第10卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 10, No. 3
1986年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1986

sd 玻色子 6 维无迹算符和 SO_6 波函数

徐辅新 崔可范
(安徽大学) (安徽师范大学)

摘　要

本文引进了 *sd* 玻色子的 6 维无迹算符. 按照类似于文献 [1,2] 中的方法, 首先用这些算符构成 $SU_6 \supset SO_6 \supset SO_5 \supset SO_3$ 波函数, 然后求出用通常的 s^+d^+ 算符表达的明显公式.

一、引　言

文献 [1,2] 中指出, Vilenkin 等人[3,4]所引进的无迹 d 玻色子算符 (a^+_μ, a_ν), 在表达 $|\nu\nu O_3\rangle$ 基矢时, 形式简洁, 但不便于使用. 杨泽森利用无迹算符构成了 d 玻色子波函数的 $SU_2 \otimes SU_2$ 基矢, 并按照比较简便的途径, 求出 $|\nu\nu O_3\rangle$ 基矢在 $SU_2 \otimes SU_2$ 表象的用通常的 d^+ 算符表达的明显公式.

本文首先推广 Vilenkin 等人的方法, 引进 *sd* 玻色子的 6 维无迹算符, 再利用类似杨泽森的方法, 用这些算符构成 *sd* 玻色子的 $SU_6 \supset SO_6 \supset SO_5 \supset SO_3$ 波函数. 这种波函数由总玻色子数 N, 未配对玻色子数 σ, 未配对 d 玻色子数 ν, 角动量量子数 LM 以及流动指标 $\varkappa$ 标记. 最后, 为了便于直接使用, 我们求得了 $|N\sigma\nu \varkappa LM\rangle$ 通过 s^+d^+ 表示的明显表达式.

二、*sd* 玻色子的 6 维无迹算符

Vilenkin 等人[3,4]所引进的 d 玻色子的 5 维无迹算符是这样定义的:

$$a^+_\mu = d^+_\mu - \sqrt{5}\,(d^+d^+)_0 \frac{1}{2\hat{n}+5} \tilde{d}_\mu, \tag{2.1}$$

$$a_\mu = (a^+_\mu)^+ \tag{2.2}$$

其中 d^+_μ, d_μ 是 d 玻色子的产生和消灭算符.

$$\tilde{d}_\mu = (-1)^\mu d_{-\mu}, \quad \hat{n} = \sum_\mu d^+_\mu d_\mu$$

这种 a^+ 算符具有如下的性质:

本文 1984 年 9 月 19 日收到.

$$[a_\mu^+, a_\nu^+] = 0, \tag{2.3}$$

$$(a^+a^+)_0 = \frac{5}{(2\hat{n}+1)(2\hat{n}-1)}(d^+d^+)_0(d^+d^+)_0(\tilde{d}\tilde{d})_0. \tag{2.4}$$

这说明，无迹算符作用于无配对玻色子态时，总是不会引起配对的． 设 $|\phi\rangle$ 满足条件 $(\tilde{d}\tilde{d})_0|\phi\rangle = 0$，而 $|\phi'\rangle = a_\mu^+|\phi\rangle$，则 $(a^+a^+)_0|\phi'\rangle = a_\mu^+(a^+a^+)_0|\phi\rangle = 0$，即说明 $|\phi'\rangle$ 也满足条件 $(\tilde{d}\tilde{d})_0|\phi'\rangle = 0$．

下面我们给出 sd 玻色子的 6 维无迹算符 $\boldsymbol{s}^+, \boldsymbol{d}_\mu^+$ 的定义，然后给出(2.3)及(2.4)的推广形式．

$$\boldsymbol{s}^+ = s^+ - \{s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0\}\frac{1}{2\hat{N}+6}s, \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{d}_\mu^+ = d_\mu^+ - \{s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0\}\frac{1}{2\hat{N}+6}\tilde{d}_\mu. \tag{2.6}$$

其中 s^+, d^+ 是 sd 玻色子的产生算符，$\hat{N} = \hat{n}_s + \hat{n}_d$ 为总玻色子数算符．根据定义，不难验证：

$$[\boldsymbol{s}^+, \boldsymbol{d}_\mu^+] = 0, \tag{2.7}$$

$$[\boldsymbol{d}_\mu^+, \boldsymbol{d}_\nu^+] = 0, \tag{2.8}$$

我们还证明了

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{s}^+ + \sqrt{5}(\boldsymbol{d}^+\boldsymbol{d}^+)_0\\ &= \frac{1}{4\hat{N}(\hat{N}+1)}[s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0]^2[ss + \sqrt{5}(\tilde{d}\tilde{d})_0],\end{aligned} \tag{2.9}$$

这三个式子就是 $(\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{d}_\mu^+)$ 的无迹性条件．假设 $|\Phi\rangle$ 是无配对玻色子态，即满足条件

$$(ss + \sqrt{5}(\tilde{d}\tilde{d})_0)|\Phi\rangle = 0.$$

而 $|\Phi'\rangle = \boldsymbol{s}^+|\Phi\rangle$，$|\Phi''\rangle = \boldsymbol{d}_\mu^+|\Phi\rangle$，则

$$(\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{s}^+ + \sqrt{5}(\boldsymbol{d}^+\boldsymbol{d}^+)_0)|\Phi'\rangle = \boldsymbol{s}^+(\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{s}^+ + \sqrt{5}(\boldsymbol{d}^+\boldsymbol{d}^+)_0)|\Phi\rangle = 0,$$

以及 $(\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{s}^+ + \sqrt{5}(\boldsymbol{d}^+\boldsymbol{d}^+)_0)|\Phi''\rangle = 0$

这说明，如果 $|\Phi\rangle$ 满足条件 $(ss + \sqrt{5}(\tilde{d}\tilde{d})_0)|\Phi\rangle = 0$，则 $\boldsymbol{s}^+|\Phi\rangle$ 及 $\boldsymbol{d}_\mu^+|\Phi\rangle$ 也满足同样的条件．即是说 $\boldsymbol{s}^+$ 及 $\boldsymbol{d}_\mu^+$ 作用于无配对玻色子态时，总是不引起新的配对．这里所谓配对，是指由 $[s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0]$ 产生的 6 维对．

三、用 $\boldsymbol{s}^+\boldsymbol{d}^+$ 算符构成 SO_6 波函数

要构成 SO_6 波函数，可先求出基本基矢．所谓基本基矢是指所有玻色子都不配成 6 维对的基矢． 我们用 $|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle$ 代表一般的 SO_6 基矢．其中 N 是总玻色子数，σ 是不配成 6 维对的玻色子数，ν 是不配成 5 维对的 d 玻色子数，L M 是角动量量子数，$\varkappa$ 是流动指标．利用 O_6 群的卡斯米尔算子

$$R_6 = \hat{N}(\hat{N}+4) - [\sqrt{5}(d^+d^+)_0 + s^+s^+][\sqrt{5}(\tilde{d}\tilde{d})_0 + ss]$$

可得：

$$(ss+\sqrt{5}(\tilde{d}\tilde{d})_0)|N,\sigma\nu\varkappa LM\rangle = |N-2\sigma\nu\varkappa LM\rangle\sqrt{(N-\sigma)(N+\sigma+4)}\,, \tag{3.1}$$

$$(s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0)|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle = |N+2,\sigma\nu\varkappa LM\rangle\sqrt{(N+2-\sigma)(N+\sigma+6)}\,. \tag{3.2}$$

利用(3.1)和 (3.2) 式可得到 SO_6 波函数 $|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle$ 通过基本基矢 $|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle$ 表示的公式:

$$|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle = \sqrt{\frac{(\sigma+2)!}{(2)^{N-\sigma}\left(\frac{N-\sigma}{2}\right)!\left(\frac{N+\sigma+4}{2}\right)!}}\,[s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0]^{\frac{N-\sigma}{2}}|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle. \tag{3.3}$$

因为 $\boldsymbol{s}^+$ 和 $\boldsymbol{s}$ 都是无迹算符,故用它们对基矢作用后可得:

$$\boldsymbol{s}^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle = |\sigma+1,\sigma+1,\ \nu\varkappa LM\rangle\langle\sigma+1,\sigma+1,\ \nu\varkappa LM|s^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle, \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{s}|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle = |\sigma-1,\sigma-1,\nu\varkappa LM\rangle\langle\sigma-1,\sigma-1,\nu\varkappa LM|s|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle. \tag{3.5}$$

借此可从基矢 $|\nu\nu\nu\varkappa LM\rangle$ 出发对 σ 值递推而得到

$$|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle = (\boldsymbol{s}^+)^{\sigma-\nu}|\nu\nu\nu\varkappa LM\rangle C(\sigma;\nu). \tag{3.6}$$

由于极值基矢 $|\nu\nu\nu\varkappa LM\rangle$ 是已知的[1],只要求出系数 $C(\sigma,\nu)$ 即可确定基矢 $|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle$。为此,先求(3.4)式的系数,再进一步求 $C(\sigma,\nu)$。由(3.4)式可得:

$$\langle\sigma+1,\sigma+1,\nu\varkappa LM|\boldsymbol{s}^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle = \langle\sigma+1,\sigma+1,\nu\varkappa LM|s^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle. \tag{3.7}$$

利用 $ss^+ - s^+s = 1$ 和 $\sum\limits_{\sigma}|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle\langle N\sigma\nu\varkappa LM| = 1$ 得:

$$\begin{aligned}1 = {} & \langle\sigma+1,\ \sigma+1,\ \nu\varkappa LM|S^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle^2 \\ & + \langle\sigma\sigma\nu\varkappa LM|s|\sigma+1,\sigma-1,\nu\varkappa LM\rangle^2 \\ & - \langle\sigma\sigma\nu\varkappa LM|S^+|\sigma-1,\ \sigma-1,\nu\varkappa LM\rangle^2.\end{aligned} \tag{3.8}$$

利用(3.2)式化简上式第二项,并令

$$f(\sigma,\nu) = \langle\sigma+1,\sigma+1,\nu\varkappa LM|s^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle^2, \tag{3.9}$$

则(3.8)式可写成递推关系式:

$$f(\sigma,\nu) - \frac{\sigma+1}{\sigma+2}f(\sigma-1;\nu) = 1. \tag{3.10}$$

考虑到初始条件 $f(\nu,\nu) = 1$, (3.11)

并令 $F(\sigma,\nu) = (\sigma+2)f(\sigma,\nu)$, (3.12)

最后得出:

$$F(\sigma,\nu) = \frac{1}{2}(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4), \tag{3.13}$$

$$f(\sigma,\nu) = \frac{(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4)}{2(\sigma+2)}. \tag{3.14}$$

适当规定不同 σ 值的基本基矢的相角关系,可使 $\langle\sigma+1,\sigma+1,\nu\varkappa LM|S^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle > 0$,即:

$$\langle\sigma+1,\sigma+1,\nu\varkappa LM|s^+|\sigma\sigma\nu\varkappa LM\rangle = \sqrt{\frac{(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4)}{2(\sigma+2)}}, \tag{3.15}$$

因此，(3.4)式给出：

$$s^+|\sigma\sigma\nu\kappa LM\rangle = |\sigma+1,\sigma+1,\nu\kappa LM\rangle\frac{(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4)}{2(\sigma+2)}. \tag{3.16}$$

由此，以 s^+ 重复作用，可得

$$(s^+)^k|\sigma\sigma\nu\kappa LM\rangle = |\sigma+k,\sigma+k,\nu\kappa LM\rangle A(k\sigma\nu), \tag{3.17}$$

其中，$A(k\sigma\nu)$ 关于 k 的递推关系如下：

$$A(k+1,\sigma\nu) = \sqrt{\frac{(\sigma+1-\nu+k)(\sigma+4+\nu+k)}{2\sigma+2k+4}}\,A(k,\sigma,\nu) \tag{3.18}$$

以 $A(0,\sigma,\nu)=1$ 为初条件解之得：

$$A(k,\sigma,\nu) = \sqrt{\frac{(\sigma+1)!(\sigma-\nu+k)!(\sigma+\nu+3+k)!}{2^k(\sigma+k+1)!(\sigma-\nu)!(\sigma+\nu+3)!}} \tag{3.19}$$

故 $(s^+)^k|\sigma\sigma\nu\kappa LM\rangle$

$$= |\sigma+k,\sigma+k,\nu\kappa LM\rangle\sqrt{\frac{(\sigma+1)!(\sigma-\nu+k)!(\sigma+\nu+3+k)!}{2^k(\sigma+k+1)!(\sigma-\nu)!(\sigma+\nu+3)!}} \tag{3.20}$$

令 $k=\sigma-\nu$，有

$$|\sigma\sigma\nu\kappa LM\rangle$$
$$= (s^+)^{\sigma-\nu}|\nu\nu\nu\kappa LM\rangle\sqrt{\frac{(2)^{\sigma-\nu}(\sigma+1)!(2\nu+3)!}{(\nu+1)!(\sigma-\nu)!(\sigma+\nu+3)!}} \tag{3.21}$$

即

$$C(\sigma,\nu) = \sqrt{\frac{(2)^{\sigma-\nu}(\sigma+1)!(2\nu+3)!}{(\nu+1)!(\sigma-\nu)!(\sigma+\nu+3)!}} \tag{3.22}$$

将(3.21)代入(3.3)式就得到：

$$|N\sigma\nu\kappa LM\rangle = \sqrt{\frac{(\sigma+2)!}{(2)^{N-\sigma}\left(\frac{N-\sigma}{2}\right)!\left(\frac{N+\sigma+4}{2}\right)!}}$$
$$\times\sqrt{\frac{(2)^{\sigma-\nu}(\sigma+1)!(2\nu+3)!}{(\nu+1)!(\sigma-\nu)!(\sigma+\nu+3)!}}$$
$$\times[s^+s^+ + \sqrt{5}(d^+d^+)_0]^{\frac{N-\sigma}{2}}(s^+)^{\sigma-\nu}|\nu\nu\nu\kappa LM\rangle. \tag{3.23}$$

这就是用 6 维无迹算符表示的 SO_6 波函数。其中 $|\nu\nu\nu\kappa LM\rangle$ 是 $N=\sigma=\nu$ 的波函数，即只有未配对的 d 玻色子，这种波函数是已知的。

四、SO_6 波函数的明显表达式

在本节中，我们将用与文献[1,2]类似的方法，将 $(s^+)^{\sigma-\nu}$ 展开，求得 $|N\sigma\nu\kappa LM\rangle$ 通过 s^+，d^+ 表示的明显表达式。为此，我们把 $|\sigma\sigma\nu\kappa LM\rangle$ 按群链 $SU_6\supset SU_5\supset SO_5\supset SO_3$ 的基矢 $|n\nu\kappa LM\rangle_{(d)}$ 展开：

$$\left|\sigma\sigma\nu\kappa LM\right\rangle = \sum_{n=\nu,\nu+2\cdots\sigma}\frac{(S^+)^{\sigma-n}}{\sqrt{(\sigma-n)!}}\left|n\nu\kappa LM\right\rangle_{(d)}Q(n,\sigma,\nu) \tag{4.1}$$

式中 $|n\nu\chi LM\rangle_{(d)}$ 为 d 玻色子波函数，n 是 d 玻色子总数．$Q(n,\sigma,\nu)$ 是待求的系数．

用 $[ss+\sqrt{5}(\tilde{d}\tilde{d})_0]$ 作用在(4.1)式两边应为 0．故不难推得 Q 的递推关系：

$$\sqrt{(n-\nu+2)(n+\nu+5)}Q(n+2,\sigma,\nu)+\sqrt{(\sigma-n)(\sigma-n-1)}Q(n\sigma\nu)=0, \tag{4.2}$$

$$故\ Q(n\sigma\nu)=(-1)^{\frac{n-\nu}{2}}\sqrt{\frac{(\sigma-\nu)!(2\nu+3)!\left(\frac{n+\nu+2}{2}\right)!}{(\sigma-n)!\left(\frac{n-\nu}{2}\right)!(\nu+1)!(n+\nu+3)!}}\,Q(\nu\sigma\nu). \tag{4.3}$$

$$(n=\nu,\nu+2,\cdots\sigma\ 或\ \sigma-1)$$

下面求 $Q(\nu,\sigma,\nu)$ 关于 σ 的递推关系．

由(3.16)式知道

$$|\sigma+1,\sigma+1,\nu\chi LM\rangle=\sqrt{\frac{2(\sigma+2)}{(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4)}}\,s^+|\sigma\sigma\nu\chi LM\rangle, \tag{4.4}$$

利用 $Q(n\sigma\nu)$ 的定义

$$\begin{aligned}&|\sigma+1,\sigma+1,\nu\chi LM\rangle\\ &=\sum_{n'=\nu,\nu+2\cdots(\sigma+1)}\frac{(S^+)^{\sigma+1-n'}}{\sqrt{(\sigma+1-n')!}}|n'\nu\chi LM\rangle_{(d)}Q(n',\sigma+1,\nu),\end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}&|\sigma\sigma\nu\chi LM\rangle\\ &=\sum_{n=\nu,\nu+2\cdots\sigma}\frac{(s^+)^{\sigma-n}}{\sqrt{(\sigma-n)!}}|n\nu\chi LM\rangle_{(d)}Q(n\sigma\nu).\end{aligned} \tag{4.6}$$

由(4.4)—(4.6)及 s^+ 的定义(2.5)式可得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n'=\nu,\nu+2\cdots(\sigma+1)}\frac{(s^+)^{\sigma+1-n'}}{\sqrt{(\sigma+1-n')!}}|n'\nu\chi LM\rangle Q(n',\sigma+1,\nu)\\ &=\sum_{n=\nu,\cdots\sigma}\frac{(s^+)^{\sigma-n+1}}{\sqrt{(\sigma-n+1)!}}|n\nu\chi LM\rangle_{(d)}Q(n\sigma\nu)(n+\sigma+4)\\ &\quad\times\sqrt{\frac{(\sigma-n+1)}{(2\sigma+4)(\sigma+\nu+1)(\sigma+\nu+4)}}-\sum_{n=\nu,\nu+2\cdots(\sigma-1)}\frac{(s^+)^{\sigma-n-1}}{\sqrt{(\sigma-n-1)!}}\\ &\quad\times|n+2,\nu\chi LM\rangle_{(d)}Q(n\sigma\nu)\sqrt{\frac{(\sigma-n)(\sigma+2-\nu)(n+\nu+5)}{(2\sigma+4)(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4)}}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

上式右方第一项，可以直接将求和设想为 $n=\nu,\cdots(\sigma+1)$，而在右方第二项中，令 $n+2=n'$，故求和为 $n'=\nu+2,\cdots\sigma+1$．于是

$$\begin{aligned}&\sqrt{(2\sigma+4)(\sigma-\nu+1)(\sigma+\nu+4)}Q(n',\sigma+1,\nu)\\ &=Q(n'\sigma\nu)(n'+\sigma+4)\sqrt{(\sigma-n'+1)}-Q(n'-2,\sigma,\nu)\\ &\quad\times\sqrt{(\sigma-n'+2)(n'-\nu)(n'+3+\nu)}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

上式成立范围为

$$n'=\nu,\nu+2,\cdots(\sigma+1),$$

把(4.3)代到(4.8)即可得出 $Q(\nu,\sigma,\nu)$ 关于 σ 的递推关系

$$Q(\nu,\sigma+1,\nu)=Q(\nu\sigma\nu)\sqrt{\frac{\sigma+\nu+4}{(2\sigma+4)}}. \tag{4.9}$$

把(4.1)式用于 $\sigma=\nu$ 的特殊情形,其右方只有 $n=\nu$ 一项,并得出 $Q(\nu,\nu,\nu)=1$, 以此为初始条件可求得:

$$Q(\nu,\sigma+1,\nu)=\sqrt{\frac{(2)^{\nu+1}(\nu+1)!}{(2)^{\sigma+2}(\sigma+2)!}}\sqrt{\frac{(\sigma+\nu+4)!}{(2\nu+3)!}} \tag{4.10}$$

或

$$Q(\nu\sigma\nu)=\sqrt{\frac{(\nu+1)!(\sigma+\nu+3)!}{(2)^{\sigma-\nu}(\sigma+1)!(2\nu+3)!}}. \tag{4.11}$$

因此,根据(4.3)可得

$$Q(n,\sigma,\nu)=(-1)^{\frac{n-\nu}{2}}\sqrt{\frac{(\sigma+\nu+3)!(\sigma-\nu)!\left(\frac{n+\nu+2}{2}\right)!}{(2)^{\sigma-\nu}(\sigma+1)!(\sigma-n)!\left(\frac{n-\nu}{2}\right)!(n+\nu+3)!}}, \tag{4.12}$$

利用这个结果确定了展开式(4.1)之后,代到(3.3)中最后得到 $|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle$ 通过 s^+d^+ 的明显表达式:

$$|N\sigma\nu\varkappa LM\rangle=\sqrt{\frac{(\sigma+2)!}{(2)^{N-\sigma}\left(\frac{N-\sigma}{2}\right)!\left(\frac{N+\sigma+4}{2}\right)!}}\,[s^+s^++\sqrt{5}(d^+d^+)_0]^{\frac{N-\sigma}{2}}$$

$$\times\sum_{n=\nu,\nu+2\cdots\sigma}\frac{(s^+)^{\sigma-n}}{\sqrt{(\sigma-n)!}}|n\nu\varkappa LM\rangle_{(d)}Q(n,\sigma,\nu). \tag{4.13}$$

本工作是在杨泽森同志建议和帮助下完成的,特此致谢.

参 考 文 献

[1] 杨泽森,高能物理与核物理,**6**(1982),630.
[2] 杨泽森,高能物理与核物理,**7**(1983),245.
[3] N. Y. Vilenkin, Special Functions and Theory of Groups Representations (A. M. S. Tranl. Providence, R. I., 1968).
[4] M. A. Loke, "The Development of the Boson Calculus for the Orthogonal and Symplectic Groups "Thesis, University of Adelaide (1974).

TRACELESS OPERATORS AND SO_6 WAVE FUNCTIONS OF *sd* BOSONS

Xu Fu-xin Cui Ke-fan
(Anhui University) *(Anhui Normal University)*

Abstract

Traceless operators of sd bosons are introduced and used to construct the $SU_6\supset SO_6\supset SO_5\supset SO_3$ wave functions of *sd* bosons according to the method of T. S. Yang.