

# 穿越辐射理论的量子修正

岑颐 皮波<sup>1)</sup> 倪光炯

(复旦大学物理系)

## 摘 要

本文提出了穿越辐射的一种量子处理方案。为描述在两种介质界面附近的电磁场的稳恒态,我们采用了熟知的 Fresnel 系数,然后作场的正则量子化。再用通常场论中的微扰方法,便可得到两种不同极化方向上辐射强度的一般表达式。二级量子修正可归之于电子自旋的存在。文中还给出了电子或磁单极子穿越金属界面时的具体公式。

## 一、引 言

带电粒子的辐射有好几种形式,如加速运动引起的辐射,切仑柯夫辐射和穿越辐射等<sup>[1,2]</sup>。穿越辐射是当带电粒子穿越不同性质的界面时发出的,1946年首先由 Ginzburg 和 Frank 在理论上预言<sup>[3]</sup>,后来又为实验所证实<sup>[4]</sup>,人们还利用这种原理来制作高速带电粒子的探测器<sup>[5]</sup>,或利用这种辐射作为 X 射线的源<sup>[6]</sup>。

穿越辐射的经典理论已经相当完善<sup>[7]</sup>,不过在文献上还很少讨论量子的处理<sup>[8]</sup>,原因是粒子在介质界面与电磁场相互作用,这样一个量子体系的动力学十分复杂,难于求解。本文将建议一种唯象的理论框架,希望能对各种穿越辐射给出统一的量子处理。

大家知道,在自由空间中一个匀速运动电荷是不会辐射光子的,这是由于能量守恒和动量守恒不可能在辐射过程中同时成立的缘故。但是当存在介质界面时,介质会吸收一部分( $z$  方向)动量,禁戒条件去掉了一个,光子的辐射便可能发生了。在这种量子辐射图象中,关键的问题是如何将受到介质界面作用的电磁场量子化(第二节)。一旦解决了这问题,我们便可以在一级量子微扰论的基础上,导出辐射的能谱和角分布来(第三节)。第四节对电子射向金属表面的特殊情形写出相应的公式。第五节讨论一个磁单极子的穿越辐射,最后第六节是总结和讨论。

## 二、在介质界面作用下电磁场的量子化

自由真空中电磁场的正则量子化手续归结为二步:先将经典电磁场按一套正交完备的本征态——平面波作 Fourier 分解,然后把振幅化为算符。现在类似地,我们先要在

<sup>1)</sup> 现在地址:美国密西根大学物理系。  
本文 1986 年 7 月 14 日收到。

, 3090; D21

1983), 2326.

ons at High

Let., 80B

iquark is  
and ele-  
ing non-  
odel are

介质界面存在情况下找出一套正交完备的电磁波本征态来。

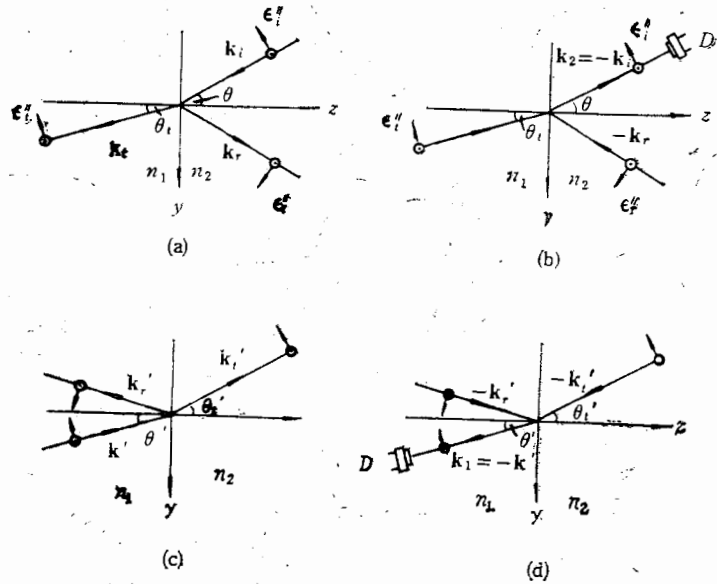


图 1 电磁波在介质界面有折射和反射时之稳恒态

- (a) 在介质 2 入射的  $\varphi^{(+)}(k_i, \lambda)$  态
- (b) 在介质 2 出射的  $\varphi^{(-)}(k_i, \lambda)$  态
- (c) 在介质 1 入射的  $\varphi^{(+)}(k', \lambda)$  态
- (d) 在介质 1 出射的  $\varphi^{(-)}(k_i, \lambda)$  态

让我们看图 1(a),  $z < 0$  和  $z > 0$  的介质分别有折射率  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1}$  和  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ , (假定磁导率  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ,  $\epsilon$  是介电常数). 在介质 2 的一方有电磁波以波矢  $k_i$  入射到界面, 入射角为  $\theta$ , 在界面  $z = 0$  上它将受到反射, 反射部分的波矢  $k_r$  折回介质 2, 折射部分则以波矢  $k_t$  进入介质 1. 从定态(稳恒波)的观点看, 三部分波合起来才是描述有介质界面存在时光子状态的一个本征态, 其波函数可记为

$$\varphi^{(+)}(k_i, \lambda) = \theta(z) \{ \epsilon_i^\perp e^{i k_i \cdot r} + \epsilon_r^\perp R_{21}^\perp e^{i k_r \cdot r} \} + \theta(-z) \epsilon_t^\perp T_{21}^\perp e^{i k_t \cdot r} \quad (2.1)$$

其中  $\theta(z)$  是阶梯函数,  $\epsilon_i^\perp (\lambda = \perp, //)$  分别表示入射波的二种(垂直或平行于反射面)极化矢量, 由图可见

$$\begin{aligned} \text{类似地} \quad \epsilon_i^\perp &= (1, 0, 0), & \epsilon_i^\parallel &= (0, -\cos\theta, -\sin\theta) \\ \epsilon_r^\perp &= (1, 0, 0), & \epsilon_r^\parallel &= (0, \cos\theta, -\sin\theta) \\ \epsilon_t^\perp &= (1, 0, 0), & \epsilon_t^\parallel &= (0, -\cos\theta_t, -\sin\theta_t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$\theta_t$  为折射角,

$$\sin\theta_t = \frac{n_2}{n_1} \sin\theta \quad (2.3)$$

而  $R_{21}^\perp$  和  $T_{21}^\perp$  分别是由介质 2  $\rightarrow$  1 的反射系数和折射系数, 由熟知的 Fresnel 公式给出<sup>[1,2]</sup>:

解。  
之  $q$   
在介  
如图  
其中  
对  $\epsilon^\lambda$   
0) 和

注意  
象平  
符, 使

手  
常展

电子

则在

$$\begin{aligned} T_{21}^{\perp} &= \frac{2n_2 \cos \theta}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_1}, & T_{21}^{\parallel} &= \frac{2n_1 n_2 \cos \theta}{n_1^2 \cos \theta + n_1 n_2 \cos \theta_1}, \\ R_{21}^{\perp} &= \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_1}, & R_{21}^{\parallel} &= \frac{n_1^2 \cos \theta - n_1 n_2 \cos \theta_1}{n_1^2 \cos \theta + n_1 n_2 \cos \theta_1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

我们在  $\varphi^{(+)}$  上加上 (+) 指标是为了强调它是电磁波入射 (光子被吸收) 时的“严格解”。现在当我们以后考虑光子在介质 2 出射, 应该代替  $\varphi^{(+)}(\mathbf{k}_i, \lambda)$  而用图 1(b) 所示之  $\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_2, \lambda)$ , 注意  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_i$ ,  $\theta$  的意义变为出射光子与  $z$  轴的夹角:

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_2, \lambda) = \theta(z) \{ \mathbf{e}_i^{\perp} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{e}_i^{\parallel} R_{21}^{\perp} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \} + \theta(-z) \mathbf{e}_i^{\parallel} T_{21}^{\perp} e^{-i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (2.5)$$

显然,  $\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_2, \lambda)$  可以视为  $\varphi^{(+)}(\mathbf{k}_i, \lambda)$  的时间反演态。类似地, 当我们考虑光子在介质 1 中入射或出射时, 应取图 1(c) 所示的  $\varphi^{(+)}(\mathbf{k}'_i, \lambda)$  之时间反演态  $\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_1, \lambda)$ , 如图 1(d) 所示, 其中  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}'_i$ ,  $\theta'$  是  $\mathbf{k}_1$  相对于  $(-z)$  轴的夹角:

$$\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_1, \lambda) = \theta(-z) \{ \mathbf{e}_i^{\perp} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{e}_i^{\parallel} R_{12}^{\perp} e^{-i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{r}} \} + \theta(z) \mathbf{e}_i^{\parallel} T_{12}^{\perp} e^{-i\mathbf{k}'_i \cdot \mathbf{r}} \quad (2.6)$$

其中

$$R_{12}^{\perp} = R_{21}^{\perp} (1 \leftrightarrow 2, \theta \rightarrow \theta'), \quad T_{12}^{\perp} = T_{21}^{\perp} (1 \leftrightarrow 2, \theta \rightarrow \theta') \quad (2.7)$$

对  $\mathbf{e}^{\perp}$  和 (2.3) 也有类似的对换关系。

和散射理论中一样, 最后  $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_i$  等都不是可观察量, 我们只需取  $\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_2, \lambda)$  ( $k_{2z} > 0$ ) 和  $\varphi^{(-)}(\mathbf{k}_1, \lambda)$  ( $k_{1z} < 0$ ) 一起, 就组成正交完备系, 把电磁场按它们展开为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\substack{\mathbf{k}_{2z} > 0 \\ (k_{2z} > 0)}} \sqrt{\frac{1}{2n_2^2 \omega V}} [a_{\mathbf{k}_2, \lambda} \varphi^{(-)}(\mathbf{k}_2, \lambda) e^{-i\omega t} + h.c.] \\ &+ \sum_{\substack{\mathbf{k}_{1z} < 0 \\ (k_{1z} < 0)}} \sqrt{\frac{1}{2n_1^2 \omega V}} [a_{\mathbf{k}_1, \lambda} \varphi^{(-)}(\mathbf{k}_1, \lambda) e^{-i\omega t} + h.c.] \end{aligned} \quad (2.8)$$

注意前面系数中引入了介电系数  $\epsilon_i = n_i^2$  ( $i = 1, 2$ ) 以使理论自治。出射光子可以认为象平面波一样, 在全空间  $V$  归一化。于是场量子化归结为将 (2.8) 中之系数  $a_{\mathbf{k}, \lambda}$  化为算符, 使满足下述对易关系:

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}, \lambda}, a_{\mathbf{k}', \lambda'}] &= [a_{\mathbf{k}, \lambda}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}', \lambda'}^{\dagger}] = 0 \\ [a_{\mathbf{k}, \lambda}, a_{\mathbf{k}', \lambda'}^{\dagger}] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \end{aligned} \quad (2.9)$$

### 三、用微扰论计算辐射的能谱和角分布

现在考虑一电荷为  $e$ 、静质量为  $m$ 、总能量为  $E$  的 Dirac 粒子 (如电子), 其场算符如常展开为:

$$\psi(x) = \left( \frac{m}{EV} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\mathbf{p}, \sigma} (b_{\mathbf{p}, \sigma} u_{\mathbf{p}\sigma} e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + d_{\mathbf{p}, \sigma}^{\dagger} v_{\mathbf{p}\sigma} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}) \quad (3.1)$$

电子与电磁场耦合的哈密顿密度是:

$$\mathcal{H}_I = c \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma}^{\mu} \psi A_{\mu} = -c \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi \cdot \mathbf{A} \quad (3.2)$$

则在一级微扰论中, 穿越辐射跃迁的  $S$  矩阵元为

$$S_{fi} = - \left\langle f \left| e \int d^4x \bar{\psi} \boldsymbol{\gamma} \psi \cdot \mathbf{A} \right| i \right\rangle \quad (3.3)$$

$n_2 = \sqrt{\epsilon_2}$ ,  
 $\mathbf{k}_i$  入射到  
 $\hat{z}$ , 折射部  
 苗述有介质

(2.1)

于反射面)

(2.2)

(2.3)

el 公式给

其中初态

$$|i\rangle = |\mathbf{p}_i S_i 0\rangle = b_{\mathbf{p}_i S_i}^\dagger |0\rangle$$

末态

$$|f\rangle = |\mathbf{p}_f, S_f; \mathbf{k}, \lambda\rangle = b_{\mathbf{p}_f S_f}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger |0\rangle \quad (3.4)$$

为明确起见,假定电子沿正  $z$  轴入射,光子以波矢  $\mathbf{k}_2$  前向出射 ( $k_z = n_2 \omega$ ), 则以 (2.8)、(3.1)、(3.2) 和 (3.4) 代入 (3.3) 后,我们完成积分和算符的缩并,不难得到

$$S_{fi} = ieV^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{m^2}{2n_2^2 \omega E_i E_f} \right)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^3 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{p}_{i\perp} + \mathbf{p}_{f\perp}) \delta(\omega - p_{i0} + p_{f0}) T_{fi} \quad (3.5)$$

其中

$$T_{fi} = (\bar{u}_{\mathbf{p}_f S_f} \boldsymbol{\gamma} u_{\mathbf{p}_i S_i}) \cdot \mathbf{A}_\lambda \quad (3.6)$$

而

$$\mathbf{A}_\lambda = \mathbf{e}_i^\lambda \frac{1}{K_x} + \mathbf{e}_r^\lambda R_{21}^\lambda \frac{1}{K_x''} - \mathbf{e}_t^\lambda T_{21}^\lambda \frac{1}{K_x'} \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} K_x &= p_{ix} - p_{fx} - k_{2x} \\ K_x' &= p_{ix} - p_{fx} + k_{2x} \\ K_x'' &= p_{ix} - p_{fx} + k_{rx} \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$(k_{2x} = +k_2 \cos \theta, k_{2z} = -k_2 \cos \theta, k_{rx} = +k_2 \cos \theta)$$

表示了跃迁中纵向的动量转移(被介质所吸收), 而 (3.5) 中另外两个  $\delta$  函数则分别表示横向动量守恒和能量守恒。

由此不难算得单位时间的跃迁几率等于:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= (2\pi)^{-3} e^2 \left( \frac{S}{V} \right) \left( \frac{m^2}{2n_2^2 \omega E_i E_f} \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{p}_{i\perp} + \mathbf{p}_{f\perp}) \\ &\cdot \delta(\omega - p_{i0} + p_{f0}) \frac{1}{2} \sum_{S_i, S_f} |T_{fi}|^2 d^3 k_2 d^3 p_f \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中体系的横截面  $S$  来自  $\delta^{(2)}$ ,  $V/S = L$  是在  $z$  方向的线度。

$$d^3 k_2 = k_2^2 d\Omega dk_2, \quad d^3 p_f = dp_{fx} dp_{fy} \frac{E_f dE_f}{|p_{fx}|} \quad (3.10)$$

于是沿  $z$  方向运动的一个电子在经过界面时沿立体角  $d\Omega$  方向在能谱间隔  $\omega \rightarrow \omega + d\omega$  的辐射强度等于:

$$\frac{dI(\omega, \lambda)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{32\pi^3} n_2 \frac{m^2 \omega^2}{|\mathbf{p}_i| |p_{fx}|} \sum_{S_i, S_f} |T_{fi}|^2 \quad (3.11)$$

用标准的量子场论方法可以算出  $\sum_{S_i, S_f} |T_{fi}|^2$ , 结果是<sup>[9]</sup>

$$\begin{aligned} \frac{dI(\omega, \lambda)}{d\omega d\Omega} &= \frac{e^2}{32\pi^3} n_2 \frac{\omega^2}{|\mathbf{p}_i| |p_{fx}|} \{ (\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{A}_\lambda)(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}_\lambda^\dagger) + (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{A}_\lambda)(\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{A}_\lambda^\dagger) \\ &+ (\mathbf{A}_\lambda \cdot \mathbf{A}_\lambda^\dagger)(p_i \cdot p_f - m^2) \} \end{aligned} \quad (3.12)$$

为了进一步具体计算,我们必须再做一些近似。利用能量及横向动量守恒, 如记

$$|\mathbf{p}_i| = p, p_{fx} = \eta p, E_i = E, \text{ 则 } p = \beta E, \text{ 且}$$

因

(3.12)

可见

( $\hbar\omega/$

其中

出的

与  $n_2$

i

而  $n_2$

因

可见

另一

$$\eta = \left[ 1 - 2 \frac{\omega}{E\beta^2} + \left( \frac{\omega}{E\beta} \right)^2 (1 - n_2^2 \sin^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

因

$$(p_i \cdot p_f - m^2) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\beta} \right)^2 [1 - \beta^2 (1 - n_2^2 \sin^2 \theta)] \quad (3.14)$$

则以 (2.8)、

(3.12) 式可写成

$$T_{fi} \quad (3.5) \quad \frac{dI(\omega, \lambda)}{d\omega d\Omega} = \frac{n_2 e^2 \omega^2}{16\pi^3} \left\{ (\Lambda_i^z)^2 - n_2 \frac{\omega}{\eta\beta E} \sin \theta (\Lambda_i^y \Lambda_i^z) + \left( \frac{\omega}{2\eta\beta^2 E} \right)^2 \Lambda_i^z \right\} \quad (3.15)$$

可见第一项是经典辐射, 第二项是一级量子修正 ( $\sim \hbar\omega/E$ ), 第三项是二级量子修正 [ $\sim (\hbar\omega/E)^2$ ]. 后者密切地联系于电子的自旋, 我们最后将回到这个问题.

(3.6)

对于 (2.2) 所示的两种极化, 由 (2.7) 式算出不为零之

$$\Lambda_{\perp}^z = 2n_2^2 \omega^2 \cos \theta \frac{n_2}{n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t} \frac{n_2^2 - n_1^2}{(\Delta^2 - k_2^2 \cos^2 \theta)(\Delta - n_1 \omega \cos \theta_t)} \quad (3.16)$$

$$\Lambda_{\parallel}^y = 2 \cos \theta \frac{\Delta k_2 \sin^2 \theta + n_1 n_2 \omega^2 \cos^2 \theta \cos \theta_t}{n_1^2 \cos \theta + n_1 n_2 \cos \theta_t} \frac{n_2^2 - n_1^2}{(\Delta^2 - k_2^2 \cos^2 \theta)(\Delta - n_1 \omega \cos \theta_t)} \quad (3.17)$$

$$\Lambda_{\parallel}^z = 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\Delta^2 - k_2^2 - n_1 \Delta \omega \cos \theta_t}{n_1^2 \cos \theta + n_1 n_2 \cos \theta_t} \frac{n_1^2 - n_2^2}{(\Delta^2 - k_2^2 \cos^2 \theta)(\Delta - n_1 \omega \cos \theta_t)} \quad (3.18)$$

其中

则分别表示

$$\Delta = p \cdot p_{fx} = \beta E (1 - \eta) \approx \frac{\omega}{\beta} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega}{E\beta^2} [1 - \beta^2 (1 - n_2^2 \sin^2 \theta)] \right\} \quad (3.19)$$

以上公式都只适用于电子从介质  $n_1$  穿入介质  $n_2$  而电磁波前向在介质  $n_2$  以角度  $\theta$  射出的情况, 对于后向辐射 (光子在介质  $n_1$  与负  $z$  轴成  $\theta'$  角出射) 的情况, 只须将  $\theta \rightarrow \theta'$ ,  $n_1$  与  $n_2$  互换即可. 无论如何, 因子  $(n_1^2 - n_2^2)$  总是存在的.

(3.9)

#### 四、高速电子在金属界面的穿越辐射

设电子从一金属箔的界面穿出, 按电动力学的唯象理论, 可近似地取极限  $n_1 \rightarrow i\infty$ , 而  $n_2 = 1$ , 此时由 (2.3) 又有  $\cos \theta_t \rightarrow 1$ , 则 (3.15) 式大为简化:

$$\text{隔 } \omega \rightarrow \omega^+ \quad \frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^3} \left( \frac{1}{\eta\beta^4} \right) \left( \frac{\omega}{\Delta} \right)^4 \left( \frac{\omega}{E} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta}{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\Delta^2} \cos^2 \theta \right)^2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \quad (4.1)$$

(3.11)

因

$$\left( \frac{\omega}{\Delta} \right)^2 \approx \beta^2 \left[ 1 - \frac{\omega}{E\beta^2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) + \frac{3}{4} \left( \frac{\omega}{E\beta^2} \right)^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2 \right] \quad (4.2)$$

可见极化垂直于出射面的辐射强度本身已是  $O(\omega^2/E^2)$ :

$$\Lambda_{\perp}^z \quad (3.12) \quad \frac{dI_{\perp}(\omega)}{d\omega d\Omega} \approx \frac{e^2}{16\pi^3} \left( \frac{\omega}{E} \right)^2 \frac{\cos^2 \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \quad (4.3)$$

, 如记

一方面, 极化在出射面内的辐射强度近似地是:

$$\frac{dI_{\parallel}(\omega)}{d\omega d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi^3} \frac{\sin^2 \theta \beta^2}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \left\{ 1 - \frac{\omega}{E\beta^2} (1 + 2\beta^2 \cos^2 \theta) + O(\omega^2/E^2) \right\} \quad (4.4)$$

可见在忽略量子修正时,  $\hbar\omega/E \rightarrow 0$ , (4.6) 式与经典的穿越辐射理论结果一致. 那时辐射是完全极化(偏振)的, 现在看到, 二级量子修正的存在, (4.4) 式才使穿越辐射处于部分偏振状态.

## 五、磁单极子产生的穿越辐射

假如自然界存在磁单极子(磁荷), 则探测它所产生的穿越辐射也不失为一种有利的手段. 我们要导出相应公式的简捷办法是利用电磁对偶的原理<sup>[1,2]</sup>. 一个磁荷  $g$  与电磁场相互作用的哈密顿可以仿照 (3.2) 式写出为:

$$\mathcal{H}_I^{(m)} = -g\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{A}^{(m)} \quad (5.1)$$

其中  $\psi$  仍满足 Dirac 方程, 但是下面将略去它的二级量子效应(磁荷没有电矩);  $\mathbf{A}^{(m)}$  是电磁场的“磁”矢势, 它与电场(电位移矢量)及磁场强度的关系是:

$$\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{A}^{(m)}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}^{(m)} \quad (5.2)$$

为了象第二节一样地作场量子化, 还必须建立“磁”矢势与通常“电”矢势  $\mathbf{A}$  [(2.8) 式] 的联系:

$$\mathbf{A}^{(m)} = \frac{1}{k_0} \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.3)$$

( $k_0 = \omega/c$ ). 于是可直接写出 (3.7) 的对偶式:

$$\mathbf{A}_I^{(m)} = \frac{1}{k_0} \left[ \mathbf{k}_2 \times \boldsymbol{\epsilon}_i^* \frac{1}{K_x} + (-\mathbf{k}_r) \times \boldsymbol{\epsilon}_i^* R_{21}^* \frac{1}{K_x''} - (-\mathbf{k}_r) \times \boldsymbol{\epsilon}_i^* T_{21}^* \frac{1}{K_x'} \right] \quad (5.4)$$

这里

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= (0, k_2 \sin \theta, k_2 \cos \theta) \\ (-\mathbf{k}_r) &= (0, k_2 \sin \theta, -k_2 \cos \theta) \\ (-\mathbf{k}_t) &= (0, k_t \sin \theta_t, k_t \cos \theta_t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

( $k_2 = n_2\omega$ ,  $k_t = n_1\omega$ ), 以(2.2), (5.5)代入(5.4)计算后, 当略去二级量子效应时, 只留下极化垂直于辐射面的分量, 与此相应, 辐射强度也只剩一项垂直偏振态的贡献:

$$\frac{dI_{\perp}^{(m)}(\omega)}{d\omega d\Omega} = \frac{g^2}{4\pi^3} \frac{n_2^2}{\eta} \left(\frac{\omega}{\Delta}\right)^6 \frac{(n_2^2 - n_1^2)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\left(1 - n_2^2 \frac{\omega^2}{\Delta^2} \cos^2 \theta\right)^2 \left(1 - n_1 \frac{\omega}{\Delta} \cos \theta_t\right)^2 (n_2 \cos \theta + n_1 \cos \theta_t)^2} \quad (5.6)$$

当考虑磁荷穿出金属界面时, 取  $n_2 \rightarrow 1$ ,  $n_1 \rightarrow i\infty$ , 则, 当  $\frac{\omega}{E\beta^2} \ll 1$ , 低频辐射强度为

$$\left. \frac{dI_{\perp}^{(m)}(\omega)}{d\omega d\Omega} \right|_{\text{金属}} \simeq \frac{g^2}{4\pi^3} \beta^4 \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta \left[1 - \frac{\omega}{E\beta^2} + O\left(\frac{\omega^2}{E^2}\right)\right]}{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^2} \quad (5.7)$$

这与经典理论结果一致<sup>[10]</sup>. 与电荷的相应公式 (4.4) 和 (4.6) 比较, 可见磁荷辐射是完全偏振的, 两者在经典水平上偏振面相互垂直, 且磁荷比电荷多一个  $\beta^2 \cos^2 \theta$  因子.

了电  
子的

当  $n$   
 $n_2\beta <$   
面附

则由

的薄  
一致

子的  
射毕

引入

考虑

与电

再用  
是不  
向极

$A_1$  自  
引起

射处于部

## 六、总结与讨论

1. 从本文的量子处理方案来看穿越辐射, 物理意义十分明显. 介质界面的存在破坏了电子-光子体系在一个  $z$  方向上的动量守恒, 从而解除了能-动量守恒的共同约束, 使光子的辐射成为可能.

2. 注意 (3.16)–(3.18) 式中分母上有  $(\Delta^2 - k_z^2 \cos^2 \theta) \sim \frac{\omega^2}{\beta^2} (1 - n_2^2 \beta^2 \cos^2 \theta)$  因子. 当  $n_2 \beta > 1$ , 便对应于切仑柯夫辐射, 它是发生于整个介质  $n_2$  内部的定向辐射. 但当  $n_2 \beta < 1$ , 电子在匀速运动过程中并不辐射, 穿越辐射中光子的发射过程只定域在介质界面附近. 事实上, 电子越过界面时  $z$  方向动量改变了

$$\Delta p_z = p_{iz} - p_{fz} = |\mathbf{p}_i| (1 - \eta) \simeq \beta E/c \left[ \frac{\hbar \omega}{E \beta^2} + O\left(\frac{\hbar \omega}{E \beta^2}\right)^2 \right] \quad (6.1)$$

则由测不准关系  $\Delta p_z \cdot \Delta z \sim \hbar$ , 可知辐射定域在界面上一厚度为

$$D = \Delta z \sim \frac{\hbar}{\Delta p_z} \sim \frac{\beta c}{\omega} = \beta/k \sim \beta \lambda \quad (6.2)$$

的薄层内.  $D$  正比于粒子的速度与辐射的波长, 此结论与经典电磁场相干长度的考虑是一致的<sup>[1]</sup>.

3. 穿越辐射的量子处理比起经典理论来, 在概念上的差别是计入了光子的反冲, 使电子的动量在辐射过程中发生改变. 电子在越过界面的瞬间并非作匀速运动, 然而穿越辐射毕竟又不同于加速运动电子所产生的韧致辐射<sup>[1]</sup>.

4. 前面是对电子用 Dirac 相对论性场论算的, 如果采用“非相对论性”量子场论, 即引入量子化的薛定谔电子场算符:

$$\hat{\psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}} e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)} \quad (6.3)$$

考虑电流密度

$$\mathbf{j} = \frac{e \hbar}{2mi} \{ \psi \nabla \psi^\dagger - (\nabla \psi) \psi^\dagger \} \quad (6.4)$$

与电磁场的耦合哈密顿

$$H_I = \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{x} \quad (6.5)$$

再用一级微扰论, 便可导出与前面基本相同的低速近似结果, 但不出现二级量子效应, 于是不出现垂直偏振态辐射. 这一点很好理解:  $\mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{j} \sim \mathbf{e}_\perp \cdot (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_f)$ , 当  $\mathbf{A}$  在垂直方向极化 ( $\lambda = \perp$ ) 时, 上述标积必定为零; 而若计入电子自旋, 增加一项相互作用:

$$H'_I = \frac{e \hbar}{2mc} \int \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \psi \cdot \nabla \times \mathbf{A} d\mathbf{x} \quad (6.6)$$

$\mathbf{A}_\perp$  的分量便有贡献, 而这是比 (6.7) 中  $\mathbf{A}_\parallel$  分量的贡献高二级的量子修正. 由电子自旋引起的辐射总是高阶的量子效应, 我们在同步回旋辐射中也看到类似的情形<sup>[11]</sup>.

## 参 考 文 献

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Inc. 1975).  
 [2] 蔡圣善, 朱耘, 经典电动力学(复旦大学出版社, 1985).  
 [3] V. L. Ginzburg and I. M. Frank, *ZhETF (ЖЭТФ)* 16(1946), 15.  
 [4] L. C. Yuan et al., *Phys. Lett.*, 31B(1970), 603; A. I. Alikhanian et al., *Phys. Rev. Lett.*, 30(1973), 109.  
 [5] F. Harris et al., *Nucl. Inst. and Meth.*, 107(1973), 413; M. L. Cherry et al., *ibid.*, 115(1974), 141.  
 [6] A. N. Chu et al., *J. Appl. Phys.*, 51(1980), 1290.  
 [7] V. L. Ginzburg and V. N. Tsytovich, *Phys. Rep.*, 49(1979), 1.  
 [8] V. M. Zakhartsov and Yu. M. Loskutov, *Phys. Bull. of Moscow Univ.*, 37(1982), 112.  
 [9] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, Inc., 1964) 114.  
 [10] J. Doohar, *Phys. Rev.*, 3(1971), 2652.  
 [11] 吴长勤、宋皓、倪光炯, 高能物理与核物理, 8(1984), 688.

THE QUANTUM CORRECTIONS ON THE THEORY OF  
TRANSITION RADIATION

ZHEN YI PI BO NI GUANG-JIONG

(Fudan University)

## ABSTRACT

A Scheme of quantum treatment for transition radiation is proposed. The Fresnel coefficients are adopted to describe the stationary states of electromagnetic fields near the interface between two mediums before a canonical field quantization procedure can be performed. Then an usual perturbation approach in field theory leads to the general expressions of radiation intensity in two different polarizations. The second order quantum corrections are ascribed to the existence of electron spin. Some concrete formulas for the cases of electron or monopole crossing a metal surface are presented as well.

可能在超弦自然的量子场论不完备模型中从SU轻的力结合子耦合是IT Pati老随着量子系统亚色这个程度是为工作