第 12 卷 第 5 期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 5
1988 年 9 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1988

包含六链方格的 $SU(2)$ 改进作用量的累积展开变分研究*

李文铸 张剑波
(浙江大学，杭州)

摘 要

本文对包含六链方格满足 Symanzik 要求的 $SU(2)$ 格点规范作用量进行了累积展开变分研究，解析地计算了精确到二级累积展开的元格和六链方格的平均值，计算结果与 Monte Carlo 结果自洽.

一、引 言

目前对格点规范理论的研究主要是依靠 Monte Carlo 数值模拟方法[1]，利用这一方法，已经得到了许多关于非微扰效应的计算结果[2]，大大丰富了我们对格点规范理论的知识，但是，作为一个比较基本的理论，仍然非常希望发展关于格点规范理论解析处理的理论体系．以求得理论的直观图象和对理论的深入了解.

现在已经有了一些关于格点规范理论的解析处理方法，如平均场方法[3]、变分法[4]、鞍点平均场近似[5]、和累积展开变分法[6]，由于后两种方法可以逐级地进行近似计算，因此发展较快．初步计算表明，累积展开变分法计算到二级或三级修正时，已能得到比较精确的结果[7].

我们曾利用变分方法研究了 $SU(2)$ 包含六链方格的格点作用量[8]，由于没有考虑关联效应的影响．所得的结果不很理想，系统中出现了不应有的相变．本文的目的就是利用累积展开变分法进行计算，改善变分方法的计算结果.

二、方法与计算结果

我们所考虑的包含六链方格的作用量如下

$$S = \frac{\beta}{4}\left[\frac{5}{3}\sum_{\mathrm{I}} \mathrm{Retr}\, U_{\mathrm{I}} - \frac{1}{12}\sum_{\mathrm{II}} \mathrm{Retr} U_{\mathrm{II}}\right] \tag{1}$$

式中 U_{I} 代表元格中四个 U 的有序乘积，U_{II} 代表图 1 中 II 型六链方格六个 U 的有序

* 本工作得到国家科学基金的资助.
本文 1987 年 7 月 4 日收到.

乘积，$U \in SU(2)$

图 1

这里我们取了这类符合 Symanzik 连续极限行为改进的作用量的最简单的选择[9]，这样的作用量从强耦合区到弱耦合区的过渡比标准的 Wilson 作用量更平滑．系统的配分函数为

$$e^{-W} = Z = \int \prod_l dU_l e^S \tag{2}$$

在文献[8]中，我们已用作用量变分法研究过，但由于没有考虑关联效应的影响，计算的结果不太理想．本文用累积展开变分法来计算．

选试探作用量为 $S_0(U \cdot J_\alpha)$，J_α 是变分参数，则改写系统的自由能为：

$$\begin{aligned} e^{-W} \equiv Z &= \int \prod_l dU_l e^S \\ &= \int \prod_l dU_l e^{S-S_0} e^{S_0} = Z_0 \langle e^{S-S_0} \rangle_0 \end{aligned} \tag{3}$$

式中

$$Z_0 = \int \prod_l dU_l e^{S_0}$$

$$\langle Q \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int \prod_l dU_l Q e^{S_0}$$

把 $\langle e^{S-S_0} \rangle_0$ 作累积展开．得

$$\begin{aligned} \langle e^{S-S_0} \rangle_0 = \exp\Big\{ &\langle S - S_0 \rangle_0 + \frac{1}{2!}[\langle (S-S_0)^2 \rangle_0 - \langle S - S_0 \rangle_0^2] \\ &+ \frac{1}{3!}[\langle (S-S_0)^3 \rangle_0 - \langle S - S_0 \rangle_0^3] \\ &- \frac{1}{2!} \langle S - S_0 \rangle_0 [\langle (S-S_0)^2 \rangle_0 - \langle S - S_0 \rangle^2] + \cdots \Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

这样：

$$W = -\ln Z_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 - \frac{1}{2!}[\langle (S-S_0)^2 \rangle_0 - \langle S - S_0 \rangle_0^2] + \cdots \tag{5}$$

经过这一步骤，把 S 作用量系统的统计问题转化成 S_0 作用量系统的统计问题． 根据 Jansen 不等式：

$$\langle e^Q \rangle \geqslant e^{\langle Q \rangle} \tag{6}$$

定义主部自由能：

$$W_{主} = -\ln Z_0 - \langle S - S_0 \rangle \tag{7}$$

则系统的自由能 $W \leqslant W_{主}$．

通过变分条件：

$$\frac{\partial W_{\pm}}{\partial J}=0, \quad \frac{\partial^2 W_{\pm}}{\partial J^2}>0 \tag{8}$$

求出 $W_{\pm}$ 的极小值．然后再在此基础上把高阶累积量作为修正．

在文献[8]中，已经证明，在 $SU(2)$ 群情形试探作用量可取为

$$S_0=\sum_l m\,\mathrm{Retr}\,U_l V^+ \tag{9}$$

其中 m 为实数；$V\in SU(2)$，引人它是为计算方便．试探作用量(9)与

$$S_0'=\sum_l \mathrm{Retr}\,U_l J^+ \tag{10}$$

对作变分计算等价．(10)中 J 为 2×2 复矩阵．并已求得

$$Z_0=\int\prod_l dU_l \exp\left\{\sum_l m\,\mathrm{Retr}(U_l V^+)\right\}$$

$$=[f(m)]^{Md}=\left[\frac{I_1(2m)}{m}\right]^{Md} \tag{11}$$

$$\langle S_0\rangle_0=mMd\frac{\partial}{\partial m}\ln f(m) \tag{12}$$

$$\langle S\rangle_0=\frac{1}{2}Md(d-1)\frac{5}{6}\beta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln f(m)}{\partial m}\right)^4$$

$$-Md(d-1)\frac{1}{24}\beta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\ln f(m)}{\partial m}\right)^6 \tag{13}$$

本文计算到二级累积展开，即自由能的修正项为

$$\frac{1}{2!}[\langle(S-S_0)^2\rangle_0-\langle S-S_0\rangle_0^2] \tag{14}$$

计算此项，其中 $\langle S-S_0\rangle_0^2$ 可直接得到．关键要计算的是

$$\langle(S-S_0)^2\rangle_0=\langle S^2-2S\cdot S+S_0^2\rangle_0 \tag{15}$$

后二次可很容易求得：

$$\langle SS_0\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int\prod_l dU_l SS_0 e^{S_0}$$

$$=mMd\frac{\partial\ln f}{\partial m}\langle S\rangle_0+m\frac{\partial}{\partial m}\langle S\rangle_0 \tag{16}$$

其中 $\langle S\rangle_0$ 为(13)式．

$$\langle S_0^2\rangle_0=\frac{1}{Z_0}\int\prod_l dU_l S_0 S_0 e^{S_0}$$

$$=\left(Mdm\frac{\partial\ln f}{\partial m}\right)^2+Mdm\frac{\partial}{\partial m}\left(m\frac{\partial\ln f}{\partial m}\right)-Mdm\frac{\partial\ln f}{\partial m} \tag{17}$$

计算 $\langle S^2\rangle_0$ 比较复杂，先看 S^2 展开式

$$S^2=\frac{25}{144}\beta^2\left(\sum_{\mathrm{I}}\mathrm{Retr}\,U_{\mathrm{I}}\right)^2-\frac{5}{288}\beta^2\left(\sum_{\mathrm{I}}\mathrm{Retr}\,U_{\mathrm{I}}\right)\left(\sum_{\mathrm{II}}\mathrm{Retr}\,U_{\mathrm{II}}\right)$$

$$+\frac{1}{2304}\beta^2\Big(\sum_{\mathrm{II}}\mathrm{Retr}\,U_{\mathrm{II}}\Big)^2 \tag{18}$$

根据 d 维空间各种拓扑图形的数目．写出

$$\begin{aligned}
\langle S^2\rangle_0 = {} & \frac{25}{144}\beta^2\Big[\frac{1}{2}Md(d-1)\langle\boxdot\rangle_0 + (8d-12)\frac{1}{2}Md(d-1)\langle\square\square\rangle_0 \\
& + \Big(\frac{1}{2}Md(d-1)-8d+11\Big)\frac{1}{2}Md(d-1)\langle\square\rangle_0\langle\square\rangle_0\Big] \\
& - \frac{5}{288}\beta^2\Big\{2Md(d-1)\langle\boxminus\rangle_0 + (12d-18)Md(d-1)\Big\langle\square\!\boxed{}\Big\rangle_0 \\
& + \Big[\frac{1}{2}Md(d-1)-(12d+16)Md(d-1)\langle\boxed{}\rangle_0\langle\square\rangle_0 \\
& + \frac{1}{2304}\beta^2\Big\{Md(d-1)\langle\boxminus\rangle_0 + 4dMd(d-1)\Big\langle\boxed{}\square\Big\rangle_0 \\
& + (28d-42)Md(d-1)\langle\boxed{}\boxed{}\rangle_0 \\
& + [(Md(d-1)-32d+41]Md(d-1)\langle\boxed{}\rangle_0\langle\boxed{}\rangle_0\Big\}
\end{aligned} \tag{19}$$

应用下式

$$\int dU\exp(m\,\mathrm{Retr}\,UV^+)(D_rU)_{\alpha\beta} = (D_rV)_{\alpha\beta}f_r(m) \tag{20}$$

其中 $U, V\in SU(2)$，$(D_rU)_{\alpha\beta}$ 是 U 在 r 表示中的矩阵元 $f_r(m)$ 定义为

$$f_r(m) = \int dU\exp(m\,\mathrm{Retr}\,U)X_r(U)/d_r \tag{21}$$

这里 $X_r(U)$ 是 r 表示的特征标，d_r 为表示的维数．可以计算各项的贡献，例如

$$\begin{aligned}
\langle\boxminus\rangle_0 &= f^{-4}\int\prod_{l=1}^{4}dU_l(\mathrm{tr}U_1U_2U_3^+U_4^+)^2\exp\Big(\sum_{l=1}^{4}m\,\mathrm{Retr}\,U_lU^+\Big) \\
&= f^{-4}\int\prod_{l=1}^{4}dU_l(X_A(U_1U_2U_3^+U_4^+)+1)\exp\Big(\sum_{l=1}^{4}m\,\mathrm{Retr}\,U_lV^+\Big) \\
&= 3\Big[\frac{1}{f}\int dUX_A(U)\exp(m\,\mathrm{Retr}\,U)/3\Big]^4+1 \\
&= 1+3\Big(1-\frac{1}{m}\frac{\partial\ln f}{\partial m}\Big)^4
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $f=\dfrac{I_1(2m)}{m}$.

要计算的是 $\frac{1}{2!}[\langle(S-S_0)^2\rangle_0-\langle S-S_0\rangle_0^2]$，因此(19)式中诸如 $\langle\square\rangle_0\langle\square\rangle_0$ 这些项的大部分可由 $\langle S-S_0\rangle_0^2$ 中的相应的项消去．令 $Q=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\ln f}{\partial m}=\dfrac{I_2(2m)}{I_1(2m)}$ 最后写出计算到累积展开二级修正的每条链的自由能表达式：

$$
\begin{aligned}
E &= W/Md \\
&= -\ln f - \frac{1}{2}(d-1)\frac{5}{6}\beta Q^4 + \frac{1}{24}(d-1)\beta Q^6 + 2mQ \\
&\quad - \frac{1}{2}\left\{ m^2\left(4 - \frac{6}{m}Q - 4Q^2\right) - \frac{5}{3}(d-1)\beta m Q^3\left[4 - \frac{6}{m}Q - 4Q^2\right] \right. \\
&\quad + \frac{1}{4}(d-1)\beta m Q^5\left[4 - \frac{6}{m}Q - 4Q^2\right] \\
&\quad + \frac{25}{72}(d-1)\beta^2\left[(-8d+11)Q^8 + \frac{1}{4}\left(1 + 3\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)^4\right) + (2d-3)Q^6\left(4 - \frac{6}{m}Q\right)\right] \\
&\quad - \frac{5}{72}(d-1)\beta^2\left[(-12d+16)Q^{10} + \frac{1}{4}(12d-18)Q^8\left(4 - \frac{6}{m}Q\right)\right. \\
&\quad \left. + Q^4\left(2\left(1-\frac{2}{m}Q\right)^3 + 3\left(1-\frac{2}{m}Q\right)^2\left(\frac{Q}{m}\right) + \left(\frac{Q}{m}\right)^3 + 6\left(1-\frac{2}{m}Q\right)\left(\frac{Q}{m}\right)^2\right)\right] \\
&\quad + \frac{1}{576}(d-1)\beta^2\left[(-32d+41)Q^{12} + \frac{1}{4}\left[1 + 3\left(1-\frac{2}{m}Q\right)^6\right]\right. \\
&\quad + 4dQ^8\left[\left(1-\frac{2}{m}Q\right)^2 + \left(1-\frac{2}{m}Q\right)\frac{Q}{m} + \left(\frac{Q}{m}\right)^2\right] \\
&\quad \left.\left. + (28d-42)Q^{10}\frac{1}{4}\left(4 - \frac{6}{m}Q\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

对主部求变分. 定义 $E_{主}$

$$
E_{主} = -\ln f - \frac{1}{2}(d-1)\frac{5}{6}\beta Q^4 + \frac{1}{24}(d-1)\beta Q^6 + 2mQ \tag{24}
$$

取 $d = 4$, 由主部极值条件(8)给出

$$
\left(2m - 5\beta Q^3 + \frac{3}{4}Q^5\beta\right)\frac{\partial Q}{\partial m} = 0 \tag{25}
$$

它有两支解:

(1) 平凡解 $m = 0$, $\frac{\partial E_{主}}{\partial m^2} > 0$

(2) $\beta = m/(2.5Q^3 - 0.375Q^5)$ $\frac{\partial E_{主}}{\partial m^2} \gtrless 0$ $m \gtrless 2.6$ 因此, 当 $\beta < \beta_0 = 2.915$ 时, m 只有 0 解. 当 $\beta > 2.915$ 时, m 与 β 的关系如图 2 所示. 自由能(23)式与 β 的关系如图 3 所示. 曲线 I 对应于 $m = 0$, 曲线 II 对应于 $m > 2.60$. 另外, 对于 $m < 2.60$ 的自由能曲线, 由于它没能满足主部极小条件, 故不能实现. 图 3 中也没有画出. 现在自由能曲线 I 比 II 低, 在 $\beta_0 = 2.915$ 没有跳变, 因此没有相变[6].

我们还计算了元格和六链方格的平均值.

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \left\langle \frac{1}{2}\,\mathrm{Retr}\, U_p \right\rangle \\
E_2 &= \left\langle \frac{1}{2}\,\mathrm{Retr}\, U_{\mathrm{II}} \right\rangle
\end{aligned}
\tag{26}
$$

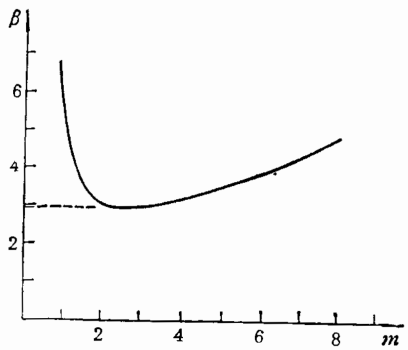

图 2　非零解 m 与 β 的关系

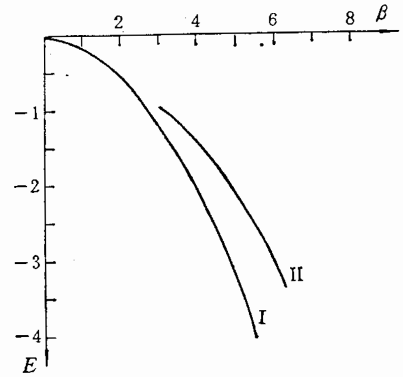

图 3　自由能曲线(二级)

当 $\beta < 2.915$ 时，$m = 0$ 因此

$$E_1 = \frac{5}{24}\beta \tag{27}$$

$$E_2 = \frac{1}{96}\beta \tag{28}$$

当 $\beta > 2.915$ 时；$m \neq 0$ 有

$$\begin{aligned} E_1 = {} & Q^4 - 2mQ^3\left(4 - \frac{6}{m}Q - 4Q^2\right) - \frac{105}{6}\beta Q^8 + \frac{25}{6}\beta Q^6\left(4 - \frac{6}{m}Q\right) \\ & + \frac{105}{24}\beta\left[1 + 3\left(1 - \frac{2Q}{m}\right)^4\right] + \frac{8}{3}\beta Q^{10} - \frac{15}{24}\beta Q^8\left(4 - \frac{6}{m}Q\right) \\ & - \frac{1}{12}\beta Q^4\left[2\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)^3 + 3\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)^2\frac{Q}{m} + \left(\frac{Q}{m}\right)^3 + 6\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)\left(\frac{Q}{m}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} E_2 = {} & Q^6 - 4mQ^5\left(4 - \frac{6}{m}Q - 4Q^2\right) \\ & + \frac{5}{6}\beta\left[-32Q^{10} + \frac{15}{2}Q^8\left(4 - \frac{6}{m}Q\right) + Q^4\left(2\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)^3\right.\right. \\ & \left.\left. + 3\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)^2\frac{Q}{m} + \left(\frac{Q}{m}\right)^3 + 6\left(1 - \frac{2}{m}Q\right)\left(\left(\frac{Q}{m}\right)^2\right)\right)\right] \end{aligned}$$

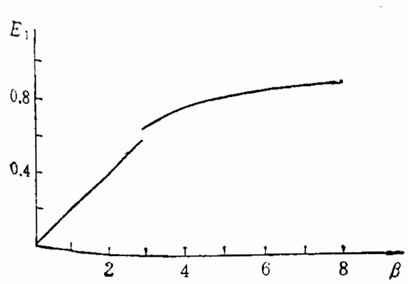

图 4　E_1 与 β 的关系

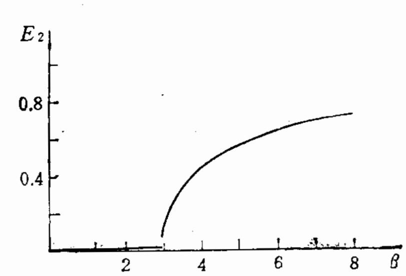

图 5　E_2 与 β 的关系

$$-\frac{1}{24}\beta\left\{-87Q^{12}+\frac{1}{4}\left[1+3\left(1-\frac{2}{m}Q\right)^{6}\right]+70Q^{10}\left(1-\frac{3}{2}\frac{Q}{m}\right)\right.$$
$$\left.+16Q^{8}\left[\left(1-\frac{2}{m}Q\right)^{2}+\left(1-\frac{2}{m}Q\right)\frac{Q}{m}+\left(\frac{Q}{m}\right)^{2}\right]\right\} \tag{30}$$

E_1 和 E_2 与 β 的关系分别如图 4 和图 5 所示．发现在过渡点 $\beta_0=2.915$ 处还没有很好地连接．E_1 处相差 0.05．在 E_2 处相差 0.08．这是由于累积展开只算到二级修正，在更高级的修正下可望消去不连续点．

三、讨　论

对 $SU(2)$ 包含六链方格的作用量的 MC 模拟[10]表明系统没有相变． 现在的结果与他们是一致的．过渡区的位置也与 MC 结果相一致． 这表明累积展开变分法在格点规范中是一种有效的方法．本文在计算元格和六链方格平均值时，还出现不连续点，可能是只算到二阶修正所致．更高阶的修正可望得到更精确的结果．我们没能找到与 E_1 和 E_2 相应的 MC 数据，但从其他包含六链方格作用量的数据看[10]，趋势是一致的．

虽然目前的计算表明[7]，累积展开级数越高，结果就越精确，但我们还没有证明累积展开的收敛性．

目前对 S_0 的选取也没有严格的判据． 从自由能来看，在整个区域都该取 $m=0$ 的平庸解，而计算 E_1 和 E_2 时，用 $m=0$ 显然不行[6]，现在常用的从自由能取极值的判据包含了平均场因素．讨论更好的判据也是有意义的．

另外也可讨论用非链式的试探作用量 S_0，以改善计算的结果．

感谢董绍静同志与我们所作的有益的讨论．

参　考　文　献

[1] M. Creutz, L. Jacobs and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.*, **42**(1979), 1915; *Phys. Rep.*, **95**(1983), 201.

[2] For examples: P. Hasenfratz, CERN-TH-3737(1983); J. B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.*, **55**(1983), 775; G. Schierholz, CERN-TH-4139(1985).

[3] J. Greensite and B. Lautrup, *Phys. Lett.*, **104B**(1981), 41.
N. D. Haridas and D. G. Lauwers, *Nucl. Phys.*, **B210**(1982), 388.

[4] X-T. Zheng, T-L. Chen and C-I. Tan, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843; C-I Tan and X-T. Zheng, *Phys. Rev.*, **D28**(1983), 3141.

[5] J. M. Drouffe and J. B. Zuber, *Phys. Rep.*, **102**(1983), 1; J. M. Alberty, H. Flyvbjerg and B. Lautrup, *Nucl. Phys.*, **B220**(1983), 61.
Y. Sugiyama and T. Yokota, *Phys. Lett.*, **168B**(1986), 386.

[6] I. C. Hsien, X-H. He and Y-S. Song, *Phys. Lett.*, **153B**(1985), 417.
X-T. Zheng. T-L. Chen and I. C. Hsien., *Phys. Lett.*, **154B**(1985), 166.

[7] 吴济民、赵佩英，高能物理与核物理，**10**(1986)，297．

[8] 李文铸、张剑波，浙江大学学报，Vol. **20**，No.4(1986)，1．

[9] P. Weisz, *Nucl. Phys.*, **B212**(1983), 1.

[10] M. Fukugita, et al., *Phys. Lett.*, **130B**(1983), 73; **134B**(1984), 341.

VARIATIONAL ANALYSIS OF CUMULANT EXPANSION IN $SU(2)$ LATTICE GAUGE THEORY WITH AN ACTION INCLUDING SIX-LINK LOOPS

LI WENZHU　　ZHANG JIANBO

(Zhejiang University, Hangzhou)

ABSTRACT

By using the cumulant expansion variational method, we study the $SU(2)$ lattice action including six-link loops which satify the request of Symanzik. The average values of the plaquette and six-link loop up to second order approximation are calculated. Our results are consistant with Monte Carlo data.