第10卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 2
1986年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Mar., 1986

格点规范理论的平均场研究与普适性讨论

李文铸　张剑波　季达人
（浙　江　大　学）

摘　　要

我们用朴素的平均场近似方法与 Shahbazyan 提出的方法研究了格点规范理论的 Manton 作用量和其他几种作用量. 用平均场方法计算了几种 $SU(2)$ 格点规范作用量的过渡点的 β 值. 用 Shahbazyan 提出的方法，假设普适性存在，直接由 $SU(2)$ Wilson 作用量的 Monte Carlo 结果和几种作用量与 Wilson 作用量的关系，得到这几种作用量过渡点的 β 值. 最后，我们对用两种方法计算得到的 β_c 值进行了比较，作为对普适性假设的一个检验.

一、引　　论

K. G Wilson 提出的格点规范理论[1]提供了一种规范不变的非微扰正规化方法. 近几年来这个方面所做的大量工作，如 Monte Carlo 模拟[2]，强、弱耦合展开[3]，平均场方法[4]和变分法[5]等，已使格点规范理论取得了很多重要成果. 但这个理论仍然存在着一些问题. 其中比较突出的问题之一是格点规范理论作用量的普适性问题.

根据 Wilson 提出的格点作用量的条件. 格点规范理论的作用量可有很多种形式. 最简单和最常用的是 Wilson 作用量[1]，比较常用的有 Manton 作用量[7]和 Villain 作用量[8]等. 最近，李文铸，董绍静提出了一系列新的格点规范作用量[9]，它们都符合 Wilson 提出的条件. 用较多种形式的作用量来研究普适性问题无疑是有意义的.

新作用量的形式都比较复杂，是 Wilson 作用量的函数. 用 Monte Carlo 方法模拟将化很多时间，考虑到平均场近似[4]计算简单. 且对确定一些格点规范理论的相变点很有效，因此，作为对这些作用量的初步研究，我们就利用朴素的平均场方法计算了 $SU(2)$ 格点规范理论这些作用量的过渡点的 β 值.

最近，T. V. Shahbazyan 提出了一种方法[10]，利用这个方法，先假设普适性成立，即物理可观察量在相变点附近的值与作用量的选取无关，就可以通过新作用量与 Wilson 作用量的关系，直接由 Wilson 作用量的计算结果求得 $SU(2)$ 新作用量的 β_c 值. 把用这种方法求得的 β_c 值与平均场近似求得的 β_c 值比较，就可以作为对普适性假设的一个检验.

本文 1985 年 2 月 13 日收到.

二、平均场近似计算

平均场近似方法在自旋系统的研究中早有广泛应用[11]. 最近，一些作者用平均场方法计算了格点规范理论的过渡点和 Wilson 元格的平均值[4],均得到了很好的结果.

我们采用 Greensite 和 Lautrup 提出的平均场方法[4]来确定系统的过渡点. 首先让我们简述一下方法. 假定取 Wilson 作用量

$$S=\beta\sum_{p}s_p=\beta\sum_{p}\left\{1-\frac{\mathrm{tr}(U_p+U_p^{+})}{2\ \mathrm{tr}1}\right\} \tag{1}$$

U_p 代表一个元格中四个 U 的有序乘积. 系统的配分函数

$$z=\int\prod_{l}dU_l\exp(-S) \tag{2}$$

式中 dU_l 是群的不变测度，l 代表链. 我们集中考虑一条链 U_i，而其他所有链的影响由正比于单位矩阵的平均值 M 来代替. 见图 1，在这一近似下，作用量 (1) 就化为

$$S\to-2(d-1)\beta M^3\frac{1}{2\mathrm{tr}\,1}(\mathrm{tr}\,U_i+\mathrm{h\cdot c.})$$
$$+(\text{与 } U_i \text{ 无关的项}) \tag{3}$$

其中已考虑到在 d 维时空中每条链联系着 2 $(d-1)$ 个元格,而 M 可以由自洽方程得到. 即

$$M=\frac{1}{N}\langle R_e\mathrm{tr}\,U_i\rangle \tag{4}$$

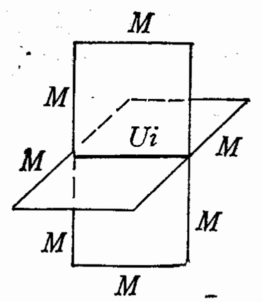

图 1　平均场近似的图象
(三维情形)

将 (3) 式代入 (4) 式,由统计平均值的定义,得

$$M=\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln\left\{\int dU\,e^{\alpha\frac{\mathrm{tr}(U+\mathrm{h\cdot c.})}{2N}}\right\}\Bigg|_{\alpha=2(d-1)\beta M^3} \tag{5}$$

解方程 (5) (忽略平庸解 $M=0$)，就可以得到 M-β 曲线，当 β 小于某一 β_c 值时. 方程 (5) 无解与统计物理中的 Weiss 理论相类似，Greensite 和 Lautrup 把这个 β_c 解释为相变点. 对于简单的规范模型(如 z_2, $z_3\cdots$)，用平均场方法求出的 β_c 与已知的相变点符合得很好. 但是,对于 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 规范群,人们期望应无去禁闭的相变点，而用平均场方法计算同样有相变点. 一般认为这些相变点是由平均场方法所造成的. 但 β_c 的位置与 Monte Carlo 计算结果中比热峰的位置非常接近. 这个比热峰被认为是强弱耦合间的快速过渡,因此我们把这些点通称为过渡点.

朴素的平均场方法有一根本缺陷,那就是与 Elitzur 定理[12]矛盾. Elitzur 定理要求，对所有的 β 值. $\langle v\rangle=0$，而朴素的平均场方法则假定 $\frac{1}{N}\langle\mathrm{tr}U\rangle=M$. 最近, Droufle 等人发展了一套鞍点近似的平均场方法[13],可以与 Elitzur 定理相容. 利用这个方法，还可以逐级计算修正,初步的计算结果是令人满意的[14].

对于 $SU(2)$ 规范群,我们用平均场近似计算了以下七种格点规范作用量的过渡点，七种作用量如下:

1. Wilson 作用量 $s_p = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p$

2. Manton 作用量 $s_p = \frac{1}{2}\arccos^2\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p\right)$

3. 正弦作用量 $s_p = \sin 1 - \sin\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p\right)$

4. 正切作用量 $s_p = \mathrm{tg}\,1 - \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p\right)$

5. 双曲正弦作用量 $s_p = \mathrm{sh}1 - \mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p\right)$

6. 指数作用量 $s_p = \exp(1) - \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p\right)$

7. 负指数作用量 $s_p = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{tr}U_p\right) - \exp(-1)$

后面五种作用量是李文铸，董绍静提出的一系列作用量的一部分[9].

在求解自洽方程时，首先必须利用群的不变测度将群积分化为普通积分，才能用计算机求解。对于 $SU(2)$ 规范群，

$$U = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{6}$$

因此有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{N}\mathrm{Re\,tr}U = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\\&dU = d\phi\left(\sin\frac{1}{2}\phi\right)^2\Big/\pi \quad 0 \leqslant \phi < 2\pi\end{aligned} \tag{7}$$

这样，自洽方程就成为

$$M = \frac{\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right)\cos\frac{\phi}{2}\exp\left\{-2(d-1)\beta f\left(M^3\cos\frac{\phi}{2}\right)\right\}d\phi}{\int_0^{2\pi}\sin^2\left(\frac{1}{2}\phi\right)\exp\left\{-2(d-1)\beta f\left(M^3\cos\frac{\phi}{2}\right)\right\}d\phi} \tag{8}$$

这里 $f\left(\frac{1}{N}\mathrm{Re\,tr}\,U_p\right) \sim f\left(\frac{1}{N}M^3\mathrm{Retr}U\right)$ 表示一般作用量形式。

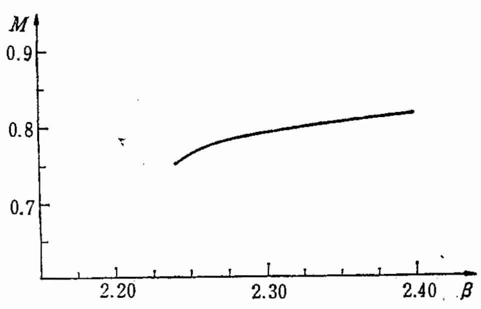

图2 $SU(2)$ Wilson 作用量 M-β 曲线
$\beta_c = 2.23$ $M = 0$ $\beta = 2.24$ $M = 0.75$

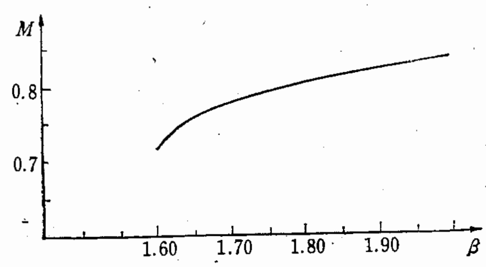

图3 $SU(2)$ Manton 作用量 M-β 曲线
$\beta_c = 1.59$ $M = 0$ $\beta = 1.60$ $M = 0.71$

在计算时，我们把时空维数 d 取作 4，典型的 M-β 曲线如图 2 和图 3 所示。我们近似地把 β_c 取为与 $M=0$ 对应的最大的 β 值(计算中 β 的间隔为 0.01)，对 Wilson 作用量，求得 $\beta_c=2.23$ (已经有人计算过[4]，所得结果和我们的一致)，而 Monte Carlo 结果为 $\beta_c=2.2$[2] (出现比热峰)。对 Manton 作用量，我们求得 $\beta_c=1.59$，而 Monte Carlo 结果为 $\beta_c\approx 1.50$[15]，总的结果见表的第二列。

三、Shahbazyan 方法的计算

首先简述一下 Shahbazyan 提出的方法[10]。取一个基本方格的 Wilson 作用量为

$$s_p^W=\beta(1-N^{-1}\mathrm{tr}U_p) \tag{9}$$

Wilson 元格的平均值为

$$W(\beta)=\langle N^{-1}\mathrm{tr}\,U_p\rangle=\int[dU]N^{-1}\mathrm{tr}U_p\exp\left(-\sum_p s_p\right) \tag{10}$$

再取一个不同于 Wilson 作用量的其他作用量，其一般形式是

$$s_p=\beta f(N^{-1}\mathrm{tr}U_p)=\beta\sum_n r_n(N^{-1}\mathrm{tr}U_p)^n \tag{11}$$

利用关系式:

$$\langle(N^{-1}\mathrm{tr}U_p)^n\rangle=\langle N^{-1}\mathrm{tr}U_p\rangle^n+\frac{1}{2}n(n-1)\rho\langle N^{-1}\mathrm{tr}U_p\rangle^{n-2}+\cdots \tag{12}$$

其中
$$\rho=\langle(N^{-1}\mathrm{tr}U_p)^2\rangle-\langle N^{-1}\mathrm{tr}U_p\rangle^2$$

然后，我们假设普适性成立。即其他作用量下的元格平均值应该等于 Wilson 作用量下的元格平均值 $W(\bar\beta)$，也就是:

$$W(\beta)=W(\bar\beta) \tag{13}$$

其中 W' 代表其他作用的元格平均值，$\bar\beta$ 是 Wilson 作用量的耦合常数，β 和 β' 有一定的对应关系。在(12)式中我们忽略了高阶关联子，而且由于 ρ 只在高级修正中出现，再进一步假设 $\rho'=\rho(\bar\beta)$ 于是经过不复杂的运算，就可以得到其他作用量的 β 值与 Wilson 作

表 1　$SU(2)$ 格点规范作用量的平均场和 Shahbazyan 方法的计算结果

作 用 量	平均场计算 β_c	Shahbazyan 方法计算 β_c
Wilson 作用量	2.23	/
Manton 作用量	1.59	1.58*
SIN 作用量	2.29	2.34
TAN 作用量	2.05	1.82
SH 作用量	2.16	2.06
指数作用量	1.65	1.66
负指数作用量	2.67	2.72

* 文献[10]已有计算，其值为 1.671，差别可能由于所用的 Wilson 作用量的结果不同。

用量 $\bar\beta$ 值的对应关系:

$$\beta=-\bar\beta\{f'(W(\bar\beta))+[\rho'(\bar\beta)/2W'(\beta)]f''(W(\bar\beta))$$

$$+\frac{1}{2}\rho(\bar{\beta})f'''(W(\bar{\beta}))\}^{-1} \tag{14}$$

其中 $f'(W(\bar{\beta}))$ 代表 f 对W的一阶导数,等.

利用 (13) 式,我们直接利用 $SU(2)$ Wilson 作用量的结果,计算了几种 $SU(2)$ 作用量的 β_c 值,其结果见表 1 第三列. 计算中关于 Wilson 作用量的数据取自文献 [16].

四、讨　论

本文中,我们平均场近似与 Shahbazyan 提出的方法求得了几种 $SU(2)$ 格点规范作用量的 β_c 值,两种方法求得的 β_c 值是比较接近的. 对于这个结果,我们的看法如下:(1) 朴素的平均场近似虽嫌过于简略,但它在确定过渡点方面还是比较精确的[4]. 在我们的计算中,用这种方法定出的 Wilson 作用量与 Manton 作用量的 β_c 值与现有的 Monte Carlo 结果也符合得很好. 所以,可以认为,用这种方法定出的另外一些作用量的 β_c 值也是可以接受的. 我们正拟用 Monte Carlo 方法证实这一点. (2) 在利用 Shahbazyan 提出的方法的计算中,我们虽然忽略了高阶关联子,但计算中发现.其影响也是很小的. 由 (1) 和 (2) 可见,我们的结果有支持普适性假设的迹象.

感谢汪容教授与董绍静同志与我们作的有益的讨论. 计算工作在本系机房进行.

参 考 文 献

[1] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
[2] B. Lautrup and M. Nauenberg, *Phys. Rev. Lett.*, 45(1980), 1755; R. C. Edgar, L. McCrossen and K. J. M. Moriarty, *J. Phys.*, G7(1981), L85.
[3] R. Balian, J. M. Drouffe, C. Itzykson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3376; **D11**(1975), 2089, 2104.
[4] J. Greensite and B. Lautrup, *Phys. Lett.*, **104B**(1981), 41. D. Pritchard. *Phys. Lett.*, **106B**(1981), 193. P. Cvitanovic, J. Greensite and B. Lautrup, *Phys. Lett.*, **105B**(1981), 197; N. D. Haridass, P. G. Lauwers, *Nucl. Phys.*, **B210**(1982), 388.
[5] Zheng Xi-te, Chung-I Tan and Chen Tian-lun, *Phys. Rev.*, **D26** (1982), 2843.
[6] Yu. M. Makeenko et al., *Phys. Lett.*, **126B**(1983), 82.
[7] N. S. Manton, *Phys. Lett.*, **96B**(1980), 328.
[8] J. Villain, *J. de Phys.*, **36**(1975), 581.
[9] 李文铸, 董绍静《物理学报》Vol. **33**(1984), 1459.
[10] T. V. Shahbazyan, *Phys. Lett.*, **128B**(1983), **79**.
[11] R. Brout, in Phase Transitions (Benjamin New York 1965).
[12] S. Elitzur, *Phys. Rev.*, **D12**(1975), 3978.
[13] E. Brezin and J. M. Drouffe, *Nucl. Phys.*, **B200**(1982), 193.
[14] H. Flyvbjerg, B. Lautrup and J. B. Zuber, *Phys. Lett.*, **110B**(1982), 279.
[15] C. B. Lang, C. Rebbi et al., *Phys. Lett.*, **101B**(1981), 173.
[16] B. Berg and J. Stehr, *Z. Phys.*, **C9**(1981), 333.

MEAN FIELD STUDY AND UNIVERSALITY IN LATTICE GAUGE THEORY

LI WEN-ZHU　ZHANG JIAN-BO　JI DA-REN

(Zhejiang University)

ABSTRACT

We study manton's action and several other actions in lattice gauge theory with naive mean field approximation method and the method proposed by Shahbazyan. Values of β at crossover point are obtained with different kinds of $SU(2)$ actions by using both mean field approximation method and the method proposed by Shahbazyan. While in later case, universality is assumed and the Monte Carlo results of $SU(2)$ Wilson action and the relations between Wilson action and other actions are taken as input. The results of the two methods are compared and the universality assumption are checked.