

旋转线圈测磁仪安装误差与测磁精度的关系

徐建铭

(中国科学院高能物理研究所)

摘要

本文分析了测磁精度和旋转线圈测磁仪安装误差之间的关系，给出了安装误差所引起的测磁误差的表达式。

一、引言

利用旋转线圈测磁仪能迅速测得各次磁场谐波的幅值和相角。这种测磁仪广泛地应用于多极磁铁的磁场测量，如带电粒子输运系统、各种加速器及其他使用多极磁铁的场合。显然，这种测磁设备的测磁精度与它的安装误差的关系，是应该加以研究的一个重要问题。

本文中采用圆柱坐标系 (r, θ, z) ，其 z -轴为被测磁场的对称轴。而令 (r', θ', z') 坐标系的 z' -轴为旋转线圈的旋转轴。旋转线圈的导线在 (r', θ', z') 坐标系里位于 $r' = r_0$ 处。

旋转线圈测磁仪的输出正比于沿着旋转线圈导线的磁场径向分量的积分值。如果没有安装误差(即 z' -轴和 z -轴重合)，则输出正比于 $\int_{-L/2}^{L/2} B_r(r, \theta, z)_{r=r_0} dz$ 。如果存在安装误差(z' -轴和 z -轴不重合)，则输出正比于 $\int_{-L/2}^{L/2} B_{r'}(r', \theta', z')_{r'=r_0} dz'$ 。式中 L 为旋转线圈的长度，坐标原点选在线圈旋转轴的中点。如在二维磁场情况，则旋转线圈输出正比于 $B_r(r, \theta)_{r=r_0}$ 或 $B_{r'}(r', \theta')_{r'=r_0}$ 。

磁场标量势的空间表示式可写成各次谐波分量之和，即

$$V(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m r^m \sin(m\theta + \varphi_m). \quad (1)$$

式中 $A_m r^m \sin(m\theta + \varphi_m)$ 是 m 次谐波(即 $2m$ 极磁场)的标量势。其中 A_m 为幅值， φ_m 为其相角。 A_m 和 φ_m 均可为 z 的函数，但在二维情况下，它们都是常数。对应于式(1)磁势的磁场分布为：

$$B_r(r, \theta, z) = -\mu \sum_{m=1}^{\infty} m A_m r^{m-1} \sin(m\theta + \varphi_m), \quad (2a)$$

或者，

为
坐标系中

如身
换关系为

在上述各
入式(1)

从上式可

或者，

在式(7)

(2b)

磁

$$B_{\theta}(r, \theta, z) = -\mu \sum_{m=1}^{\infty} m A_m r^{m-1} \cos(m\theta + \varphi_m). \quad (2b)$$

或者,

$$B(r, \theta, z) = B_{\theta} + iB_r = -\mu \sum_{m=1}^{\infty} m A_m r^{m-1} e^{i(m\theta + \varphi_m)}. \quad (3)$$

为了分析旋转线圈测磁仪安装误差与测磁精度间的关系,我们先求出在 (r', θ', z') 坐标系中磁势的表示式.

二、在 (r', θ', z') 坐标系中磁势的表示式

如果在某一点旋转轴(z' -轴)偏离磁对称轴(z -轴) Δr 及 $\Delta\theta$, 如图 1 所示,则坐标转换关系为:

$$r = r' + \Delta r \cos(\theta' - \Delta\theta), \quad (4a)$$

$$\theta = \theta' - \frac{\Delta r}{r'} \sin(\theta' - \Delta\theta), \quad (4b)$$

$$z = z'. \quad (4c)$$

在上述各式中只保留 Δr 、 $\Delta\theta$ 及倾角 δ_x 和 δ_y (见第 4 节)的一级项. 把式 (4a), (4b) 代入式 (1), 化简, 只保留 Δr 及 $\Delta\theta$ 的一级项. 最后得到:

$$V(r', \theta', z') = \sum_{m=1}^{\infty} A_m r'^m \left[\sin(m\theta' + \varphi_m) + m \frac{\Delta r}{r'} \times \sin(m\theta' - \theta' + \varphi_m + \Delta\theta) \right]. \quad (5)$$

从上式可知,在 $V(r', \theta', z')$ 中的 n 次谐波 ($2n$ 极磁场)的标量势 $V_n(r', \theta', z')$ 为:

$$V_n(r', \theta', z') = A_n r'^n \sin(n\theta' + \varphi_n) + A_{n+1}(n+1)r'^n \Delta r \times \sin(n\theta' + \varphi_{n+1} + \Delta\theta). \quad (6)$$

或者,

$$V_n(r', \theta', z') = A'_n r'^n \sin(n\theta' + \varphi'_n). \quad (7)$$

在式 (7) 中, A'_n 及 φ'_n 分别是 $V(r', \theta', z')$ 中的 n 次谐波的幅值和相角. 它们可表示

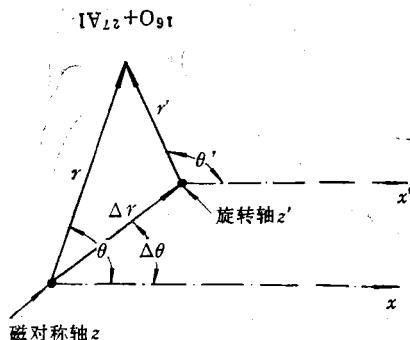


图 1 旋转线圈坐标 (r', θ', z') 与磁场坐标 (r, θ, z) 的关系

合出了安装

测磁仪广泛地应用多极磁铁的研究的一个重要

令 (r', θ', z') 坐标系里位于

分值. 如果

如果存在安装

中 L 为旋转

线圈输出正比于

(1)

为幅值, φ_m 位于式 (1) 磁

(2)

为:

$$A'_n = A_n + A_{n+1}(n+1)\Delta r \cos(\varphi_{n+1} + \Delta\theta - \varphi_n), \quad (8)$$

$$\varphi'_n = \arctg \frac{A_n \sin \varphi_n + A_{n+1}(n+1)\Delta r \sin(\varphi_{n+1} + \Delta\theta)}{A_n \cos \varphi_n + A_{n+1}(n+1)\Delta r \cos(\varphi_{n+1} + \Delta\theta)}. \quad (9)$$

当存在安装误差时, 旋转线圈中的感应信号正比于 $B_{r'}(r', \theta', z')_{r'=r_0}$. 因此, 在此情况下测得的磁场的 n 次谐波幅值将为:

$$B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} = -\mu n A'_n r_0^{n-1}. \quad (10)$$

把式(8)代入上式, 得到,

$$B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} = -\mu n r_0^{n-1} [A_n + A_{n+1}(n+1)\Delta r \times \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta)]. \quad (11)$$

考虑到式(3), 上式可改写成:

$$B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} = B_{n,\max}(r, z)_{r=r_0} + B_{n+1,\max}(r, z)_{r=r_0} \times n \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \theta). \quad (12)$$

三、旋转轴平行偏离磁对称轴所引起的测磁误差

当旋转轴相对于磁轴平行偏离 Δr 及 $\Delta\theta$ 时, 从式(12)可知, 所测得的 $2n$ 极磁场分量的幅值为:

$$\int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz' = \int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r, z)_{r=r_0} dz + \int_{-L/2}^{L/2} B_{n+1,\max}(r, z)_{r=r_0} n \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta) dz. \quad (13)$$

而 $2n$ 极磁场分量的测量误差为:

$$\Delta \int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz' = \int_{-L/2}^{L/2} B_{n+1,\max}(r, z)_{r=r_0} n \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta) dz. \quad (14)$$

在二维情况下,

$$\Delta B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} = B_{n+1,\max}(r, z)_{r=r_0} n \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta). \quad (15)$$

而相对测量误差为:

$$\frac{\Delta \int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz'}{\int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r, z)_{r=r_0} dz} = \frac{\int_{-L/2}^{L/2} B_{n+1,\max}(r', z')_{r'=r_0} n \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta) dz}{\int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz}. \quad (16)$$

或者, 在

从
场)的
磁铁里
测量误
四极磁
的测量

Δ

对于其

极磁铁

量. 所

极磁场

量, 对

相

如

给出贡

如

z' -轴在

轴线的

在上式

量从

或者,在二维情况下:

$$(8) \quad \Delta \frac{B_{n,\max}(r')_{r'=r_0}}{B_{n,\max}(r)_{r=r_0}} = \frac{B_{n+1,\max}(r)_{r=r_0} n \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta)}{B_{n,\max}(r)_{r=r_0}} \quad (17)$$

因此,在此情

(10) 从式(14)可知,如果只考虑安装误差 Δr 及 $\Delta\theta$ 的一次项,磁场中 n 次谐波 ($2n$ 极磁铁)的测量误差正比于安装误差 Δr 及磁场中的 $(n+1)$ 次谐波的幅值。在一个 $2N$ 极磁铁里,由于在这种磁铁的磁场中主要是 N 次谐波 ($2N$ 极磁场),因此安装误差所引起的测量误差主要表现在 $(N-1)$ 次谐波[即 $2(N-1)$ 极磁场]的测量结果上。例如,在四极磁铁中,主要误差为二极分量的测量结果;在六极磁铁中,主要测量误差为四极分量的测量结果。这项主要测量误差是:

$$(11) \quad \Delta \int_{-L/2}^{L/2} B_{N-1,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz' \\ (12) \quad = \int_{-L/2}^{L/2} B_{N,\max}(r, z)_{r=r_0} (N-1) \frac{\Delta r}{r_0} \cos(\varphi_N - \varphi_{N-1} + \Delta\theta) dz \quad (18)$$

对于其他谐波分量,其测量误差如式(14)或(15)所示。但在式中 $n \approx N-1$ 。由于在 $2N$ 极磁铁里除 $B_{N,\max}(r, z)_{r=r_0}$ 外,其他次谐波分量相对于主磁场都是小量,而 $\frac{\Delta r}{r_0}$ 也是小量。所以在 $2N$ 极磁铁的测量结果中,旋转线圈测磁仪的安装误差,主要引起 $2(N-1)$ 极磁场分量的测量误差, $(N-1)$ 次谐波以外的各次谐波分量的测量误差都是二级小量,对测量精度影响很小。

相角 φ'_n 的测量误差 $\Delta\varphi'_n$ 为:

$$(13) \quad \Delta\varphi'_n = \arctg \frac{A_n \sin \varphi_n + A_{n+1}(n+1)\Delta r \sin(\varphi_{n+1} + \Delta\theta)}{A_n \cos \varphi_n + A_{n+1}(n+1)\Delta r \cos(\varphi_{n+1} + \Delta\theta)} - \varphi_n \quad (19)$$

如果考虑 Δr 的二级项,则 $B_{n+2,\max}(r, z)_{r=r_0}$ 也会对 n 次谐波磁场分量的测量误差给出贡献,但其贡献正比于 $(\Delta r/r_0)^2$ 。一般说来,数量很小可忽略不计。

(14) 四、 z' -轴倾斜的影响

(15) 如果 z' -轴相对于 z -轴倾斜,令 z' -轴在 $\theta=0$ 平面上的投影与 z -轴间夹角为 δ_x , 而 z' -轴在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 平面上的投影和 z -轴间夹角为 δ_y , 如图 2 所示。我们仍选择旋转线圈轴线的中点为坐标原点,那么在 z' 点旋转线圈的安装误差为:

$$\Delta r = z'(\delta_x^2 + \delta_y^2)^{1/2}, \quad (20)$$

$$\Delta\theta = \arctg \frac{\delta_y}{\delta_x}, \quad (21)$$

$$z = z'. \quad (22)$$

(16) 在上式中同样只考虑 δ_x 及 δ_y 的一级项。

从式(12)可知,在 z' 点测磁仪所测得的磁场的 n 次谐波的幅值如下式所示:

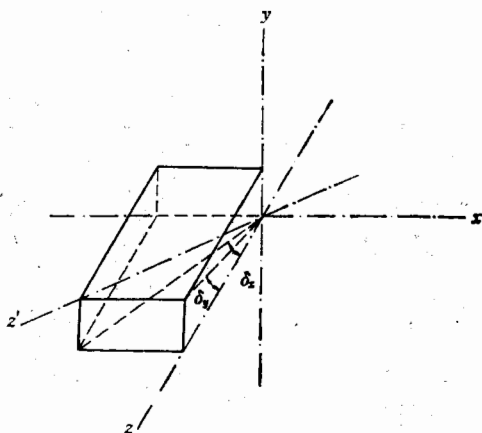


图 2 旋转线圈的旋转轴倾斜时的示意图

$$B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} = B_{n,\max}(r, z)_{r=r_0} + B_{n+1,\max}(r, z)_{r=r_0} \\ \times \frac{nz}{r_0} (\delta_x^2 + \delta_y^2)^{1/2} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta). \quad (23)$$

旋转线圈所测得的 n 次谐波的积分值为:

$$\int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz' = \int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r, z)_{r=r_0} dz \\ + \int_{-L/2}^{L/2} B_{n+1,\max}(r, z)_{r=r_0} \frac{nz'}{r_0} (\delta_x^2 + \delta_y^2)^{1/2} \cos(\varphi_{n+1} - \varphi_n + \Delta\theta) dz',$$

或者,

$$\int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r', z')_{r'=r_0} dz' = \int_{-L/2}^{L/2} B_{n,\max}(r, z)_{r=r_0} dz. \quad (24)$$

从上式可知, z' -轴的倾斜一般说来不引起测磁误差。以上结论的条件是只考虑 δ_x 及 δ_y 的一级项,另外, $B_{n+1}(r, \theta, z)$ 相对于磁铁中点(坐标原点)是对称的。

五、旋转线圈弯曲对测磁精度的影响

如果由于材料变形或加工误差,旋转线圈稍微弯曲,使得线圈导线的径向坐标 r' 不是常数,那么,可以把 $\Delta r(z')$ 代入式(14),对 z' 进行积分,求得所引起的测磁误差。

或者,由于弯曲量很小,如果弯曲最大处线圈导线的径向坐标为 $r' = r_0 + \delta$,则可近似地认为整个线圈位于 $r' = r_0 + \delta/2$,即 $\Delta r = \delta/2$ 。利用式(15),可以估计所引起的测磁误差。

六、结 论

通过以上的分析可知,当只考虑旋转线圈测磁仪安装误差的一级项时(一般情况下,安装误差 $\Delta r \ll r_0$, 这样处理是足够精确的),安装误差所引起的 $2n$ 极磁场分量的测量

误差,
极磁
量大
极磁
小,是
1
 $\Delta r =$

一般
 10^{-4} .

高次
右侧

从上
磁场
级项

因此
于其
旋转
可利
极磁
结果
不以
 10^{-4}
个可

误差,只正比于被测磁场中的 $2(n+1)$ 极磁场分量及位置误差 Δr 。所以,在一个 $2N$ 极磁铁里,由于它的主要磁场分量是 $2N$ 极磁场(一般在有效孔径的边缘,也比其他磁场分量大二个、甚至三个或四个数量级),所以旋转线圈测磁仪的安装误差,主要引起 $2(N-1)$ 极磁场分量的测量误差。对于主磁场 ($2N$ 极磁场) 及其他磁场分量的测量精度影响很小,是二级小量[见式(14),(15)]。

例如,设被测磁铁是四极磁铁 ($N=2$), 测量线圈位于 $r_0=50$ 毫米处, 安装误差 $\Delta r=0.5$ 毫米。利用式(17)可得到下述结果。

$$\Delta B_{1,\max}(r')_{r'=r_0} = B_{2,\max}(r)_{r=r_0} \frac{0.5}{50} \cos(\varphi_2 - \varphi_1 + \Delta\theta)$$

$$\Delta B_{2,\max}(r')_{r'=r_0} = B_{3,\max}(r)_{r=r_0} 2 \frac{0.5}{50} \cos(\varphi_3 - \varphi_2 + \Delta\theta)$$

$$\Delta B_{3,\max}(r')_{r'=r_0} = B_{4,\max}(r)_{r=r_0} 3 \frac{0.5}{50} \cos(\varphi_4 - \varphi_3 + \Delta\theta)$$

一般情况下,在一个四极磁铁里,高次谐波场 B_3 、 B_4 等的幅值是主磁场幅值的 10^{-3} 甚至 10^{-4} 。即,

$$(23) \quad B_{3,\max}(r)_{r=r_0} \simeq (10^{-3} \sim 10^{-4}) B_{2,\max}(r)_{r=r_0}$$

$$B_{4,\max}(r)_{r=r_0} \simeq (10^{-3} \sim 10^{-4}) B_{2,\max}(r)_{r=r_0}$$

高次谐波场一般是由于制造误差造成的,其相角如 φ_3 等是随机的。因此可令误差表示式右侧的余弦项等于 1,以求最大可能的测量误差。

即:

$$\Delta B_{1,\max}(r')_{r'=r_0} = 10^{-3} B_{2,\max}(r)_{r=r_0}$$

$$\Delta B_{2,\max}(r')_{r'=r_0} \simeq 2(10^{-3} \sim 10^{-4}) 10^{-3} B_{2,\max}(r)_{r=r_0}$$

$$(24) \quad \Delta B_{3,\max}(r')_{r'=r_0} \simeq 3(10^{-3} \sim 10^{-4}) 10^{-3} B_{2,\max}(r)_{r=r_0}$$

从上式可知,当测量四极磁铁时,最大测量误差是二极磁场的测量结果,即 $\Delta B_{1,\max}$ 。其他磁场谐波的测量误差如 $\Delta B_{2,\max}$ 、 $\Delta B_{3,\max}$ 等都远小于 $\Delta B_{1,\max}$ 。至于二级项的影响较一级项又小一因子 $\frac{\Delta r}{r_0}$,在上述实例中为 $\frac{0.5}{50} = 10^{-2}$,一般情况下,可忽略不计。

必须说明的是,本文所讨论的只是旋转线圈测磁仪安装准直误差对测磁精度的影响。因此,在讨论中假定安装误差在线圈旋转过程中为一常数,与线圈所处角度无关。如果由于其他因素,例如旋转线圈轴承松动、线圈刚度不够旋转过程中有弹性变形等,使得线圈旋转过程中 Δr 不是常数,而是 θ' (或 θ) 的函数。则上述结论要加以修正,分析的方法仍可利用本文类似的方法。在这种情况下,测量一个 $2N$ 极磁铁时,主磁场除引起 $2(N-1)$ 极磁场的测量误差外,还有可能引起另外几个磁场分量的测量误差。但对主磁场的测量结果的影响仍然是二级小量。这是因为 $2N$ 极磁场测量误差是由于其他磁场分量和线圈不以磁场对称轴为圆心进行圆周运动所引起的,其他磁场分量一般为主磁场的 10^{-3} 到 10^{-4} ,而线圈偏离圆周运动的几何误差与 r_0 之比一般也为 10^{-2} 甚至 10^{-3} ,二者相乘是一个可忽略的小量。

作者感谢张闯同志的有益的讨论和建议。

9) dz' ,

且只考虑 δ_x 及 δ_y

径向坐标 r' 不
测磁误差。

$= r_0 + \delta$, 则可
以估计所引起

(一般情况下
磁场分量的测

THE RELATION BETWEEN THE MISALIGNMENTS AND THE MEASURING ACCURACY OF THE ROTATING COIL MAGNETOMETER

XU JIAN-MING

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The dependence of the measuring accuracy of the rotating coil magnetometer on its misalignments is studied in this paper. The expressions of magnetic field measurement error due to the misalignments of the magnetometer are given also.

这
些特点
它是冷
频离子

①
阳

图 1
作为引出
的电子发
调节。阳
图 1 ② 是:

本文 198