第11卷 第4期　　高能物理与核物理　　Vol. 11, No. 4
1987年7月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1987

快报

正态模糊格点——一种可能的无多重性的协变的手征对称的费米子方案

董 绍 静
（浙 江 大 学）

摘　要

我们提出了一种正态模糊格点上的费米子方案，以最简捷的形式同时保持了 $m=0$ 时的手征对称性和正确的连续时空极限．若量纲参数 b 不是与 a 同阶或更高阶的无穷小，此方案就没有多余的费米子模，可能给出与 Karsten, Smit 等的 No-Go 定理不同的结论．

一、导　言

近年来格点规范理论在解决非微扰 QCD 问题中取得了很大成功．然而，把费米子加入格点的尝试带来了理论上的困难．Wilson 最初引入的 naive 作用量是[1]

$$S_F=\frac{a^3}{2}\sum_n[\bar{\phi}(x_n)r_\mu U(x_n,\hat{\mu})\phi(x_n+a\hat{\mu})-\bar{\phi}(x_n+a\hat{\mu})r_\mu U^+(x_n,\hat{\mu})\phi(x_n)]+a^4\sum_n m\bar{\phi}(x_n)\phi(x_n),\tag{1}$$

其中 x_n 是4维分立时空格上第 n 个结点，a 是邻近格点间距，$U(x_n,\hat{\mu})$ 是定义在链上的规范群元．(1)式在 $a\to 0$ 时有 $ak_\mu\sim 0$ 及 $ak_\mu\sim\pi$ 两种可能途径达到同样的连续极限．这造成了费米模的多重简并．Wilson 随后引入的改进形式是[2]

$$S_F=\frac{a^3}{2}\sum_n[\bar{\phi}(x_n)(r_\mu-r)U(x_n,\hat{\mu})\phi(x_n+a\hat{\mu})-\bar{\phi}(x_n+a\hat{\mu})(r_\mu+r)U^+(x_n,\hat{\mu})\phi(x_n)]+a^4\sum_n\left(m+\frac{4r}{a}\right)\bar{\phi}(x_n)\phi(x_n).\tag{2}$$

等效质量项明显地破坏了 $m=0$ 时的手征对称性．Susskind 方案减少了多重性，然而只

本文1986年6月5日收到．

保留了分立的 γ_5 对称，失去了连续的手征极限. SLAC 方案放弃近邻相互作用，提出[2]

$$\partial_\mu \phi \to \sum_{n'} \phi(x_{n'}) \sum_k ik_\mu e^{ik(x_n - x_{n'})}. \tag{3}$$

这使 $\partial_\mu \phi$ 不是近邻差分. 虽然保持了手征对称其连续时空极限却是有问题的. 在此基础上，L. H. Karsten 和 J. Smit 等人一般地讨论了格点规范理论的费米子模数，手征对称性等问题的关系指出[3,6] 若格点规范理论保证手征对称性，则费米子传播子有一般形式为

$$S_F(P) = [\gamma_\mu P_\mu(p)]^{-1}, \tag{4}$$

其中函数 $P_\mu(p)$ 在 $p_\mu = 0$ 及 $ap_\mu = 2\pi$ 两处为零，并有相同斜率. 这样有两种可能，或者在 $[0, 2\pi/a]$ 区间内有一个极点，这导致多重性；或者在此区间内 $P_\mu(p)$ 不连续，这导致连续时空中的非协变理论. 因而他们作出结论，若在格点上保持手征对称，则或者有多余的费米子模，或者是连续时空非协变理论. 同时保持三者都正确是不可能的[3,6].

我们注意到，连续 QCD 中不存在此类困难. 这是用格点上的费米场代替弥漫的连续场的结果. 格点结构的合理内核使我们相信，可以从介于清晰格点和弥漫的连续场之间的模型去寻找解决办法，这就是模糊格点.

二、模糊格点与模糊费米场

四维复欧几里德空间论域中的清晰格点是由特征函数 $\mu(x, x_n)$ 定义的有序点集

$$\{x_n | n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$\mu(x, x_n) = \begin{cases} 1 & x = x_n \\ 0 & x \neq x_n. \end{cases} \tag{5}$$

按 L. A. Zadeh 的方法[4]把 $\mu(x, x_n)$ 的值域延拓到$[0,1]$区间内的一切可能值，则清晰格点就延拓为模糊格点，μ 即成为从属函数，可表示为

$$\{(\tilde{x}_n, \mu(\tilde{x}_n)) | n = 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$\mu(\tilde{x}_n) \in [0, 1]. \tag{6}$$

其中有序偶 $(\tilde{x}_n, \mu(\tilde{x}_n))$ 是由 x_n 延拓来的模糊子集；用带下标的 4 矢量 $\tilde{x}_n = x_n + y_n$ 来描述模糊子集中的元素，n 表示它属于 x_n 的邻域，4 矢量表示时空位置；y_n 是该位置对 x_n 的偏离. $\tilde{x}_n$ 的这种双重含义意味着若

$$\tilde{x}_m = \tilde{x}_n$$

则

$$x_m = x_n, \quad y_m = y_n. \tag{7}$$

清晰格点费米场是定义在结点上的回旋量有序集，

$$\{\phi(x_n) | n = 1, 2, 3, \cdots\}.$$

由扩张原理知[7]，x_n 扩张为模糊格点时，此映射可诱导出模糊格点费米场为：

$$\{(\phi(\tilde{x}_n), \mu(\tilde{x}_n)) | n = 1, 2, 3, \cdots\}, \tag{8}$$

其中

$$\phi(\tilde{x}_n) \equiv \phi(x_n). \tag{9}$$

从属函数同 (6) 式．平移不变性使我们可令从属函数仅仅与 $\tilde{x}_n$ 中各点与 x_n 的偏离 y_n 有关，

$$\mu(\tilde{x}_n) = \mu(y_n). \tag{10}$$

在模糊格点中考虑时空积累效应时对每个模糊子集都应作模糊积分．若

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \int d^4y_n\mu(y_n), \\ C'^{-1} &= \int d^4y_n\mu^2(y_n), \end{aligned} \tag{11}$$

则 $C\mu(y_n)d^4y_n$ 及 $C'\mu^2(y_n)d^4y_n$ 均可作为这种模糊积分的模糊测度[7]．因此，当我们把 $\mu(y_n)\phi(x_n)$ 作为定义在模糊格点时空 $\tilde{x}_n$ 上的场量时，包含模糊积分的全空间积累效应应有如下等价关系

$$\int d^4\tilde{x} \sim Ca^4\sum_n \int d^4y_n. \tag{12}$$

由 δ 函数的定义及(7)式所表示的 $\tilde{x}_n$ 的双重含义，模糊时空的 δ 函数应有如下等价关系

$$\delta^4(\tilde{x}_n - \tilde{x}_m) = \delta_{m,n}\cdot\delta^4(y_n - y_m) \tag{13}$$

于是，包含模糊积分的 Fourier 变换应是

$$\begin{aligned} &Ca^4\sum_n\int d^4y_n\mu(y_n)\phi(x_n)\exp(ik\tilde{x}_n) \\ &\quad = C\int d^4y_n\mu(y_n)\exp(iky_n)a^4\sum_n\phi(x_n)\exp(ikx_n) \\ &\quad = \mu(k)\phi(k), \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\mu(k) = C\int d^4y_n\mu(y_n)\exp(iky_n). \tag{15}$$

参考文献[7]告诉我们，场量 $\mu(y_n)\phi(x_n)$ 的微商应由同一从属度的差分来代替．所以有

$$\begin{aligned} &\{i\gamma_\mu\partial_\mu + m\}\mu(y_n)\phi(x_n) \\ &\quad \sim i\gamma_\mu\frac{1}{2a}[\mu(y_n)\phi(x_n+\hat{\mu}a) - \mu(y_n)\phi(x_n-\hat{\mu}a)] \\ &\quad + m\mu(y_n)\phi(x_n) = \mu(y_n)\Big\{i\gamma_\mu\frac{1}{2a}[\phi(x_n+\hat{\mu}a) \\ &\quad - \phi(x_n-\hat{\mu}a)] + m\phi(x_n)\Big\}. \end{aligned} \tag{16}$$

此式说明，模糊格点费米场满足与清晰格点相同的 Dirac 方程．

自由费米子作用量可写为

$$\begin{aligned} S_{\rm free} = C'a^4\sum_n\int d^4y_n\Big\{&\mu(y_n)\bar{\phi}(x_n)\gamma_\mu\frac{1}{2a}[\mu(y_n)\phi(x_n+\hat{\mu}a) \\ &- \mu(y_n)\phi(x_n-\hat{\mu}a)] + m\mu(y_n)\bar{\phi}(x_n)\mu(y_n)\phi(x_n)\Big\}. \end{aligned} \tag{17}$$

作 Fourier 变换后(17)式成为

$$
\begin{aligned}
S_{\text{free}} = & C'a^4 \sum_n \int d^4y_n \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik\tilde{x}_n}\bar{\phi}(k)\mu(k)\,\gamma_\mu \frac{1}{2a} \right. \\
& \times \left[\int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\, e^{-ik'(\tilde{x}_n+\hat{\mu}a)}\phi(k')\mu(k') \right. \\
& \left. - \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\, e^{-ik'(\tilde{x}_n-\hat{\mu}a)}\phi(k')\mu(k') \right] \\
& \left. + m \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, e^{ik\tilde{x}_n}\bar{\phi}(k)\mu(k) \int \frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\, e^{-ik'\tilde{x}_n}\phi(k')\mu(k') \right\} \\
= & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{C'}{C}\, \bar{\phi}(k)\mu(k) \left[i\gamma_\mu \frac{\sin k_\mu a}{a} + m \right] \phi(k)\mu(k).
\end{aligned} \tag{18}
$$

三、正态模糊格点

从属函数的确定带有人为性[7]，我们可以取正态从属函数，

$$
\mu(y_n) = \exp\left(-\frac{1}{2}(y_n/b)^2\right), \tag{19}
$$

其中 b 是有长度量纲的参数。(11)式中参数为

$$
C^{-1} = 4\pi^2 b^4, \quad C'^{-1} = \pi^2 b^4, \tag{20}
$$

(15)式成为：

$$
\mu(k) = e^{-2b^2k^2}. \tag{21}
$$

因 Q 数仍集中在结点 x_n 上，我们可以先不考虑规范场的模糊化而把正态模糊格点费米子作用量写成

$$
\begin{aligned}
S_{FF} = & \frac{a^3}{2} C' \sum_n \int d^4y_n \left\{ \bar{\phi}(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \gamma_\mu U(x_n,\mu)\phi(x_n+a\hat{\mu})\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right. \\
& - \bar{\phi}(x_n+a\hat{\mu})\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \gamma_\mu U^+(x_n,\mu)\phi(x_n) \\
& \left. \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} + m\bar{\phi}(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \phi(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{22}
$$

当 a 很小时我们有

$$
\begin{aligned}
S_{FF} = & C'a^4 \sum_n \int d^4y_n \left\{ \bar{\phi}(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \gamma_\mu \frac{1}{2a} \left[\phi(x_n+a\hat{\mu})\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \phi(x_n-a\hat{\mu})\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right] \right\} \\
& + \frac{i}{2} g C'a^4 \sum_n \int d^4y_n \left\{ \bar{\phi}(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \gamma_\mu A_\mu(x_n)\phi(x_n+a\hat{\mu})\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right. \\
& \left. + \bar{\phi}(x_n+a\hat{\mu})\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \gamma_\mu A_\mu(x_n)\phi(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right\} \\
& + C'a^4 \sum_n \int d^4y_n m \left\{ \bar{\phi}(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \phi(x_n)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_n}{b}\right)^2} \right\} \\
& + 0(a^5) \xrightarrow[a\to 0]{} \int d^4x \bar{\phi}(x)[i\gamma_\mu D_\mu + m]\phi(x).
\end{aligned} \tag{23}
$$

其中 $\phi(x)$ 是连续时空中的弥漫费米场；D_μ 是协变微商．由于正态从属函数是一个普通 C 数，(22)式的局域规范不变性是显然的．这就是说，(22)式符合格点规范理论费米子作用量的条件[1]。

(22)式的自由费米子部份在 Fourier 变换后成为

$$S_{\text{free}} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 4\bar{\phi}(k) e^{-2b^2k^2} \left[i r_\mu \frac{\sin k_\mu a}{a} + m \right] \phi(k) e^{-2b^2k^2}. \tag{24}$$

由于指数因子的存在，当 $a \to 0$ 时若 b 不是与 a 同阶或更高阶的无穷小，那么就只有 $k_\mu a \sim 0$ 对配分函数有贡献并给出正确的连续极限．这就有可能避免了费米子模的多重性而同时保持了 $m = 0$ 时的手征极限。

在 $a \gg b$ 的强耦合区，x_n 到 $x_n + a\hat{\mu}$ 的中点处的从属函数为

$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2b}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \cdots} < 0\left(\frac{b}{a}\right)^2. \tag{25}$$

即场的重迭部份趋于零，有清晰格点的极限．这也许从另一种角度说明了强耦合极限下使用 naive 作用量的合理性[5]．此外，没有 $k_\mu a \sim \pi$ 的费米子模就不会出现左手

$$\frac{1}{2}(1 - r_5)\phi$$

场同时描述了一个左手粒子和一个右手粒子的现象[3]．可以期望正态模糊格点会给出正确的手征反常。

至此我们可以说，若 b 不是与 a 同阶或更高阶的无穷小，正态模糊格点有可能解决费米子多重性问题同时保持手征极限和协变的正确的连续极限．在不违背 Karsten 和 Smit 等人的分析的基础上得出相反的结论。

感谢李文铸教授，汪容教授，郭硕鸿教授，郑希特教授，冼鼎昌研究员，吴济民老师等同志的热情帮助和有益的讨论。

参　考　文　献

[1] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
G. Schierholz, CERN-TH-4139/85.
S. Samuel, K. J. M. Moriarty, CERN-TH-4272/85.
[2] K. G. Wilson, Erice Lecture Nortes (1975).
L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D16**(1977), 3031.
S. D. Drell, M. Weistein, S. Yankielowicz, *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 487; *Phys. Rev.*, **D14**(1976), 1627.
[3] L. H. Karsten, J. Smit, *Nucl. Phys.*, **B183** (1981), 103; *Phys. Lett.*, **104B** (1981), 315.
[4] L. A. Zadeh, *Information and Control*, **8**(1965), 338.
[5] Guo S. H. et al., *Commun. in Theor. Phys.*, **3**(1984), 481, 575;
Guo S. H. et al., *Chinese Phys. Lett.*, **3**(1985), 409.
[6] H. B. Neilson, M. Ninomiya, *Nucl. Phys.*, **B185** (1980), 20; *Nucl. Phys.*, **B193** (1981), 173
[7] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems—Theory and Application, New York, 1980.

NORMAL FUZZY LATTICE——A PROBABLE FERMIONIC ACTION WITHOUT MULTIPLICITY BUT REMAINS CONVARIANT AND CHIRAL LIMIT

SHAO-JING DONG
(Zhejian University)

ABSTRACT

We introduce a normal fuzzy lattice fermionic action. If the parameter b introduced in the theory is not of the same order as the spacing a, or even smaller, it will break the karsten and Smit's no-go theorem, which says it is impossible to introduce a lattice fermionic chiral action with correct space-time limit to continuum and without unnecessary fermion modes.