第10卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 1
1986年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1986

有关双子费米子体系的边界条件和正则 S 波哈密顿量——表面拉氏量和规范协变的荷流分析

张 跃 中
(四川大学物理系)

摘 要

本文利用表面拉氏量和规范协变的荷流分析对双子-费米子体系的双子解在无穷远处的边界条件中各量的物理意义进行了详细的讨论；表明了在体系中加表面拉氏量实际上等价于边界条件的适当的选取；用电荷产生算子对拉氏量进行变分，明显地求出了规范协变的，球对称的 $U(1)$ 荷流分布；利用正则的方法和表面项的仔细处理表明由 Yamagishi 得到的 S 波哈密顿量需要修正一表面能项.

自从 'tHooft-Polyakov-Julia-Zee 双子解发现以来，磁单极(双子)—费米子动力学受到了广泛的重视，磁单极在无穷远处的边界条件被发现起着决定性的作用. 然而，到目前为止，对边界条件中各项的起源及其物理意义的阐述是不够清楚的；表面 Lagrangian 与边界条件的关系也没有一个确切的回答. 例如，如果我们考虑了场在无穷远处的边界条件，那么是否还要在体系中加上表面 Lagrangian? 也就是说在体系中加上表面 Lagrangian 是否等价于取场在无穷远处的适当的边界条件? 实际上，就象下面将看到的：只要把边界条件中与双子相关的自由度作为一个动力学变量来处理，就不必再考虑表面 Lagrangian，否则就会重复考虑了边界的影响. 再者，边界上的贡献与荷守恒问题是否有内在的联系? 为了回答这个问题，我们必须把目前文献中对哪些是体系中的 $U(1)$ 场，荷及流的讨论含糊的问题搞清楚，即弄明白体系中各项的物理意义. 在求体系 S 波 Hamiltionian 时，我们采用正则的方法. 众所周知：正则的与对称的方法所得的能量相差一表面项，在通常的情况下，这个散度项为零，因此一般认为两方法等价. 然而在磁单极(双子)情况下，由于它们在无穷远处的拓扑非平庸性质，此散度项的贡献是非零的. 那么我们要问：物理实在究竟应由正则形式还是应由对称形式来描述呢? 从下面选取的无奇异静态规范，我们不能对此作出任何判断. 然而若取非静态规范. Jackiw[9] 证明了由对称形式的动量给出的体系总角动量并非守恒量，正则的总角动量才是守恒的. 因此在拓扑非平庸的情况下，

本文 1984 年 9 月 10 日收到.

物理体系的正确描述似乎是正则的. 因此尽管 Yamagishi[7] 对双子-费米子体系的无穷远处的边界条件进行了仔细的处理，然而由于他所用的方法是对称的. 从而他给出的体系 S 波 Hamiltionian 与我们给出的有一偏离：比我们的结果少一表面能项.

把磁单极(双子)作为动力学实体，而不是看作一固定的场位形；在具有静态磁单极解的三维 Yang-Mills 理论中加入费米子；费米子规范不变地和规范场和 Higgs 场相互作用，在最简单的 $SU(2)$ 磁单极情况下，体系的拉氏密度为：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{\phi}\cdot\mathscr{D}^\mu\boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2}\mu^2\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}\\ &+\frac{1}{4}\lambda(\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi})^2 + i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + e\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{\sigma}/2i)\psi\\ &- Ge\bar{\psi}\boldsymbol{\sigma}/2i\psi\cdot\boldsymbol{\phi},\end{aligned}\tag{1}$$

其中 G 是 Yukawa 耦合. $\boldsymbol{\sigma}$ 是泡利矩阵. 且：

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu\boldsymbol{A}_\mu + e\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{A}_\nu$$

$$\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{\phi} = \partial_\mu\boldsymbol{\phi} + eA_\mu\times\boldsymbol{\phi}.$$

我们已经加了一个在同位旋变换下如同旋量的费米子多重态：

$$\boldsymbol{\delta}\psi = -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i}\psi.\tag{2}$$

体系的 Euler-Lagrange 方程为：

$$\mathscr{D}^\nu\boldsymbol{F}_{\nu\mu} = -\boldsymbol{j}_\mu\tag{3a}$$

$$\mathscr{D}^\mu\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{\phi} = \mu^2\boldsymbol{\phi} - \lambda\boldsymbol{\phi}^2\boldsymbol{\phi} + eG\bar{\psi}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i}\psi\tag{3b}$$

$$\left(-i\partial_t - e\boldsymbol{A}_0\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi = \left(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + e\alpha^i\boldsymbol{A}_i\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + eG\beta\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\cdot\boldsymbol{\phi}\right)\psi,\tag{3c}$$

其中 $\boldsymbol{j}_\mu$ 是外源流：

$$\boldsymbol{j}_\mu = e\boldsymbol{\phi}\times\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{\phi} + e\bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi\tag{4}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\qquad \beta = -i\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}.\tag{5}$$

在静态规范下. 'tHooft-Polyakov-Julia-Zee 双子解取下列形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x},t) &= \hat{x}\times\partial_i\hat{x}(K(r)-1)/e\\ \boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t) &= \hat{x}J(r)/er\\ \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{x},t) &= \hat{x}H(r)/er.\end{aligned}\tag{6}$$

其中 $r = |\boldsymbol{x}|$. $\hat{x} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|$. 为使解的能量有限 $r\to 0$ 时解的行为应是正则的：

$$J(r) = O(r^2)\quad H(r) = O(r^2)\quad K(r) = 1 + O(r^2)\tag{7}$$

另一方面，$r\to\infty$ 时：

$$K(r) = O(e^{-m_W r})$$

$$H(r)/r\sim m_W$$

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t) = \hat{x}J(r)/er\sim\hat{x}\frac{e}{4\pi r}Q + \boldsymbol{A}_0(\infty,\omega).\tag{8}$$

其中 ω 是立体角. $\boldsymbol{A}_0(\infty,\omega)$ 保证了在无穷远处 $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t)$ 与 $\boldsymbol{A}_0(\infty,\omega)$ 等同. 为了说明 $\boldsymbol{A}_0(\infty,\omega)$ 的含义. 我们在 $\mathscr{L}$ 中加一表面项,此表面项包含定义在表面上的新动力学变量 $\Theta^a(\omega)$ 和 $f^a_{\mu\nu}(\omega)$[1]:

$$L_s=-\lim_{R\to\infty}\int\frac{d\sigma_i}{R^2}\left(A^a_\mu(x)-a^a_\mu(\Theta(\omega))\right)f^a_{\mu i}(\omega),\tag{9}$$

其中 $a^a_\mu(\Theta(\omega))$ 是纯规范:

$$a^a_\mu(\Theta(\omega))\frac{\sigma^a}{2i}=-\frac{i}{e}\left(\partial_\mu O(\Theta(\omega))\right)O^{-1}(\Theta(\omega))\tag{10}$$

而

$$O(\Theta(\omega))=\exp(-i\Theta^a\sigma^a/2i)\tag{11}$$

体系的修改的作用量为:

$$\bar{S}=\int dt\left\{\int d^3x\mathscr{L}(A,\phi)+L_s[A,f,\Theta]\right\}.\tag{12}$$

对方程(12)中的 Θ, $f_{\mu\nu}$ 以及在表面上的 A_μ, ϕ 进行变分得运动方程或边界条件:

$$\partial^\mu\boldsymbol{f}_{\mu i}+\boldsymbol{a}^\mu(\Theta)\times\boldsymbol{f}_{\mu i}=0\tag{13a}$$

$$\lim_{R\to\infty}R^2\mathscr{D}_i\boldsymbol{\phi}=0\qquad\lim_{R\to\infty}R^2\boldsymbol{F}_{\mu i}=\boldsymbol{f}_{\mu i}\tag{13b, c}$$

$$\lim_{R\to\infty}\boldsymbol{A}_\mu(R,\omega)=\boldsymbol{a}_\mu(\Theta),\tag{13d}$$

从方程 (13a) 得:

$$\dot{\boldsymbol{f}}_{0i}+\boldsymbol{a}_0(\Theta)\times\boldsymbol{f}_{0i}=0\tag{13a'}$$

它的一个特解为:

$$\boldsymbol{f}_{0i}=\hat{x}_i\hat{x}b(t)\quad(\dot{b}(t)=0)\tag{14a}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(\omega)=\varphi(t)\hat{x}.\tag{14b}$$

利用(10),(11)式和(14b)式得:

$$\boldsymbol{a}_0(\Theta)=-\frac{1}{e}\dot{\varphi}(t)\hat{x},\tag{15}$$

因此(13d)式给出:

$$\boldsymbol{A}_0(\infty,\omega)=\lim_{R\to\infty}\boldsymbol{A}_0(R,\omega)=\boldsymbol{a}_0(\Theta)=-\frac{1}{e}\dot{\varphi}(t)\hat{x}.\tag{16}$$

这样加上表面 Lagrangian L_s 导致 $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t)$ 在无穷远处有一非零的边界条件. 反之. $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t)$ 在无穷远处有一非零的边界条件等价于在体系中已加了表面 Lagrangian L_s. 由此可见,我们若取 $\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t)$ 的边条件为:

$$\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{x},t)\sim\hat{x}\frac{e}{4\pi r}Q-\hat{x}\dot{\varphi}(t)/e\quad(r\to\infty).\tag{17}$$

那么我们就不必在体系中再加表面 Lagrangian (9),否则就会重复考虑了边界的影响. 由于 $\varphi(t)$ 不是由方程(13a')决定的. 因此可以把它看作集体坐标. 与它对应的共轭动量可利用(9)、(10)、(11)三式求得

$$P_\varphi=\frac{1}{e}b,\tag{18}$$

利用 (13c),(15) 并注意到对 'tHooft-Polyakov-Julia-Zee 双子解有 $\hat{x}=\hat{\phi}(=\boldsymbol{\phi}/|\boldsymbol{\phi}|)$ 得:

$$P_\varphi = \frac{1}{e}\lim_{R\to\infty}\int d\sigma_i \boldsymbol{F}_{0i}\cdot\hat{\phi} = Q_0/e. \tag{19}$$

(Q_D 表双子总电荷),可见 $\varphi(t)$ 是与双子相关的自由度(确切地说就是双子自由度),$\varphi(t)$ 与时间有关,$\dot{\varphi}(t)$与时间无关即 $\dot{\varphi}(t)=\dot{\varphi}$.

为了看清(8)式中Q的物理意义我们考虑双子-费米子体系的荷流分布及守恒等问题. 我们知道. 一般弯曲时空中不存在确定的定域守恒能量动量,引力场自身贡献的能动密度不是张量,与坐标选择有关. 有时可根据场中其它物理量的运动情况或场的对称性来选择某一"优先"坐标系而得到有一定物理意义的能动密度. 同样,在讨论非 Abel 规范理论的电荷守恒问题时也存在类似的问题. 规范场造成内部对称空间(同位旋空间)的弯曲,不可易规范场中存在场自身贡献的荷流密度,它不是规范协变的. 因此与规范坐标系有关. 从而它的物理意义是不清楚的. 那么怎样才能得到非 Abel 规范理论中有确定物理意义的规范无关的流呢? 我们首先必须澄清把什么叫做非 Abel 规范理论的电荷产生算子、即在空间选什么"优先"的方向. 我们不能普通地象在 Abel 规范理论中一样,选定某一绝对平行的第三轴,把它叫做电荷轴. 通过绕这些第三轴的转动而得到规范不变的有物理意义的守恒流. 在不可易 $SU(2)$ 规范理论中,在空间无绝对平行的方向,因在某一原始规范中的第三轴在一局域规范变换后变成了不同的方向. 但由于在我们所考虑的体系中存在 Higgs 场,我们可以把 Higgs 场的方向选作"优先"方向,即电荷产生算子的方向 $\boldsymbol{n}(x)$,通过绕 $\boldsymbol{n}(x)$ 的转动,得出相应的守恒流. 当然,在我们选择的无奇异静态规范下,Higgs 场在空间不同点 x 的方向是不同的.

由以上的讨论,选 $\boldsymbol{\phi}(x)$的方向为"优先"方向:

$$\boldsymbol{n}(x) = \boldsymbol{\phi}(x)/|\boldsymbol{\phi}(x)|, \tag{20}$$

按照 $\boldsymbol{n}$ 把 $\boldsymbol{A}_\mu$ 分成产生 $U(1)$ 场的势 $\boldsymbol{h}_\mu$ 和带荷矢粒子 $\boldsymbol{k}_\mu$[2-6]:

$$\boldsymbol{A}_\mu = \boldsymbol{h}_\mu + \boldsymbol{k}_\mu \tag{21}$$

使得 $\boldsymbol{n}$ 在由 $\boldsymbol{h}_\mu$ 为联络的迁移下不变,而 $\boldsymbol{k}_\mu$ 与 $\boldsymbol{n}$ 垂直:

$$D_\mu \boldsymbol{n} \equiv \partial_\mu \boldsymbol{n} + e\boldsymbol{h}_\mu \times \boldsymbol{n} = 0 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{k}_\mu \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{23}$$

由此二式解得:

$$\boldsymbol{h}_\mu = (\boldsymbol{A}_\mu\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} - \frac{1}{e}\boldsymbol{n}\times\partial_\mu\boldsymbol{n} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{k}_\mu = \frac{1}{e}\boldsymbol{n}\times\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{n}, \tag{25}$$

$\boldsymbol{n}$ 在由 $\boldsymbol{A}_\mu$ 为联络的迁移下不是不变的:

$$\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{n} \equiv \partial_\mu\boldsymbol{n} + e\boldsymbol{A}_\mu\times\boldsymbol{n} \neq 0. \tag{26}$$

把双子解进行上述分解并注意到 $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{n}$ 有:

$$\boldsymbol{h}_i = -\frac{1}{e}\boldsymbol{n}\times\partial_i\boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{1}{e}k(r)\boldsymbol{n}\times\partial_i\boldsymbol{n} \quad \boldsymbol{k}_0 = 0$$

$$\boldsymbol{h}_0 = \boldsymbol{n}J(r)/er \sim -\boldsymbol{n}\dot{\varphi}/e + \boldsymbol{n}\frac{e}{4\pi r}Q$$

$$\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{n}H(r)/er, \tag{27}$$

对应地场强分为广义的 Gauss-Codazzi 方程：

$$\boldsymbol{F}^{\parallel}_{\mu\nu} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{f}_{\mu\nu} + e\boldsymbol{k}_\mu \times \boldsymbol{k}_\nu \tag{28}$$

$$\boldsymbol{F}^{\perp}_{\mu\nu} = \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\times\boldsymbol{n}) = D^*_\mu \boldsymbol{k}_\nu \tag{29}$$

其中：

$$\boldsymbol{f}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{h}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{h}_\mu + e\boldsymbol{h}_\mu \times \boldsymbol{h}_\nu \tag{30}$$

$$^*\boldsymbol{k}_\nu = \varepsilon_{\nu\lambda}\boldsymbol{k}_\lambda. \tag{31}$$

很显然 Gauss 方程(28)给出了 'tHooft 协变电磁场张量的表达式：

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \boldsymbol{f}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{n} = \partial_\mu(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}_\nu) - \partial_\nu(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A}_\mu) - \frac{1}{e}\boldsymbol{n}\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{n}\times\partial_\nu\boldsymbol{n}). \tag{32}$$

可见在作了上述的分解约化以后．'tHooft 电磁场张量 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 就可很自然地从 Gauss 方程得到，$\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 就是我们的 $U(1)$ 场强．特别 $U(1)$ 电场为：

$$E_i = \mathscr{F}_{i0} = \hat{x}_i \frac{d}{dr}(J(r)/er). \tag{33}$$

为求 $U(1)$ 流，绕 $\boldsymbol{n}$ 的方向作 $U(1)$ 转动．转角 $\delta\theta$ 处处相同，则：

$$\delta\boldsymbol{A}_\mu = \delta\theta\mathscr{D}_\mu\boldsymbol{n} \qquad \delta\boldsymbol{\phi} = 0$$

$$\delta\psi = -\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i}\psi \tag{34}$$

相应的 Noether 流：

$$J^n_\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\psi}\frac{\delta\psi}{\delta\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\boldsymbol{A}_0}\cdot\frac{\delta\boldsymbol{A}_\nu}{\delta\theta} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\boldsymbol{\phi}}\cdot\delta\boldsymbol{\phi}/\delta\theta$$

$$= e\bar{\psi}\gamma_\mu\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi + e\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}^\nu\times\boldsymbol{F}^\perp_{\nu\mu}). \tag{35}$$

把 Ansatz (6) 代入得：

$$J^n_i = e\bar{\psi}\gamma_i\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi \tag{36a}$$

$$J^n_0 = e\bar{\psi}\gamma_0\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi + 2J(r)K^2(r)/er^3. \tag{36b}$$

从运动方程 (3a) 得：

$$-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}_\mu = -e\bar{\psi}\gamma_\mu\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi = \boldsymbol{n}\cdot\mathscr{D}^\nu\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$$

$$= \boldsymbol{n}\cdot D^\nu\boldsymbol{F}_{\nu\mu} + e\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}^\nu\times\boldsymbol{F}_{\nu\mu})$$

$$= \partial^\nu(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}_{\nu\mu}) + e\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}^\nu\times\boldsymbol{F}^\perp_{\nu\mu}) \tag{37}$$

和(35)式比较得：

$$-J^n_\mu = e\bar{\psi}\gamma_\mu\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi + e\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{k}^\nu\times\boldsymbol{F}^\perp_{\nu\mu}) = \partial^\nu F^{\parallel}_{\nu\mu}. \tag{38}$$

可见所得的 Noether 流是守恒流，它是规范协变的物理流．因此 J^n_μ 就是非 Abel $SU(2)$ 规范理论中的 $U(1)$ 流．

对 S 波费米子. Yamagishi 给出[7]:

$$
\boldsymbol{j}_0 = e\bar{\psi}\gamma_0 \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi = \hat{x}\frac{e}{4\pi r^2}\rho(r) \tag{39}
$$

($\sigma(r)$ 是费米子荷密度) 因此:

$$
J_0^n = -\frac{e}{4\pi r^2}\rho(r) + 2J(r)K^2(r)/er^3 \tag{40}
$$

即 J_0^n 是按球对称分布的荷密度，此荷密度在原点最大，随半径 r 的增大而指数衰减，分布半径约为 $1/2m_w$. 把 $\frac{1}{e}J_0^n$ 对整个空间积分即得体系的总守恒 $U(1)$ 荷:

$$
Q_{tot} = \frac{1}{e}\int d^3x J_0^n, \tag{41}
$$

利用高斯定理:

$$
\partial^i E_i = -J_0^n \tag{42}
$$

得:

$$
Q_{tot} = -\frac{1}{e}\int d^3x\partial_i E^i = -\frac{1}{e}\int d\sigma_i E_i = Q. \tag{43}
$$

这里我们已利用了(17)式. 由此可见规范场第四分量在无穷远边条件(8)中的 Q 就是体系的总守恒荷 Q_{tot}. 这样:

$$
J(r)/r \sim -\dot{\varphi} + \frac{e^2}{4\pi r}Q_{tot}. \tag{44}
$$

这就是 H. Yamagishi[7] 给出的 $r\to\infty$ 时的边条件. 有了(44)式以后. Q_{tot} 就可以通过求解高斯定律(42)求得. 由(42)式,把 $E_i = \hat{x}_i\frac{d}{dr}(J(r)/er)$ 及 J_0^n 的表达式 (40) 代入得:

$$
r^2J''(r) - 2J(r)K^2(r) = -\frac{e^2}{4\pi}r\rho(r). \tag{45}
$$

为求解上方程,我们考虑无费米子时 ($\rho(r)=0$) 的齐次方程:

$$
r^2J''(r) - 2J(r)K^2(r) = 0, \tag{46}
$$

从方程(44)易见,此时 ($\rho(r)=0$) 的 $J(r)/r$ 的行为应是:

$$
J(r)/r \sim -\dot{\varphi} + \frac{e^2}{4\pi r}Q_0 \tag{47}
$$

令

$$
\mathscr{J}(r) = -\frac{1}{\dot{\varphi}}J(r)/r. \tag{48}
$$

易见它的行为:

$$
\mathscr{J}(r) = O(r) \quad (r\to 0) \tag{49a}
$$

$$
\mathscr{J}(r) \sim 1 - \frac{e^2}{4\pi r}Q_0/\dot{\varphi} \equiv 1 - \frac{Ie^2}{4\pi r} \tag{49b}
$$

其中 I 是量级 $\sim r_0/e^2 = 1/m_W e^2$ 的常数,把(48)式代入 (46) 式得:

$$
r(r\mathscr{J}(r))'' - 2\mathscr{J}(r)K^2(r) = 0. \tag{50}
$$

(45)式两边乘以 $\mathscr{J}(r)$，从 0 到∞积分并利用边条件(44)，(49b)和(50)式可得：

$$Q_{tot} = I\dot{\varphi} + \int_0^\infty dr\,\mathscr{J}(r)\rho(r) \tag{51}$$

它就是 H. Yamagishi 给出的电荷守恒律．方程(50)还有如下行为的解：

$$\bar{\mathscr{J}}(r) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)\ (r \to 0) \qquad \bar{\mathscr{J}}(r) \sim \frac{1}{r}\ (r \to \infty). \tag{52}$$

解 $\mathscr{J}(r)$ 和 $\bar{\mathscr{J}}(r)$ 的 Wronskian:

$$\mathscr{J}(r)\bar{\mathscr{J}}'(r) - \bar{\mathscr{J}}(r)\mathscr{J}'(r) = -1/r^2 \tag{53}$$

积分给出：

$$\bar{\mathscr{J}}(r) = \mathscr{J}(r)\int_r^\infty \frac{ds}{s^2}\frac{1}{\mathscr{J}^2(s)}. \tag{54}$$

构造 Green 函数[7]：

$$\mathscr{G}(r, r') = \mathscr{J}(r)\theta(r - r')\bar{\mathscr{J}}(r') + \bar{\mathscr{J}}(r)\theta(r - r')\mathscr{J}(r'). \tag{55}$$

解高斯定律(45)式为：

$$J(r)/r = -\mathscr{J}(r)\dot{\varphi} + \frac{e^2}{4\pi}\int_0^\infty dr'\mathscr{G}(r, r')\rho(r'). \tag{56}$$

以上我们讨论了边条件中各量的物理含义，与过每点切平面的各向同性对应的稳定子群(线 $\boldsymbol{n}$ 与 $\hat{x}$ 同步 $U(1)$ 子群)的有外源时的场强，流和荷分布以及它们与边条件之间的联系．下面我们计算体系的 S 波 Hamiltionian，就象文章开头说的．我们采用正则的方法：正则的 Hamiltionian:

$$\mathscr{H} = \boldsymbol{F}_{0i}\cdot\partial_0\boldsymbol{A}_i + \mathscr{D}_0\boldsymbol{\phi}\cdot\partial_0\boldsymbol{\phi} - i\psi^+\partial_0\psi - \mathscr{L}. \tag{57}$$

在我们的静态规范下，所有场的时间导数为零，把 Ansatz 代入扔掉与我们的问题无关的部分得磁单极(双子)——费米子体系的哈密顿量：

$$\begin{aligned} H = \int d^3x \Big(&\frac{1}{2}\boldsymbol{E}_i^2 - \bar{\psi}\left(-\boldsymbol{\gamma}\cdot i\nabla + e\boldsymbol{A}_i\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi \\ &+ iGe\frac{H(r)}{er}\bar{\psi}\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\psi - \partial_i(\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{h}_0)\Big). \end{aligned} \tag{58}$$

利用(28)式及 Ansatz:

$$\boldsymbol{E}_i^{/\!/} = \boldsymbol{F}_{i0}^{/\!/} = \hat{x}_i\boldsymbol{n}\frac{d}{dr}(J(r)/er) \tag{59a}$$

$$\boldsymbol{E}_i^{\perp} = \boldsymbol{F}_{i0}^{\perp} = \partial_i\boldsymbol{n}J(r)K(r)/er \tag{59b}$$

得(58)式中的第一部分即静电能：

$$\begin{aligned} H_e &= \frac{1}{2}\int d^3x\boldsymbol{E}_i^2 = \frac{1}{2}\int d^3x\{(\boldsymbol{E}_i^{/\!/})^2 + (\boldsymbol{E}_i^{\perp})^2\} \\ &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}Q_{tot} + \frac{1}{2}\int_0^\infty dr\frac{J(r)}{r}\rho(r), \end{aligned} \tag{60}$$

这里我们已利用了在 $r\to\infty$ 时边条件和高斯定理(45)式，进一步利用(56)和(51)式得：

$$H_e = H_{Dc} + H_{Fc} \tag{61}$$

$$H_{Dc} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2I}\left(\frac{n}{2} - \frac{\theta}{2\pi} - Q_F\right)^2 \tag{62a}$$

$$H_{Fc}=\frac{e^2}{8\pi}\int_0^\infty dr\int_0^\infty dr'\rho(r)\mathscr{G}(r,r')\rho(r')$$
$$=\frac{e^2}{4\pi}\int_0^\infty\frac{dr}{r^2}(Q_F(r)/\mathscr{J}(r))^2,\tag{62b}$$

这里我们已引入了

$$Q_F(r)=\int_0^r dr\mathscr{J}(r)\rho(r)\quad Q_F(\infty)=Q_F\tag{63}$$

和对有质量的费米子成立的等式：

$$Q_{tot}=\left(\frac{n}{2}-\frac{\theta}{2\pi}\right)\quad(\text{以 } e \text{ 为单位})\tag{64}$$

它是双子的电荷 $Q_0=\left(N-\frac{\theta}{2\pi}\right)$ 加上一定数量的带荷为 $\pm\frac{1}{2}$ 的费米子.

很显然：H_{Dc} 是双子自由度的库仑能，H_{Fc} 是费米子的库仑能.

(58)式中第二部分是无质量费米子在场的磁部分中运动的动能：

$$H_F=-\int d^3x\left\{\bar{\psi}\left(-i\boldsymbol{\gamma}\cdot\nabla+e(\boldsymbol{h}_i+\boldsymbol{k}_i)\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\psi\right\}\tag{65}$$

它的 S 波部分可以利用一维手征旋量 $\chi_\pm(r)$ 写出[8,7]：

$$H_F=\int_0^\infty dr\sum_\pm\bar{\chi}_\pm(r)\left(-i\bar{\gamma}^1\frac{d}{dr}+i\bar{\gamma}^5\frac{K(r)}{r}\right)\chi_\pm(r)\tag{66}$$

其中：

$$\bar{\gamma}^1=\begin{pmatrix}0&-i\\-i&0\end{pmatrix}\quad\bar{\gamma}^5=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.\tag{67}$$

S 波费米子和 Higgs 粒子的相互作用能由(58)式中第三部分给出：

$$H_{FH}=-G\int d^3x\frac{H(r)}{r}\bar{\psi}\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i}\psi.\tag{68}$$

利用 Callan Jr. 给出的公式[8]：

$$\bar{\psi}\boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2i}\psi=\frac{1}{8\pi r^2}(\bar{\chi}_+(r)\bar{\gamma}^5\chi_-(r)+\text{h.c.})\tag{69}$$

代入(68)式得：

$$H_{FH}=-\frac{G}{2}\int_0^\infty dr\frac{H(r)}{r}(\bar{\chi}_+(r)\bar{\gamma}^5\chi_-(r)+\text{h.c.}).\tag{70}$$

(58)式中最后一项表表面能：

$$H_s=-\int d^3x\partial_i(\boldsymbol{E}_i\cdot\boldsymbol{h}_0)=\dot{\varphi}Q_{tot}$$
$$=\frac{1}{I}\left(\frac{n}{2}-\frac{\theta}{2\pi}\right)\left(\frac{n}{2}-\frac{\theta}{2\pi}-Q_F\right).\tag{71}$$

S 波总 Hamiltionian 为：

$$H=H_{Dc}+H_{Fc}+H_F+H_{FH}+H_s.\tag{72}$$

除了我们体系中费米子是通过与 Higgs 粒子的耦合获得质量外，我们的结果比 H. Yamagishi[7] 给出的多一表面能 H_s.

本文是在侯伯宇教授的启导和鼓励下完成的，在做的过程中，侯伯宇和王珮教授给予了许多的讨论和帮助，作者表示衷心的感谢。

参　考　文　献

[1] J. L. Gervais, B. Sakita, and S. Wadia, *Phys. Lett.*, **63B**(1976), 55.
[2] 侯伯宇，物理学报，**26**(1977)，367.
[3] B. Y. Hou, *J. Math. Phys.*, **1**(1982), 2325.
[4] B. Y. Hou, *Comm. In Theor. Phys.*, **1**(1982), 333.
[5] 侯伯宇，侯伯元，高能物理与核物理，**3**(1979)，355.
[6] 侯伯宇，侯伯元，王珮，将在 J. Phys. A 上发表.
[7] II. Yamagishi, *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 977;CPT 1139, Submitted to Physical Review D.
[8] C. G. Callan Jr. *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2058; *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2141.
[9] R. Jackiw and A. N. Redlich., *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 555.

ON THE BOUNDARY CONDITION AND CANONICAL S-WAVE HAMILTIONIAN FOR THE DYON-FERMION SYSTEM——THE SURFACE LAGRANGIAN AND GAUGE INVARIANT CHARGE CURRENT

ZHANG YUE-ZHONG
(*Sichuan University*)

ABSTRACT

By means of the surface Lagrangian and gauge invariant charge current, we make a detailed discussion to the physical meaning of each quantity in the boundary condition of the dyon-fermion dynamics; It is shown that adding the surface Lagrangian to the system is equivalent to selecting suitable boundary condition; By gauge transforming the Lagrangian by a charge generator, We get a corresponding $U(1)$ charge current density which is both gauge invariant and spherosymmetrical. A use of the canonical method and a careful treatment of surface terms show that the S-wave Hamiltonian given by Yamagishi requires amendment by a surface energy term.