第12卷 第1期　高能物理与核物理　Vol. 12, No. 1
1988年1月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Jan., 1988

快报

2+1维 $SU(2)$ 规范理论的胶球质量*

郑维宏　刘金明　郭硕鸿
（中山大学物理系，广州）

摘　　要

本文对具有严格基态解的格点规范哈密顿量采用变分法，计算了 $2+1$ 维 $SU(2)$ 规范群的胶球质量．得到在 $0 \leqslant 1/g^2 \leqslant 7$ 范围内，标度行为是

$$am = 2.28g^2,$$

与弱耦合展开结果一致．

应用格点规范理论能给出关于胶球质量的预言．我们计算了 $2+1$ 维 $U(1)$ 规范理论的胶球质量，说明了应用具有严格基态解的格点规范哈密顿量研究胶球质量是有效的[1,2]．本文将此方法推广到 $SU(2)$ 规范群．$2+1$ 维 $SU(2)$ 群是超可重整的，已有一些文章对其作了讨论[4-9]，弱耦合展开[3]得到的标度行为是 $ma \propto g^2$，(其中 $g^2 = e^2a$，e 为荷)．

具有严格基态解的纯格点规范场的哈密顿量为[1]:

$$H = \frac{g^2}{2a}\sum_l \boldsymbol{E}_l^2 - \frac{1}{ag^2}\sum_p \mathrm{Tr}(U_p + U_p^+)$$
$$- \frac{g^2\theta^2}{2a}\sum_{l,\pi,\pi'} \mathrm{Tr}(U_l^+\Lambda^a U_\pi^+ - U_\pi \Lambda^a U_l)\mathrm{Tr}(U_l^+\Lambda^a U_{\pi'}^+ - U_{\pi'}\Lambda^a U_l) \tag{1}$$

式中 $\theta = 1/(2g^4C_N)$，C_N 为 $SU(N)$ 群基础表示的 Casmur 不变量，Λ^a 为 $SU(N)$ 规范群生成元 T^a 的矩阵表示．对于 $SU(2)$ 群，$\theta = 2/(3g^4)$，$\Lambda^a = \tau^a/2$，τ^a 为 pauli 矩阵．U_π、$U_{\pi'}$ 分别是方块 U_p 中除了 U_l 外其它三条链的乘积．

哈密顿量 (1) 具有能量为零的准确基态:

$$|\Psi_0\rangle = e^R|0\rangle \tag{2}$$

其中 $R = \frac{2}{3g^4}\sum_p \mathrm{Tr}(U_p + U_p^+) = \frac{4}{3g^4}\sum_p \mathrm{Tr}U_p$，态 $|0\rangle$ 定义为 $E_l|0\rangle = 0$．

容易证明 (1) 式可写成

$$H = \frac{g^2}{2a}e^{-R}E_l^a e^{2R}E_l^a e^{-R} \tag{3}$$

我们用变分法求 (6) 式的激发态能谱，设取变分态为:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=1}^{N} C_n|\Psi_n\rangle \tag{4}$$

* 此项研究计划得到国家教委科学基金会和中山大学高等学术中心基金会资助．
本文1987年4月8日收到．

式中 $|\Psi_n\rangle$ 为与 $|\Psi_0\rangle$ 正交的一组具有相同量子数的态，C_n 为变分参数，激发态能量 E 由下面极小条件确定：

$$\delta E = \delta(\langle\Psi|H|\Psi\rangle/\langle\Psi|\Psi\rangle) = 0 \tag{5}$$

$SU(2)$ 群规范场的最低激发态为 $J^{pc} = O^{++}$ 态. 对此激发态，我们取 $|\Psi_n\rangle$ 为 $n\times n$ 矩形 wilson 圈，即

$$|\Psi_n\rangle = (\hat{\Phi}_n - v_n)|\Psi_0\rangle \tag{6}$$

$$\hat{\Phi}_n = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_x \mathrm{Tr}U_{np}(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

式中 V 为格点总数，$U_{np}(\boldsymbol{x})$ 表示一个端点在 $\boldsymbol{x}$ 处的 $n\times n$ 矩形 wilson 圈. 为了使 $|\Psi_n\rangle$ 与 $|\Psi_0\rangle$ 正交，应取 v_n 为

$$v_n = \langle\hat{\Phi}_n\rangle. \tag{8}$$

其中定义 $\langle\cdots\rangle. \equiv \langle\Psi_0|\cdots|\Psi_0\rangle/\langle\Psi_0|\Psi_0\rangle$，由 (5) 式对 C_n 变分，得本征值方程：

$$\det\|W_{mn} - \lambda D_{mn}\| = 0 \tag{9}$$

式中

$$W_{mn} = -\left\langle\sum_{l,a,x}[E_l^a, \hat{\Phi}_m(0)][E_l^a, \hat{\Phi}_n(\boldsymbol{x})]\right\rangle_0 \tag{10}$$

$$D_{mn} = \left\langle\sum_x \Phi_m(0)\Phi_n(\boldsymbol{x})\right\rangle_0 - \langle\Phi_m(0)\rangle_0\left\langle\sum_x \Phi_n(\boldsymbol{x})\right\rangle_0 \tag{11}$$

$$\lambda = 2am\beta = 2am/g^2 \tag{12}$$

在 2＋1 维情况下，把链积分 $[dU_l]$ 变换为元方块积分 $[dU_p]$ 时，Jacobian 为 1[10]，而且积分测度 $[dU_p]$ 和基态 $|\Psi_0\rangle$ 在定域规范变换下不变，由此可以证明任意 $n\times m$ 矩形 wilson 圈的基态平均值可以写成 $n\times m$ 个圈内元方块的乘积的迹的基态平均值. 于是就可以将矩阵元 W_{mn} 和 D_{mn} 的计算变换为 $SU(2)$ 群上的单链积分. 在计算中需要用到 n 个元方块的 wilson 圈的乘积的基态平均值 B_n：

$$B_n = \langle\mathrm{Tr}(U_{1p}U_{2p}\cdots U_{np})\mathrm{Tr}(U_{1p}U_{2p}\cdots U_{np})\rangle_0 \tag{13}$$

应用 $SU(2)$ 群的单链积分公式[11]

$$Z = \int_{SU(2)} dU e^{\mathrm{Tr}(UJ^+ + JU^+)} = \sum_{k=0}^{\infty}(\mathrm{Tr}JJ^+ + \det J + \det J^+)^k/[k!(k+1)!]$$

得递推关系

$$B_n = (1 - 2y_2/x)B_{n-1} + 2y_2/x \tag{14}$$

式中 $x = 8/(3g^4)$，$y_2 = I_2(2x)/I_1(2x)$，$I_i(2x)$ 为 i 阶虚宗量贝塞尔函数. 而且

$$B_1 = 4(1 - 3y_2(2x)/2x)$$

对称矩阵元 W_{mn}、D_{mn} 在 $n \geqslant m$ 时为

$$W_{mn} = 4m(n-m-1)y_2^{n^2-m^2}(1 - B_{m^2}/4) + 8\sum_{k=1}^{m} k y_2^{n^2+m^2-2km}(1 - B_{km}/4) \tag{15}$$

$$\begin{aligned} D_{mn} = {} & 4\sum_{k,i=1}^{m}(y_2^{n^2+m^2-2ki}B_{kj} - 4y_2^{n^2+m^2}) + (n-m-1)^2(y_2^{n^2-m^2}B_{m^2} - 4y_2^{n^2+m^2}) \\ & + 4(n-m-1)\sum_{k=1}^{m}(y_2^{n^2+m^2-2km}B_{km} - 4y_2^{n^2+m^2}) \end{aligned} \tag{16}$$

我们分别对 $N = 1, 2, 3, 4, 5, 8, 15$ 和 30，求出本征值方程 (9)式的本征值. 取其

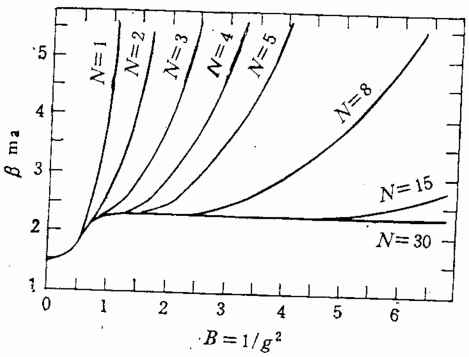

图 1

最小 m，作 $\beta am \sim \beta$ 的关系曲线，如图 1 所示.从图中可以看出，在 $1/g^2 > 1$ 时，开始显示标度行为：$am = 2.28g^2$，并且在相当大范围内 $(1 \leqslant 1/g^2 \leqslant 7)$，与弱耦合展开的结果一致．而 MC 方法的最新结果是在

$$4.5 \leqslant 4/g^2 \leqslant 5.5$$

范围内获得 $am = (2.15 \pm 0.2)g^2$ 的标度行为[9]．值得一提的是，在我们的计算中，其它各种变分态，对降低本征值 βam 的贡献很小，而对降低本征值贡献大的 $n \times n$ wilson 圈（即我们所选取的变分态）与 $U(1)$ 群[2]的情况一致．另外，因为 2 + 1 维 $SU(2)$ 群的标度行为是 $a \propto g^2$，故在 $a \to 0$ 时，不能证明 (1) 式最后一项 ΔH 趋于 0（但可证其为有限），因此在 2 + 1 维时 (1) 式的连续极限可能与 wilson 作用量不相同，但计算结果表明，它们具有相同的标度行为．此外，我们也已获得另一具有准确基态解的哈密顿量，它在 2 + 1 维、3 + 1 维时都具有与 wilson 作用量相同的连续极限，并且计算表明，它具有与本文完全一致的标度行为．我们将在以后再作这方面的报道．

参 考 文 献

[1] GUO S. H., LIU J. M. and CHEN Q. Z., *Chin. Phys. Lett.*, **2**(1985), 409.
[2] GUO S. H., ZHENG W. H. and LIU J. M., *Chin. Phys. Lett.*, **3**(1986), 445.
[3] V. F. MULLER and W. RUHL, *Nucl. Phys.*, **B230**(1984), 49.
[4] H. ARISUE, M. KATO and T. FUJIWARA, *Progr. of Theor. Phys.*, **70**(1983), 229.
[5] E. d'HOKER, *Nucl. Phys.*, **B180**(1981), 341.
[6] A. PATKOS, *Phys. Lett.*, **B110**(1982), 391.
[7] A. IRBACK and C. PETERSON, *Phys. Lett.*, **B174**(1986), 99.
[8] C. J., HAMER and A. C. IRVING, *Z. Phys.*, C. **27**(1985), 307.
[9] K. FARAKOS, G. KOUTSOUMBAS and S. SARANTAKOS, CERN-TH. 4610/86.
[10] G. G. BATROUNI, *Nucl. Phys.*, **B208**(1982), 12.
[11] K. E. ERIKSON et al., *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 2276.

THE MASS GAP IN 2+1 DIMENSIONAL *SU*(2) LATTICE GAUGE THEORY

Zheng Wei-hong Liu Jin-ming Guo Shuo-hong

(Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

A variational calculation of the mass gap in 2+1 dimensional $SU(2)$ lattice gauge theory by using a Hamiltonian with the ground state being exactly known is made. In the range $0 < 1/g^2 \leqslant 7$, a good scaling behaviour $am = 2.28\, g^2$ is obtained, which is in agreement with weak-coupling perturbation theory.