第 11 卷 第 2 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 11, No. 2
1987 年 3 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1987

有限温度和有限化学势下规范理论的热力学性质（II）

王　勤　谋
（安徽师范大学物理系）

摘　　要

本文讨论规范理论中红外极限下的 Plasma 效应，把文献 [1] 结果推广到 QCD，计算表明在单圈近似下，QCD 与 QED 有相同的结果.

由于有限温度的规范理论对宇宙早期演化的研究具有重要作用，近年来人们进行了许多讨论[1-8]，在文献[1]中我们在 QED 中讨论了规范理论在有限温度和有限化学势下的 Plasma 效应，在考虑费米子质量情况下，计算 $\mu\neq 0$，$T\neq 0$ 时的单圈近似发现被屏蔽的只有电场，磁场则不然. 本文进一步在 QCD 中讨论，发现结果与 QED 是完全相似.

当然在 QCD 中要考虑的规范玻色子是胶子，对系统而言，总是处在色单态，所以与 QED 不同之处是不必引入背景荷. 另外有一点要说明，这就是我们现在考虑的是规范玻色子在通过费米子媒质时，(这里是夸克气)由于有限温度和有限化学势存在，这些相互作用对规范玻色子的极化张量 $\pi^{ab}_{\mu\nu}(q_0, \boldsymbol{q}, T, \mu)$ 产生了修正，而我们知道这种修正等价于使玻色子获得有限的质量，因此严格地讲规范玻色子获得的是一种“有效质量”. 但是理论原有的那些规范不变性仍得以保留，由于有限温度和化学势的存在，破坏的只是 Lorentz 协变性而已[7]. 这点与真空自发破缺，原有的规范对称性遭到破坏使粒子带有质量的 Higgs 机制是不同的.

与文[1]不同，在 QCD 中考虑胶子在介质中产生的 Plasma 效应，在单圈近似下意味着要计算下面几个单圈图的贡献；如图 1：此时胶子的极化张量 $\pi^{ab}_{\mu\nu}(q_0, \boldsymbol{q}, T, \mu)$ 可写成二部分：

$$\pi^{ab}_{\mu\nu}(q_0, \boldsymbol{q}, T, \mu) = \pi^{ab}_{\mu\nu}(q_0, \boldsymbol{q}, 0, 0) + \Delta\pi^{ab}_{\mu\nu}(q_0, \boldsymbol{q}, T, \mu) \tag{1}$$

右边第一项就是 QCD 中通常的 Lorentz 张量，而后一项则是由 T, μ 的存在而产生的修正.

图 1 (a) 给出：

$$\pi^{ab}_{\mu\nu(A)}(q_0, \boldsymbol{q}) = (-1)\sum_{i=1}^{N_f}\int\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}T_r\left[(-ig)\left(\frac{\mu\lambda_a}{2}\right)\frac{i}{\not{k}_i - m_i}\right.$$

本文 1986 年 3 月 19 日收到.

$$\cdot\left(-ig\gamma_\nu\frac{\lambda_b}{2}\right)\frac{i}{\not{k}_i-\not{q}-m_i}\Big] \tag{2}$$

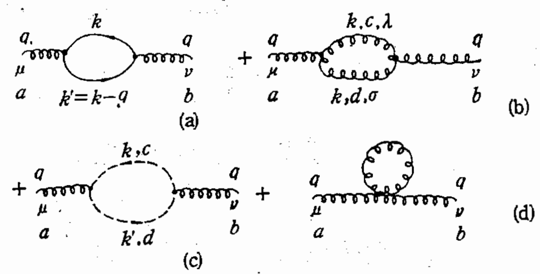

图　1

这里求和是对夸克的各种不同的味道进行的。利用文[1]的结果，我们能求出图 1(a) 对修正项的贡献：

$$\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu(A)}(0,0,T,\mu)$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_i\frac{i}{2}\delta_{ab}\frac{g^2}{\pi^2\beta^2}\left[\int_0^\infty\frac{x_i^2e^{b+y_i}}{(e^{b+y_i}+1)^2}dx_i+\int_0^\infty\frac{x_i^2e^{y_i-b}}{(e^{y_i-b}+1)^2}dx_i\right.\\ \displaystyle\left.\quad+\int_0^{\beta P_{iF}}\frac{x_i^2e^{b-y_i}}{(e^{b-y_i}+1)^2}dx_i\right]\qquad 当\ \mu\geqslant m\ 时\\ \displaystyle\sum_i\frac{i}{2}\delta_{ab}\frac{g^2}{\pi^2\beta^2}\left[\int_0^\infty dx_i\frac{x_i^2e^{b+y}}{(e^{b+y_i}+1)^2}+\int_0^\infty dx_i\frac{x_i^2e^{y_i-b}}{(e^{y_i-b}+1)^2}\right]\\ \qquad\qquad 当\ m>\mu\geqslant 0\ 时\end{cases} \tag{3}$$

$$\Delta\pi^{ab}_{00(A)}(0,0,T,\mu)=\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu(A)}(0,0,T,\mu) \tag{4}$$

$$\Delta\pi^{ab}_{ij(A)}(0,0,T,\mu)=0. \tag{5}$$

这里　$x_i=\beta|\boldsymbol{k}_i|$，$y_i=\sqrt{x_i^2+a_i^2}$，$a_i=\beta m_i$，$b=\beta\mu$，

$$P_{iF}=\sqrt{\mu^2-m_i^2}.$$

图 (b)，(c)，(d) 在不考虑有限温度和有限化学势存在时由通常的 Feynman 规则可以求出：

$$\pi^{ab}_{\mu\nu(B)}+\pi^{ab}_{\mu\nu(C)}+\pi^{ab}_{\mu\nu(D)}=\pi^{ab}_{\mu\nu(2)}$$
$$=-\frac{1}{2}g^2C_2(G)\delta_{ab}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2+i\varepsilon}\frac{1}{(k-q)^2+i\varepsilon}$$
$$\times[(q^2+4k^2-10q\cdot k)g_{\mu\nu}+2q_\mu q_\nu$$
$$+3k_\mu q_\nu+5k_\nu q_\mu-8k_\mu k_\nu] \tag{6}$$

这样利用文[1]的方法在考虑 $T\neq 0$，$\mu\neq 0$ 时极化张量的修正就是：

$$\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu[2]}(q_0,\boldsymbol{q},T,\mu)$$
$$=\frac{\delta_{ab}}{2\pi}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}dk_0\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-g^2C_2(G)[3q^2+4k^2-16q\cdot k]}{k^2(k-q)^2(e^{\beta k_0}-1)}$$
$$+\frac{\delta_{ab}}{2\pi}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon}dk_0\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-g^2C_2(G)[3q^2+4k^2-16q\cdot k]}{k^2(k-q)^2(e^{-\beta k_0}-1)} \tag{7}$$

我们在考虑红外极限下可直接得到:

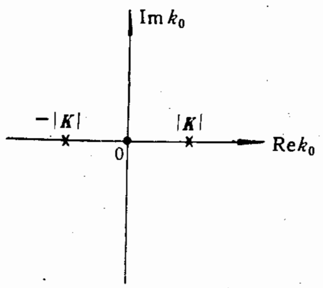

图 2

$$\begin{aligned}\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu[2]}(0,0,T,\mu) &= \frac{\delta_{ab}}{2\pi}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dk_0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-4g^2C_2(G)}{k^2(e^{\beta k_0}-1)} \\ &+ \frac{\delta_{ab}}{2\pi}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} dk_0\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-4g^2C_2(G)}{k^2(e^{-\beta k_0}-1)}\end{aligned} \tag{8}$$

可以看出,这个积分存在二个一阶极点.

$$k_0 = \pm|\boldsymbol{k}|$$

利用围道积分我们可以求出:

$$\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu[2]}(0,0,T,\mu) = ig^2C_2(G)\delta_{ab}4\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{|\boldsymbol{k}|(e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1)}$$

令 $\beta|\boldsymbol{k}| = x$, 有:

$$\begin{aligned}\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu[2]}(0,0,T,\mu) &= 2ig^2C_2(G)\delta_{ab}\frac{1}{\beta^2\pi^2}\int_0^\infty dx\times\frac{1}{e^x-1} \\ &= \frac{i}{3}g^2C_2(G)\delta_{ab}\frac{1}{\beta^2}\end{aligned} \tag{9}$$

现在我们来求 $\Delta\pi^{ab}_{00[2]}[0,0,T,\mu]$, 由(7)式可知:

$$\begin{aligned}&\Delta\pi^{ab}_{00[2]}(q_0,\boldsymbol{q},T,\mu) \\ &= \frac{-1}{2}g^2C_2(G)\delta_{ab}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}dk_0\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{q^2+4k^2-10q\cdot k+2q_0^2+8q_0k_0-8k_0^2}{k^2(k-q)^2(e^{\beta k_0}-1)}\right. \\ &\left.+\frac{1}{2\pi}\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon}dk_0\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{q^2+4k^2-10q\cdot k+2q_0^2+8q_0\cdot k_0-8k_0^2}{k^2(k-q)^2(e^{-\beta k_0}-1)}\right\}\end{aligned} \tag{10}$$

取红外极限有:

$$\begin{aligned}&\Delta\pi^{ab}_{00[2]}(0,0,T,\mu) \\ &= -2g^2C_2(G)\delta_{ab}\left\{\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon}dk_0+\int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon}dk_0\right]\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{e^{\beta k_0}-1}\right. \\ &\left.\cdot\left(\frac{1}{k^2}-\frac{2k_0^2}{k^4}\right)\right\}\end{aligned} \tag{11}$$

可以看出 $k_0 = \pm|\boldsymbol{k}|$, 是此积分的极点,利用不同的围道可以求出:

$$\begin{aligned}\Delta\pi^{ab}_{00[2]}(0,0,T,\mu) &= 2ig^2C_2(G)\delta_{ab}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\beta e^{\beta|\boldsymbol{k}|}}{(e^{\beta|\boldsymbol{k}|}-1)^2} \\ &= \frac{ig^2}{\pi^2\beta^2}C_2(G)\delta_{ab}\int_0^\infty dx\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{2ig^2}{\pi^2\beta^2}C_2(G)\delta_{ab}\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1} \\ &= \frac{i}{3}g^2\frac{C_2(G)}{\beta^2}\delta_{ab}\end{aligned} \tag{12}$$

这样我们就求出所有单圈图的贡献:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu}(0,0,T,\mu) &= \Delta\pi^{ab}_{\mu\mu(A)}(0,0,T,\mu) + \Delta\pi^{ab}_{\mu\mu[2]}(0,0,T,\mu)\\ \Delta\pi^{ab}_{00}(0,0,T,\mu) &= \Delta\pi^{ab}_{00(A)}(0,0,T,\mu) + \Delta\pi^{ab}_{00[2]}(0,0,T,\mu)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

且有:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu}(0,0,T,\mu) &= \Delta\pi^{ab}_{00}(0,0,T,\mu)\\ \Delta\pi^{ab}_{ii}(0,0,T,\mu) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

将此式与文[1]中(22)式比较,发现 QED 与 QCD 两者的结果是完全一致的(相差一个负号是取不同度规的缘故.).

我们知道在 QED 中，$\Delta\pi_{00}$ 与 $\Delta\pi_{ii}$ 在红外极限条件下分别与 Plasma 效应中电场和磁场对规范光子质量的贡献有关[8],所以只有电场有贡献，磁场则无贡献这个结论可以推广到 QCD, 也就是说可将 QCD 中的色场分成二类，一类在 Plasma 效应中对规范胶子的质量有贡献，这一类正与电场对应;另一类则跟磁场对应,在单圈近似下对胶子质量无贡献. 此外由(3)(4)(12)(13)式可知在高温下即 $\beta\to 0$, $b\to 0$, 时有 $\Delta\pi^{ab}_{00}\sim\delta_{ab}\dfrac{1}{\beta^2}\sim\delta_{ab}T^2$, 胶子获得的质量在高温下确与温度成正比. 而在 $T=0$, $\mu\neq 0$, 也就是 $\beta\to\infty$ 时 $\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu[2]}=\Delta\pi^{ab}_{00[2]}=0$ 只有 $\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu(A)}$ 有贡献,利用文[1]的结果可得:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\pi^{ab}_{\mu\mu}(0,0,0,\mu) &= \frac{i}{2}\delta_{ab}N_f g^2\frac{P_F^3}{\pi^2\mu}\\ \Delta\pi^{ab}_{00}(0,0,0,\mu) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

即在 $T=0$ 时与电场对应的色场的贡献被压抑时，磁场对应的色场的贡献才显现出来.

此外由于 QED 是 $U(1)$ 规范,而 QCD 是非 Abel 的 $SU(3)$ 规范,但竟得到完全一致的结果,这也许强烈地暗示结论对于任意的规范理论中的规范 Boson 的 Plasma 效应都是成立的.

此文是在杜宜谨导师的建议下完成的,为此表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] 王勤谋，高能物理与核物理，10(1986)，24.
[2] M. B. Kislinger and P. D. Morley, *Phys. Rev.*, D13(1976), 2765, 2771.
[3] M. B. Kislinger and P. D. Morley, *Phys. Reports*, 51C(1979), 63.
[4] B. A. Freedman and L. D. Lelerran, *Phys. Rev.*, D16(1979), 1130, 1147, 1169.
[5] A. D. Linde, *Rep. Prog. Phys.*, 42(1979), 389.
[6] D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.*, 53(1981), 43.
[7] S. Midorikawa, *Prog. Theo. Phys.*, 67(1982), 661.
[8] T. Hashimoto, *Prog. Theo. Phys.*, 73(1985), 1223.

THERMODYNAMICAL PROPERTIES OF GAUGE THEORIES AT FINITE TEMPERATURE AND CHEMICAL POTENTIAL (II)

WANG QIN-MOU
(*Anhui Normal University*)

ABSTRACT

In this paper the plasma effects of gauge theories are investigated. The results for the QED case obtained in a previous paper are extended to the QCD case. The calculation shows that the effects are identical for both QED and QCD cases. In one-loop approximation.