

形变核带间 $E2$ 跃迁的 IBM 表示式¹⁾

凌寅生 高顺福

(苏州大学)

摘 要

采用一般的一体 $E2$ 算符, 导出了 $SU(3)$ 基中第一 β, γ 带到基带的 $E2$ 跃迁的解析表达式.

众所周知, 能级对波函数不敏感, 电磁跃迁是对波函数好坏重要的检验. 在 IBM 中, 一体的 $E2$ 跃迁算符可写为^[1,2]

$$T^{(E2)} = \alpha Q^{(2)} + \beta (d^+ \tilde{d})^{(2)}, \quad (1)$$

其中

$$Q^{(2)} = (s^+ \tilde{d})^{(2)} + (d^+ \tilde{s})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^+ \tilde{d})^{(2)}, \quad (2)$$

$Q^{(2)}$ 和 $(d^+ \tilde{d})^{(2)}$ 构成 $SU(3) \subset SU(6)$ 的生成元. 与相互作用的哈密顿具有 $SU(3)$ 极限时, (1) 中的第一项只引起带内以及简并的 β, γ 带之间的跃迁. 第二项除对带内跃迁有贡献外, 还可以引起带间跃迁.

当波函数用 $SU(3)$ 基时, $(d^+ \tilde{d})^{(2)}$ 项引起的 $E2$ 跃迁的解析表达式比较复杂, [1] 中只给出了由 $Q^{(2)}$ 项所引起的带内跃迁的解析表达式. [2] 中用 O. Scholten 的程序 PHINT, 对玻色子数 $N = 12 - 17$ 的核, 讨论了由 $(d^+ \tilde{d})^{(2)}$ 引起的 2β 态和 2γ 态 (属于 $SU(3)$ 的 $(2N - 4, 2)$ 表示) 到基态 0_2^+ (属于 $SU(3)$ 的 $(2N, 0)$ 表示) 的 $E2$ 跃迁. 对于有较多实验数据的第一 β, γ 带 ($SU(3)$ 的 $(2N - 4, 2)$ 表示) 到基带 ($SU(3)$ 的 $(2N, 0)$ 表示) 之间的 $E2$ 跃迁, 不难导出它的解析表达式. 为了书写简洁起见, 用

$$|[N](2N - 4, 2)L\rangle$$

表示 Vergados 基中 $K = 0$ 的态, 用 $|[N](2N - 4, 2)\bar{L}\rangle$ 表示 Vergados 基中 $K = 2$ 的态:

$$B(E2; L_{\beta}^+ \rightarrow L_{\gamma}^+)$$

$$= \beta^2 \cdot \frac{1}{2L + 1} \langle [N](2N, 0)L' \| (d^+ \tilde{d})^{(2)} \| [N](2N - 4, 2)\bar{L} \rangle^2$$

$$= \beta^2 \cdot \frac{5}{2L + 1} \left[\sum_{L''} \begin{Bmatrix} L' & L & 2 \\ 2 & 2 & L'' \end{Bmatrix} \right]$$

$$\cdot \langle [N](2N, 0)L' \| d^+ \| [N - 1](2N - 2, 0)L'' \rangle \langle [N](2N - 4, 2)\bar{L} \| d^+ \| [N$$

1) 本工作部分地是在中国科学院科学基金的资助下完成的.

本文 1985 年 12 月 13 日收到.

$$\begin{aligned}
& -1](2N-2, 0)L'' \rangle]^2 = \beta^2 \cdot 5(2L'+1)N^2 \left[\sum_{L''} \left\{ \begin{matrix} L' & L & 2 \\ 2 & 2 & L'' \end{matrix} \right\} \right. \\
& \cdot \langle [1](20), [N-1](2N-2, 0) \| [N](2N, 0) \rangle \langle (20)2, (2N-2, 0)L'' \| (2N, 0)L' \rangle \\
& \cdot \langle [1](20), [N-1](2N-2, 0) \| [N](2N-4, 2) \rangle \langle (20)2, (2N-2, 0)L'' \| (2N \\
& \left. -4, 2)L \rangle \right]^2. \tag{3}
\end{aligned}$$

$SU(6) \supset SU(3)$ 的同位标量因子 (ISF)

$$\langle [1](20), [N-1](2N-2, 0) \| [N](2N, 0) \rangle = 1, \tag{4}$$

$$\langle [1](20), [N-1](2N-2, 0) \| [N](2N-4, 2) \rangle = \sqrt{\frac{2(N-1)}{N(2N-3)}}, \tag{5}$$

(附录)

代入(3)式得

$$\begin{aligned}
B(E_2; L_{\beta}^+ \rightarrow L_{\alpha}^+) &= \beta^2 \cdot \frac{10(N-1)N}{2N-3} (2L'+1) \\
& \cdot \left[\sum_{L''} \left\{ \begin{matrix} L' & L & 2 \\ 2 & 2 & L'' \end{matrix} \right\} \langle (20)2, (2N-2, 0)L'' \| (2N, 0)L' \rangle \langle (20)2, (2N-2, 0)L'' \| (2N \\
& \left. -4, 2)L \rangle \right]^2. \tag{6}
\end{aligned}$$

式中 $SU(3) \supset SO(3)$ 的 ISF 可从文献 [3] 查出.

$$\begin{aligned}
B(E_2; L_{\gamma}^+ \rightarrow L_{\alpha}^+) &= \beta^2 \cdot \frac{1}{2L+1} \langle [N](2N, 0)L' \| (d^+ \bar{d})^{(2)} \| [N](2N-4, 2)\bar{L} \rangle^2 \\
&= \beta^2 \cdot \frac{5}{2L+1} \left[\sum_{L''} \left\{ \begin{matrix} L' & L & 2 \\ 2 & 2 & L'' \end{matrix} \right\} \right. \\
& \cdot \langle [N](2N, 0)L' \| d^+ \| [N-1](2N-2, 0)L'' \rangle \langle [N](2N-4, 2)\bar{L} \| d^+ \| [N \\
& \left. -1](2N-2, 0)L'' \rangle \right]^2 = \beta^2 \cdot \frac{10(N-1)N}{2N-3} (2L'+1) \\
& \cdot \left[\sum_{L''} \left\{ \begin{matrix} L' & L & 2 \\ 2 & 2 & L'' \end{matrix} \right\} \langle (20)2, (2N-2, 0)L'' \| (2N, 0)L' \rangle \langle (20)2, (2N \\
& \left. -2, 0)L'' \| (2N-4, 2)\bar{L} \rangle \right]^2. \tag{7}
\end{aligned}$$

对于实验数据比较多的 $2_{\beta}^+ \rightarrow 0_{\alpha}^+$, $2_{\gamma}^+ \rightarrow 0_{\alpha}^+$, $2_{\gamma}^+ \rightarrow 2_{\alpha}^+$, $3_{\gamma}^+ \rightarrow 2_{\alpha}^+$, $3_{\gamma}^+ \rightarrow 4_{\alpha}^+$ 跃迁, 可以得到解析表达式

$$B(E_2; 2_{\beta}^+ \rightarrow 0_{\alpha}^+) = \beta^2 \frac{8(N-1)N(4N^2-8N+7)^2}{315(2N-3)(2N-1)^2(4N^2-8N+1)}, \tag{8}$$

$$B(E_2; 2_{\gamma}^+ \rightarrow 0_{\alpha}^+) = \beta^2 \frac{64(N-2)(N-1)^2N(2N+1)}{105(2N-3)(2N-1)(4N^2-8N+1)}, \tag{9}$$

$$B(E_2; 2_{\gamma}^+ \rightarrow 2_{\alpha}^+) = \beta^2 \frac{64(N-2)(N-1)^2(2N+1)(2N+3)}{147(2N-3)(2N-1)(4N^2-8N+1)}, \tag{10}$$

$$B(E_2; 3_{\gamma}^+ \rightarrow 2_{\alpha}^+) = \beta^2 \frac{5(N-2)(N-1)(2N+3)}{27(2N-3)(2N-1)}, \tag{11}$$

$$B(E2; 3_2^+ \rightarrow 4_2^+) = \beta^2 \frac{8(N-2)(2N+3)(2N+5)}{147(2N-3)(2N-1)}. \quad (12)$$

与参量无关的分支比

$$\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)} = \frac{(4N^2 - 8N + 7)^2}{24(N-2)(N-1)(2N-1)(2N+1)}. \quad (13)$$

对于 $N = 12 - 17$ 之间的核, 该一比值近似地为一常数 0.16. 由此可见, $SU(3)$ 波函数适宜于描述 $2_1^+ \rightarrow 0_2^+$ 的 E2 跃迁强于 $2_2^+ \rightarrow 0_2^+$ 的 E2 跃迁的核. 很多形变核的实验, 定性上是支持这一结论的(图 1)

$$\frac{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 2_2^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)} = \frac{5(2N+3)}{7N}, \quad (14)$$

$$\frac{B(E2; 3_1^+ \rightarrow 4_2^+)}{B(E2; 3_1^+ \rightarrow 2_2^+)} = \frac{2N+5}{5(N-1)}. \quad (15)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 上述两分支比分别趋于忽略转动-振动相互作用时的分支比值 $\frac{10}{7}$ 与 $\frac{2}{5}$ (Alaga 规则)^[4](图 2, 图 3).

对于带内跃迁, 算符 (1) 中的两项都有贡献. 例如

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+) = \frac{1}{5} \langle [N](2N, 0)0 \| \alpha Q^{(2)} + \beta(d^+ \tilde{d})^{(2)} \| [N](2N, 0)2 \rangle^2. \quad (16)$$

$Q^{(2)}$ 的矩阵元为^[1]

$$\langle [N](2N, 0)0 \| Q^{(2)} \| [N](2N, 0)2 \rangle = \sqrt{N(2N+3)}, \quad (17)$$

$(d^+ \tilde{d})^{(2)}$ 的矩阵元为

$$\begin{aligned} & \langle [N](2N, 0)0 \| (d^+ \tilde{d})^{(2)} \| [N](2N, 0)2 \rangle \\ &= \sqrt{5} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{Bmatrix} \langle [N](2N, 0)0 \| d^+ \| [N-1](2N-2, 0)2 \rangle \langle [N](2N, 0)2 \| d^+ \| [N-1](2N-2, 0)2 \rangle \\ &= -\frac{4}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{N-1}{2N-1} \sqrt{N(2N+3)}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+) = \beta^2 \frac{N(2N+3)}{5} \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{4}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{N-1}{2N-1} \right)^2. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)}{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)} &= \frac{192}{[3\sqrt{7}r(2N-1) - 4(N-1)]^2} \\ &\cdot \frac{(N-2)(N-1)^2(2N-1)(2N+1)}{(2N-3)(2N+3)(4N^2 - 8N + 1)}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $r = \frac{\alpha}{\beta}$. 实验上 r 的取值范围为 0.9—1.3^[2]. 取 $r = 1$, 理论与实验的对照见图

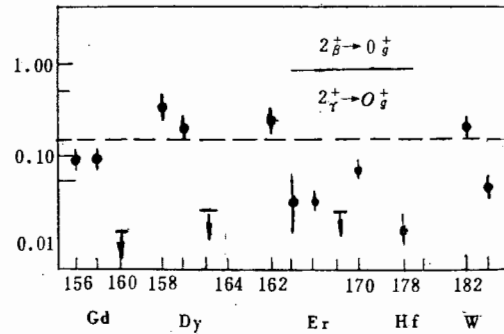


图 1 $\frac{B(E2; 2_2^+ \rightarrow 0_2^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_2^+)}$ 的理论(---)与实验(·)值的比较. 实验数据取自 [2].

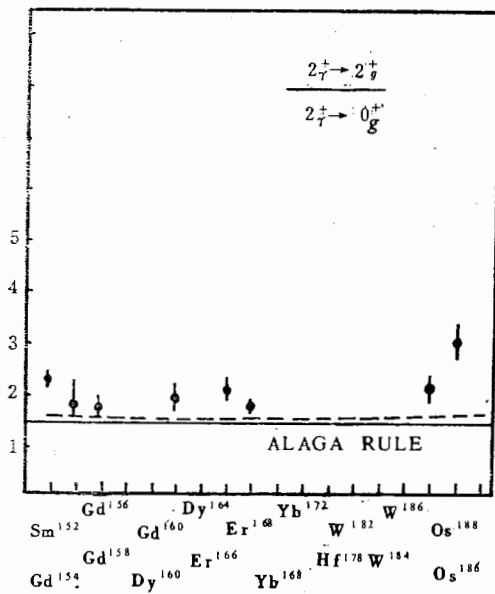


图 2 $\frac{B(E2; 2_{\gamma}^+ \rightarrow 2_g^+)}{B(E2; 2_{\gamma}^+ \rightarrow 0_g^+)}$ 的理论(---)与实验(·)值的比较。实验数据取自 [4]。

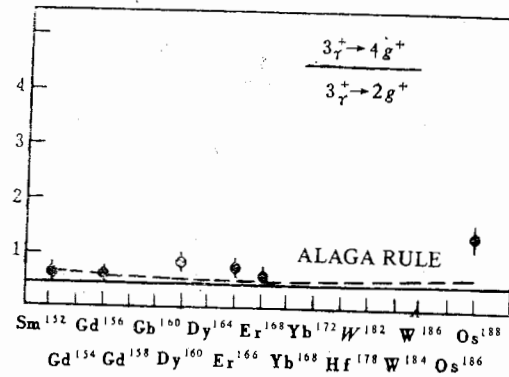


图 3 $\frac{B(E2; 3_{\gamma}^+ \rightarrow 4_g^+)}{B(E2; 3_{\gamma}^+ \rightarrow 2_g^+)}$ 的理论(---)与实验(·)值的比较。实验数据取自 [4]。

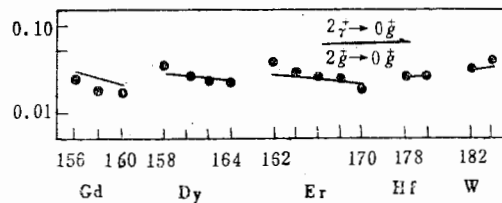


图 4 $\frac{B(E2; 2_{\gamma}^+ \rightarrow 0_g^+)}{B(E2; 2_g^+ \rightarrow 0_g^+)}$ 的理论(---)与实验(·)值的比较。实验数据取自 [2]。

作者与周孝谦, 吴华川, 吴祖胤进行过有益的讨论, 特此致谢。

附 录

$SU(6) \supset SU(3)$ 的 ISF $\langle [1](20), [N-1](2N-2, 0) \| [N](2N-4, 2) \rangle$ 和 $\langle [1](20), [N-1](2N-6, 2) \| [N](2N-4, 2) \rangle$

的计算

用 Vergados 基, $SU(3)$ 极限中的态矢量可以记为

$$|[N](\lambda\mu)KLM\rangle,$$

其中 N 为玻色子数, $[N]$ 为 $SU(6)$ 群的全对称表示, (λ, μ) 为 $SU(3)$ 群的不可约表示, K 为附加量子数。

最高权态

$$|[N](2N, 0)2N, 2N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (d_2^+)^N |0\rangle \quad (\text{A.1})$$

记

$$L^{(1)} = \sqrt{10} (d^+ \tilde{d})^{(1)}, \quad (\text{A.2})$$

$$Q^{(2)} = (s^+ \tilde{d})^{(2)} + (d^+ \tilde{s})^{(2)} - \frac{\sqrt{7}}{2} (d^+ \tilde{d})^{(2)}, \quad (\text{A.3})$$

$$D^{(4)} = (d^+ \tilde{d})^{(4)}, \quad (\text{A.4})$$

它们都是 $SU(6) \supset SU(3) \supset SO(3)$ 链下的不可约张量^[5]

$$L_m^{(1)} = T\{[1\bar{1}](11)1m\}, \quad (\text{A.5})$$

$$Q_m^{(2)} = T\{[1\bar{1}](11)2m\}, \quad (\text{A.6})$$

$$D_m^{(4)} = T\{[1\bar{1}](22)4m\}, \quad (\text{A.7})$$

其中 $[1\bar{1}]$ 为 $SU(6)$ 群的 Adjoint 表示。

将 $L^{(1)}$ 逐次作用在最高权态 (A.1) 上可得

$$\begin{aligned} & |[N](2N, 0)2N, 2N-2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{(N-1)!}} \left[\sqrt{\frac{3}{4N-1}} d_0^+ (d_2^+)^{N-1} + (N-1) \cdot \sqrt{\frac{2}{4N-1}} (d_1^+)^2 (d_2^+)^{N-2} \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

将 $Q^{(2)}$ 作用在最高权态 (A.1) 上可得

$$\begin{aligned} Q^{(2)}|[N](2N, 0)2N, 2N\rangle &= \alpha|[N](2N, 0)2N, 2N-2\rangle + \beta|[N](2N, 0)2N \\ & -2, 2N-2\rangle = \sqrt{\frac{N}{(N-1)!}} \left[s^+ (d_2^+)^{N-1} - \frac{\sqrt{2}}{2} d_0^+ (d_2^+)^{N-1} \right] |0\rangle, \\ \alpha &= \langle [N](2N, 0)2N, 2N-2 | Q^{(2)} | [N](2N, 0)2N, 2N \rangle \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{4N-1}}. \end{aligned}$$

由此可求得

$$\begin{aligned} & \beta|[N](2N, 0)2N-2, 2N-2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{N}{(N-1)!}} \left[s^+ (d_2^+)^{N-1} - 2\sqrt{2} \frac{N-1}{4N-1} d_0^+ (d_2^+)^{N-1} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{3} \frac{N-1}{4N-1} (d_1^+)^2 (d_2^+)^{N-2} \right] |0\rangle, \end{aligned}$$

归一化后可得

$$\begin{aligned} & |[N](2N, 0)2N-2, 2N-2\rangle \\ &= \sqrt{\frac{4N-1}{3(2N-1)(N-1)!}} \left[s^+ (d_2^+)^{N-1} - 2\sqrt{2} \frac{N-1}{4N-1} d_0^+ (d_2^+)^{N-1} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{3} \frac{N-1}{4N-1} (d_1^+)^2 (d_2^+)^{N-2} \right] |0\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

将 $D^{(4)}$ 作用在最高权态 (A.1) 上可得

$$\begin{aligned}
 D_2^{(2)}|[N](2N, 0)2N, 2N\rangle &= \alpha|[N](2N, 0)2N, 2N-2\rangle \\
 &+ \beta|[N](2N, 0)2N-2, 2N-2\rangle + \gamma|[N](2N-4, 2)2N-2, 2N-2\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{3N}{14(N-1)!}} d_0^+(d_2^+)^{N-1}|0\rangle,
 \end{aligned}$$

$$\alpha = \langle [N](2N, 0)2N, 2N-2 | D_2^{(2)} | [N](2N, 0)2N, 2N \rangle = \sqrt{\frac{9N}{14(4N-1)}},$$

$$\begin{aligned}
 \beta &= \langle [N](2N, 0)2N-2, 2N-2 | D_2^{(2)} | [N](2N, 0)2N, 2N \rangle \\
 &= -\frac{N-1}{4N-1} \cdot \sqrt{\frac{4N(4N-1)}{7(2N-1)}},
 \end{aligned}$$

由此可求得

$$\begin{aligned}
 \gamma|[N](2N-4, 2)2N-2, 2N-2\rangle \\
 &= \frac{N-1}{2N-1} \cdot \sqrt{\frac{N}{7(N-1)!}} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} s^+(d_2^+)^{N-1} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} d_0^+(d_2^+)^{N-1} - (d_1^+)^2(d_2^+)^{N-2} \right] |0\rangle,
 \end{aligned}$$

归一化后可得

$$\begin{aligned}
 |[N](2N-4, 2)2N-2, 2N-2\rangle \\
 &= \sqrt{\frac{1}{6(2N-1)(N-2)!}} \left[2s^+(d_2^+)^{N-1} + 2\sqrt{2} d_0^+(d_2^+)^{N-1} - \sqrt{3} (d_1^+)^2(d_2^+)^{N-2} \right] |0\rangle
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

利用 (A.1) 与 (A.10) 可求得矩阵元

$$\begin{aligned}
 \langle [N](2N-4, 2)2N-2, 2N-2 | d_0^+ | [N-1](2N-2, 0)2N-2, 2N-2 \rangle \\
 &= \sqrt{\frac{4(N-1)}{3(2N-1)}},
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
 \langle [N](2N-4, 2)2N-2, 2N-2 | d_2^+ | [N-1](2N-6, 2)2N-4, 2N-4 \rangle \\
 &= \sqrt{\frac{(N-2)(2N-1)}{2N-3}}.
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

利用 Wigner-Eckart 定理即可求得 $SU(6) \supset SU(3)$ 的 ISF

$$\langle [1](20), [N-1](2N-2, 0) || [N](2N-4, 2) \rangle = \sqrt{\frac{2(N-1)}{N(2N-3)}}, \tag{A.13}$$

$$\langle [1](20), [N-1](2N-6, 2) || [N](2N-4, 2) \rangle = \sqrt{\frac{(N-2)(2N-1)}{N(2N-3)}}. \tag{A.14}$$

参 考 文 献

- [1] A. Arima, F. Iachello, *Ann. Phys.*, **111**(1978), 201.
- [2] D. Warnor, R. Casten, *Phys. Rev.*, **C25**(1982), 2019.
- [3] J. Vergados, *Nucl. Phys.*, **A111**(1968), 681.
- [4] J. Eisenberg, W. Greiner, *Nuclear Models Collective and single-Particle Phenomena* North-Holland Publishing Company (1970).
- [5] B. Wybourne, *Classical Groups for Physicists* A Wiley-Interscience Publication (1974).

THE IBM EXPRESSIONS OF $B(E2)$ FOR INTER REPRESENTATION TRANSITIONS IN DEFORMED NUCLEI

LING YIN-SHENG GAO SHUN-FU
(*Suzhou University*)

ABSTRACT

The general one body $E2$ operator is used to derive the analytic expressions of $B(E2)$ from the first β and γ bands to the ground band under the $SU(3)$ basis.