi_P(\boldsymbol{x}),\quad P=(\boldsymbol{P},iE_P).\tag{4.8}$$

或

$$[E_P-H_1(\eta_1\boldsymbol{P}+\boldsymbol{q})-H_2(\eta_2\boldsymbol{P}-\boldsymbol{q})]\phi_P(\boldsymbol{q})=\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\hat{V}_P(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')\phi_P(\boldsymbol{q}').\tag{4.9}$$

下面考虑最小电磁耦合．设两个粒子分别带有电荷 e_1 和 e_2，在 Coulomb 规范下，光子的传播函数为

$$D^F_{\mu\nu}(k)=\begin{cases}\dfrac{-i}{\boldsymbol{k}^2} & 当\ \mu=\nu=4\\[2ex]-i\left(\delta_{ij}-\dfrac{k_ik_j}{\boldsymbol{k}^2}\right)\Big/(\boldsymbol{k}^2-k_0^3-i\varepsilon) & i,j=1,2,3\\[2ex]0 & 其它\end{cases}\tag{4.10}$$

相应的 $\alpha=\frac{e^2}{4\pi}$ 级等时位势经过冗长的计算可表述为

$$\begin{aligned}\hat{V}_{o,M}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') &= \frac{e_1e_2}{4\omega}\left[\frac{H_1(\boldsymbol{q})}{E_1}+\frac{H_2(-\boldsymbol{q})}{E_2}\right]\left[\frac{H_1(\boldsymbol{q}')}{E_1'}+\frac{H_2(-\boldsymbol{q}')}{E_2'}\right] \\ &+\frac{e_1e_2}{2\omega}\left[\frac{\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_2^+(-\boldsymbol{q}')}{E_1+E_2'+\omega-M}+\frac{\Lambda_2^+(-\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_1^+(\boldsymbol{q}')}{E_2+E_1'+\omega-M}\right. \\ &+\frac{\Lambda_1^-(\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_2^-(-\boldsymbol{q}')}{E_1+E_2'+\omega+M}+\frac{\Lambda_2^-(-\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_1^-(\boldsymbol{q}')}{E_2+E_1'+\omega+M} \\ &-\frac{\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_1^-(\boldsymbol{q}')+\Lambda_1^-(\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_1^+(\boldsymbol{q}')}{E_1+E_1'+\omega} \\ &\left.-\frac{\Lambda_2^+(-\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_2^-(-\boldsymbol{q}')+\Lambda_2^-(-\boldsymbol{q})\Gamma\Lambda_2^+(-\boldsymbol{q}')}{E_2+E_2'+\omega}\right].\end{aligned} \tag{4.11}$$

其中

$$\Gamma=-(\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1\cdot\boldsymbol{k}\ \boldsymbol{\alpha}_2\cdot\boldsymbol{k}/\boldsymbol{k}^2),\quad \boldsymbol{k}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}',$$

$$\omega=|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|,\ E_i=\sqrt{m_i^2+\boldsymbol{q}^2},\quad E_i'=\sqrt{m_i^2+\boldsymbol{q}'^2},\quad \Lambda_i^{\pm}(\boldsymbol{p})=\frac{E_i\pm H_i(\boldsymbol{p})}{2E_i}.$$

显然 (4.11) 式满足厄密性条件 (4.3) 式. 对于瞬时作用

$$\frac{e_1e_2}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\,\delta(t)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,e^{ikx}\frac{e_1e_2}{\boldsymbol{k}^2}, \tag{4.12}$$

只须计算 Coulomb 规范下光子传播函数的 4-4 分量,有

$$\begin{aligned}\hat{V}_{瞬}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}') &= \frac{e_1e_2}{4|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|}\left[\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})-\Lambda_1^-(\boldsymbol{q})+\Lambda_2^+(-\boldsymbol{q})-\Lambda_2^-(-\boldsymbol{q})\right] \\ &\cdot\left[\Lambda_1^+(\boldsymbol{q}')-\Lambda_1^-(\boldsymbol{q}')+\Lambda_2^+(-\boldsymbol{q}')-\Lambda_2^-(-\boldsymbol{q}')\right].\end{aligned} \tag{4.13}$$

若忽略位势中虚粒子的贡献,则 (4.13) 式给出 Coulomb 位

$$\hat{V}(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}')=\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|^2}. \tag{4.14}$$

由此,方程 (4.9) 变为质心系方程

$$[M-H_1(\boldsymbol{q})-H_2(-\boldsymbol{q})]\phi_M(\boldsymbol{q})=\int\frac{d^3q^3}{(2\pi)^3}\,\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|^2}\,\phi_M(\boldsymbol{q}'). \tag{4.15}$$

现在很容易由上式得出 Coulomb 场中的单粒子 Dirac 方程. 考虑在条件

$$\frac{m_2}{m_1}\to\infty,\quad |\boldsymbol{q}|\leqslant m_1\ (\text{“粒子 1”为相对论性的}) \tag{4.16}$$

下,由于在质心系中“粒子2”速度很小,因而可以认为它的 4 个旋量分量分为“大分量”和“小分量”

$$\phi=\begin{bmatrix}\phi_{大}\\ \phi_{小}\end{bmatrix},\ \phi_{小}(\boldsymbol{q})\sim\frac{\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{q}}{m_2+E_{\boldsymbol{q}}}\,\phi_{大}(\boldsymbol{q})\sim 0. \tag{4.17}$$

因此,对比较重的“粒子 2”,利用 (4.16) 式中

$$\frac{1+\beta_2}{2}H_2(-\boldsymbol{q})\phi_M(\boldsymbol{q})\approx m_2\varphi_M(\boldsymbol{q}),\quad \varphi_M(\boldsymbol{q})=\frac{1+\beta_2}{2}\,\phi_M(\boldsymbol{q}). \tag{4.18}$$

这样，若记 $E=M-m_2$，则(4.15)式便成为 Coulomb 场中的 Dirac 方程(这种推导对其它位场亦成立)

$$[E-H_1(\boldsymbol{q})]\varphi_M(\boldsymbol{q})=\int\frac{d^3q^1}{(2\pi)^3}\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|^2}\varphi_M(\boldsymbol{q}'). \tag{4.19}$$

如果在(4.15)式两边作正能投影，取大分量，即令

$$\varphi_M(\boldsymbol{q})=\frac{1+\beta_1}{2}\frac{1+\beta_2}{2}\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})\Lambda_2^+(\boldsymbol{q})\phi_M(\boldsymbol{q}), \tag{4.20}$$

则有

$$(M-E_1-E_2)\varphi_M(\boldsymbol{q})=\int\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{1+\beta_1}{2}\frac{1+\beta_2}{2}\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})\Lambda_2^+(\boldsymbol{q})\frac{e_1e_2}{|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|^2}\phi_M(\boldsymbol{q}'). \tag{4.21}$$

由于

$$\frac{1+\beta_i}{2}\Lambda_i^-(\boldsymbol{q})\phi_M(\boldsymbol{q}')=\frac{1}{2E_i}\begin{bmatrix}E_i-m_i & \boldsymbol{\sigma}_i\cdot\boldsymbol{q}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{大}(\boldsymbol{q}')\\ \phi_{小}(\boldsymbol{q}')\end{bmatrix}$$
$$\sim\left(\frac{\boldsymbol{q}^2}{m_i^2},\ \frac{|\boldsymbol{q}||\boldsymbol{q}'|}{m_i^2}\right)\varphi_M(\boldsymbol{q}'), \tag{4.22}$$

而对于两个非相对论性粒子组成的电磁束缚态，波函数实际分布区域为 $|\boldsymbol{q}'|\ll m_i$，因而(4.21)式左边和右边积分可以丢掉相对于主要项的高阶 $\frac{\boldsymbol{q}^2}{m_i^2}$、$\frac{\boldsymbol{q}'^2}{m_i^2}$ 项。于是可将(4.21)式右边的 $\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})$ 换为 1，$\Lambda_i^+(\boldsymbol{q}')+\Lambda_i^-(\boldsymbol{q}')$ 换为 $\Lambda_i^+(\boldsymbol{q}')$，得

$$\left(-\frac{m_1+m_2}{2m_1m_2}\nabla^2+\frac{e_1e_2}{4\pi|\boldsymbol{x}|}\right)\varphi_M(\boldsymbol{x})=(M-m_1-m_2)\varphi_M(\boldsymbol{x}). \tag{4.23}$$

当 e_1 与 e_2 异号时对应异性电荷引力位，有类氢原子能谱

$$M=m_1+m_2-\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\frac{e_1e_2}{4\pi}\right)^2\frac{1}{n^2},\quad n=1,2,\cdots. \tag{4.24}$$

感谢何祚庥，戴元本，高崇寿等同志的有益的讨论。

参　考　文　献

[1] Nakanishi, N., *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, **43**(1969), 1.
[2] Hayashi, C., Munakata, Y., *Prog. Theor. Phys.*,7 (1952), 481. Salpeter, E. E., *Phys. Rev.*, **87** (1952), 328.
[3] Dirac, P. A. M., Fock, V. A., Podolsky, B., *Phys. Zeitz. Sowj.*, **2**(1932), 468.
[4] 阮图南，朱熙泉，何祚庥，庆承端，赵维勤，高能物理与核物理，**5**(1981)，393，537。
[5] 阮图南，何祚庥，黄涛，高能物理与核物理，**3**(1979)，272。
[6] 卢里，D.，粒子和场，科学出版社，1981，p. 386—393.
[7] Feynman, R. P., *Phys. Rev.*, **76** (1949), 749, 769.
[8] Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **74** (1948), 1439.
[9] Ruan Tu-nan, Ho Tso-hsiu, Proceedings of the 1980 Guangzhou Conference on Theoretical Particle Physics. p. 362.
[10] 卫华，阮图南，西北大学学报，自然科学版，1984，待发表。

THE HERMITICITY OF RELATIVISTIC EQUAL-TIME EQUATION

WEI HUA YIN HONG-JUN RUAN TU-NAN

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

The differences of physical properties between several time-displacement operators are analyzed systematically. By using the Feynman propagator, a new time-displacement operator is reasonably constructed, with which the Hermite potential of relativistic equal-time equation is derived. Consequently, this equation is turned into a relativistic Schrödinger equation, in which the Hamiltonian is a Hermitian differentio-integral operator. Furthermore, the equaltime potential of minimum electro-magnetic coupling in first order is calculated. When the mass ratio of one particle to the other tends to infinity, the equation reduces to Dirac equation naturally.