

# 相互作用玻色子-费米子模型 体系的转动惯量

刘庸 桑建平

(华中师范大学, 粒子物理研究所, 武昌)

## 摘 要

对相互作用玻色子-费米子模型体系, 在哈密顿量不具有动力学对称性的普遍情况下, 构造体系的内禀态, 借助于推转模型方法, 讨论变形奇  $A$  核的转动惯量, 提出计算转动态能量的解析方法. 以  $^{153, 155, 157}\text{Eu}$  为例, 分析了方法的合理性.

## 一、引 言

用相互作用玻色子-费米子模型 (IBFM)<sup>[1]</sup> 研究奇  $A$  核低能集体性质时, 除了有动力学对称性的少数情况可用群论求得解析结果外<sup>[2]</sup>, 一般须做对角化哈密顿量的较困难的数值计算工作. 对态空间维数高的变形核, 计算有时甚至不可能进行. 模型微观基础的一些研究工作表明, 微观导出的哈密顿量并不具有动力学对称性<sup>[3, 4]</sup>. 因此, 探讨便于应用的合理的近似计算方法有一定实际意义. 本文提出一种解析的近似方法, 适用于变形核. 方法与态空间的维数无关, 不要求哈密顿量取任何特殊形式.

借助于 IBM 内禀态, Schaaser 等人曾用推转模型方法研究变形偶核的基带、 $\beta$  带和  $\gamma$  带, 讨论转动惯量及它与内禀变量的关系, 算出了合理的近似能谱<sup>[5]</sup>. 本文进一步把推转模型方法用于 IBFM 体系. 做法是: 首先构造并确定几种主要激发形式的内禀波函数, 求出内禀激发能, 再研究各个转动带的转动惯量, 然后计算激发谱. 本文仅讨论简单形式的 IBFM, 中子玻色子和质子玻色子不加以区分.

## 二、IBFM 哈密顿量和内禀态

IBFM 哈密顿量可分为以下三个部份:

$$H_{\text{IBFM}} = H_{\text{IBM}} + H_{\text{F}} + V_{\text{BF}}, \quad (2.1)$$

其中纯玻色子项取 IBM 哈密顿量普遍形式,

$$H_{\text{IBM}} = \epsilon_s S^+ S + \epsilon_d \sum_m d_m^+ d_m + \frac{1}{2} \sum_L \sqrt{2L+1} C_L [(d^+ d^+)_L (\tilde{d} \tilde{d})_L]_0$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} V_1 \{ (d^+ d^+)_0 S S + S^+ S^+ (\tilde{d} \tilde{d})_0 \} \\
& + \sqrt{\frac{5}{2}} V_2 \{ S^+ [d^+ (\tilde{d} \tilde{d})_2]_0 + [(d^+ d^+)_2 \tilde{d}]_0 S \} \\
& + \frac{1}{2} V_3 S^+ S^+ S S + \sqrt{5} V_4 S^+ (d^+ \tilde{d})_0 S
\end{aligned} \quad (2.2)$$

对于奇  $A$  核, 只考虑一个不配对核子, 费米子项  $H_F$  为一单体算子

$$H_F = \sum_{\alpha} E_{\alpha} \eta_{\alpha}^{\dagger} \eta_{\alpha}, \quad (2.3)$$

式中  $\alpha = im$  为态指标,  $i$  表示单粒子态三个转动不变的量子数  $n l j$ . (2.1) 式中的玻色子-费米子相互作用项  $V_{BF}$  取以下形式:

$$\begin{aligned}
V_{BF} & = \sum_i k_{0i} [(S^+ S)_0 (\eta_i^{\dagger} \tilde{\eta}_i)_0] \\
& + \sum_{ii'} k_{2ii'} \{ [d^+ S + S^+ \tilde{d}]_2 (\eta_i^{\dagger} \tilde{\eta}_{i'})_2 \}_0 \\
& + \sum_{ii'} x_{Jii'} [(d^+ \tilde{d})_J (\eta_i^{\dagger} \tilde{\eta}_{i'})_J]_0
\end{aligned} \quad (2.4)$$

对于偶偶核, 归一化的 IBM 内禀基态被取为<sup>[5]</sup>

$$|N; a\rangle = (N!)^{-\frac{1}{2}} (B^+)^N |0\rangle, \quad (2.5)$$

$$B^+ = \left( 1 + \sum_{\mu} a_{\mu}^* a_{\mu} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( S^+ + \sum_{\mu} a_{\mu} d_{\mu}^+ \right), \quad (2.6)$$

其中  $a_{\mu}$  ( $\mu = 0, \pm 1, \pm 2$ ) 为内禀参数. 选原子核的惯量主轴为内禀坐标轴将减少独立内禀参数的数目. 如通常的做法, 集体转动定为绕  $x$  轴进行, 那末从对称性分析可知  $a_{\mu}$  为实数, 并且有  $a_{\mu} = a_{-\mu}$ <sup>[5]</sup>. 引入 Bohr 参数

$$a_0 = \beta \cos \gamma, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma, \quad (2.7)$$

考虑到不区别中子和质子玻色子时, 体系总是轴对称的<sup>[5]</sup>, 只要允许  $\beta$  取负值, 总可令  $\gamma = 0$ . 参数  $\beta$  的稳定值可由能量极值条件确定. 进一步也可给出  $\beta$  和  $\gamma$  带的内禀态<sup>[6]</sup>,

$$|N\beta; a\rangle = B_{\beta}^+ |N-1; a\rangle, \quad (2.8)$$

$$|N\gamma; a\rangle = d_2^+ |N-1; a\rangle, \quad (2.9)$$

$$B_{\beta}^+ = (1 + \beta^2)^{-\frac{1}{2}} (\beta S^+ - d_0^+). \quad (2.10)$$

推广以上偶偶核的内禀态, 使包含奇核子自由度即可描述奇  $A$  核. 一种直接的方法是考虑它们与奇核子内禀波函数  $|\chi_K\rangle$  的乘积:

$$|N; a; x_k\rangle = |N; a\rangle |\chi_k\rangle, \quad (2.11)$$

$$|N\beta; a; x_k\rangle = B_{\beta}^+ |N-1; a\rangle |\chi_k\rangle, \quad (2.12)$$

$$|N\gamma; a; x_k\rangle = d_2^+ |N-1; a\rangle |\chi_k\rangle, \quad (2.13)$$

其中量子数  $K$  是角动量在内禀系  $z$  轴上的投影.  $|\chi_K\rangle$  可以是对应于基态的波函数, 也可以是单粒子激发态的波函数. (2.11)–(2.13) 给出了一个相互正交的 IBFM 内禀态的集

合,在其中每一个态基础上可形成一个转动带。

如果  $|\chi_K\rangle$  是待定的波函数,需引入待定的内禀参数,数目由奇核子可以占据的支壳层决定。虽然用变分法可确定参数的稳定值,但要做复杂的计算。在此我们假定奇核子可以用 Nilsson 波函数描述,于是不必引进新的内禀参数。

### 三、基带的转动惯量

为了计算转动惯量,应找到  $a_\mu$  与转动频率  $\omega$  之间的关系。按照推转模型的做法,求解以下极值问题

$$\delta\langle N; a; \chi_K | H_{\text{IBFM}} - \omega L_x | N; a; \chi_K \rangle = 0, \quad (3.1)$$

其中  $L_x$  是转动角动量算子的  $x$  分量。哈密顿量 (2.1) 期待值

$$\langle H \rangle = \langle N; a; \chi_K | H_{\text{IBFM}} | N; a; \chi_K \rangle \quad (3.2)$$

的表达式很容易推导出来。因为能量不依赖于  $\omega$  的符号,在导出的  $\langle H \rangle$  表达式中参数  $a_1$  以偶次幂形式出现。

算子  $L_x$  可通过算子  $d_\mu^+$ 、 $\eta_{i\mu}^+$  和  $L_x$  的张量性质确定,求得结果是

$$\begin{aligned} L_x = & \frac{1}{2} \sum_{m=-2}^1 [6 - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \{d_{m+1}^+ d_m + d_m^+ d_{m+1}\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{jm} [j(j+1) - m(m+1)]^{\frac{1}{2}} \{\eta_{jm+1}^+ \eta_{jm} + \eta_{jm}^+ \eta_{jm+1}\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

直接推导得到

$$\begin{aligned} \langle L_x \rangle = & \langle N; a; \chi_K | L_x | N; a; \chi_K \rangle \\ = & 2C^2 N a_1 (\sqrt{6} a_0 + 2a_2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$C^2 = \left(1 + \sum_{\mu} a_{\mu}^2\right)^{-1}. \quad (3.5)$$

因为  $|\chi_K\rangle$  有确定的投影量子数,(3.3)第二项没有贡献,于是  $\langle L_x \rangle$  与  $a_1$  成正比。

回到变分方程 (3.1),取极值的条件是

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial a_{\mu}} - \omega \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_{\mu}} = 0. \quad (3.6)$$

在可以认为  $\omega$  足够小的情况下求解。以  $a_{\mu}^{(0)}$  表示  $\omega = 0$  时 (3.6) 的解,在  $a_{\mu} = a_{\mu}^{(0)}$  附近把  $\langle H \rangle$  和  $\langle L_x \rangle$  作 Taylor 展开,

$$a_{\mu} = a_{\mu}^{(0)} + \Delta_{\mu}, \quad (3.7)$$

$$\langle H \rangle = \langle H \rangle|_{a^{(0)}} + \sum_{\mu\nu} \frac{1}{2} \Delta_{\mu} \Delta_{\nu} \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu}} \Big|_{a^{(0)}} + \dots, \quad (3.8)$$

$$\langle L_x \rangle = \sum_{\mu} \Delta_{\mu} \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_{\mu}} \Big|_{a^{(0)}} + \dots. \quad (3.9)$$

$\langle H \rangle$  在  $a_{\mu}^{(0)}$  处取极值,所以 (3.8) 右边没有  $\Delta_{\mu}$  的线性项。 $\omega = 0$  时  $\langle L_x \rangle$  应等于零,所以 (3.9) 右边没有常数项,而且,从 (3.4) 知  $\omega \rightarrow 0$  时  $a_1 \rightarrow 0$ 。注意到  $\omega \rightarrow 0$  时  $\Delta_{\mu} \rightarrow 0$ , 把

$\Delta_\mu$  对  $\omega$  作展开的表达式中也没有常数项, 因此

$$\omega \sum_{\mu} \Delta_{\mu} \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_{\mu}} \Big|_{a^{(0)}}$$

的首项是  $\omega$  的二阶项。这样, 把(3.7)–(3.9)代回(3.6), 略去高阶项以后得到

$$\sum_{\mu} \Delta_{\mu} \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu}} \Big|_{a^{(0)}} = \omega \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_{\mu}} \Big|_{a^{(0)}}. \quad (3.10)$$

因为  $\langle H \rangle$  是  $a_i^2$  的函数,  $\langle L_x \rangle$  正比于  $a_1$ , 当下标  $\mu \neq 1$  时, 有

$$\frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_{\mu} \partial a_{\nu}} \Big|_{a^{(0)}} = \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_{\mu}} \Big|_{a^{(0)}} = 0, \quad (3.11)$$

所以方程组(3.10)很简单, 它的明显形式为:

$$\Delta_0 \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_0^2} \Big|_{a^{(0)}} + \Delta_2 \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_0 \partial a_2} \Big|_{a^{(0)}} = 0, \quad (3.12)$$

$$\Delta_0 \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_0 \partial a_2} \Big|_{a^{(0)}} + \Delta_2 \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_2^2} \Big|_{a^{(0)}} = 0, \quad (3.13)$$

$$\Delta_1 \frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_1^2} \Big|_{a^{(0)}} = \omega \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_1} \Big|_{a^{(0)}}, \quad (3.14)$$

其中(3.14)是独立的, (3.12)和(3.13)构成的方程组系数行列式不等于零, 对展开式的主导项来说只有零解:

$$\Delta_0 = 0 + 0(\omega^2), \quad \Delta_2 = 0 + 0(\omega^2). \quad (3.15)$$

从(3.14)式解出

$$\Delta_1 = a_1 = \omega \frac{\frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_1} \Big|_{a^{(0)}}}{\frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_1^2} \Big|_{a^{(0)}}} + 0(\omega^2). \quad (3.16)$$

另外, 用(3.11)式, (3.10)简化为

$$\langle L_x \rangle = \Delta_1 \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_1} \Big|_{a^{(0)}} + \dots \quad (3.17)$$

把(3.16)代入(3.17)并与经典公式  $\langle L_x \rangle = I\omega + 0(\omega^2)$  比较, 给出转动惯量的表达式为

$$I = \frac{\left[ \frac{\partial \langle L_x \rangle}{\partial a_1} \Big|_{a^{(0)}} \right]^2}{\frac{\partial^2 \langle H \rangle}{\partial a_1^2} \Big|_{a^{(0)}}} + 0(\omega^3). \quad (3.18)$$

只要求出转动惯量, 激发态的能量只需用转动公式计算。具体计算前应先求得  $a_{\mu}^{(0)}$ 。因为(3.15)和(3.16)式意味着  $\omega = 0$  时有  $a_1^{(0)} = a_2^{(0)} = 0$  和  $a_0^{(0)} = \beta_0$ , 此时(3.6)给出  $\beta$  满足的一个四次方程,  $\beta_0$  是这个方程的根。

#### 四、玻色子内禀激发带的转动惯量

对于含有玻色子  $\beta$  或  $\gamma$  激发的转动带, 引用以下记号:

$$\langle H \rangle_\beta = \langle N\beta; a; \chi_K | H_{\text{IBFM}} | N\beta; a; \chi_K \rangle, \quad (4.1)$$

$$\langle H \rangle_\gamma = \langle N\gamma; a; \chi_K | H_{\text{IBFM}} | N\gamma; a; \chi_K \rangle, \quad (4.2)$$

$$\langle L_x \rangle_\beta = \langle N\beta; a; \chi_K | L_x | N\beta; a; \chi_K \rangle, \quad (4.3)$$

$$\langle L_x \rangle_\gamma = \langle N\gamma; a; \chi_K | L_x | N\gamma; a; \chi_K \rangle. \quad (4.4)$$

转动惯量的讨论可以完全依照上一节介绍的方法进行,得到

$$I_\beta = \frac{\left[ \frac{\partial \langle L_x \rangle_\beta}{\partial a_1} \Big|_{a^{(0)}} \right]^2}{\frac{\partial^2 \langle H \rangle_\beta}{\partial a_1^2} \Big|_{a^{(0)}}} + 0(\omega^2), \quad (4.5)$$

$$I_\gamma = \frac{\left[ \frac{\partial \langle L_x \rangle_\gamma}{\partial a_1} \Big|_{a^{(0)}} \right]^2}{\frac{\partial^2 \langle H \rangle_\gamma}{\partial a_1^2} \Big|_{a^{(0)}}} + 0(\omega^2). \quad (4.6)$$

式中的  $\beta$  值是计算基带时确定的。内禀激发能量由以下两式给出:

$$\Delta E_\beta = \langle H \rangle_\beta |_{a^{(0)}} - \langle H \rangle |_{a^{(0)}}, \quad (4.7)$$

$$\Delta E_\gamma = \langle H \rangle_\gamma |_{a^{(0)}} - \langle H \rangle |_{a^{(0)}}. \quad (4.8)$$

若内禀态同时包含奇核子的激发,由此算出的是内禀激发能的总和。

## 五、数值计算

本小节给出一些计算结果,目的在于分析本文方法的合理性。计算中使用的哈密顿量按照一种研究 IBFM 微观基础的理论方案确定<sup>[4,10]</sup>,它是[7]—[9]中阐述的 IBM 微观基础研究方案的推广。在[9]中曾研究过 Sm 偶同位素,本文将讨论<sup>153-157</sup>Eu,它们可看作相应的 Sm 核心与奇质子的耦合体系。我们就用计算 Sm 的微观参数<sup>[9]</sup>来计算哈密顿量(2.1)。表 1 给出了其中玻色子项的系数。奇质子的单粒子能级见表 2。 $V_{BF}$ 的系数很多,不再列举,请参阅[10]。

表 1 哈密顿量玻色子项的系数 (keV)

	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$C_0$	$C_2$	$C_4$	$\varepsilon_d - \varepsilon_s$
<sup>153</sup> Eu	- 85.9	- 44.6	- 33.1	- 73.8	- 128.4	- 35.4	- 40.9	526.0
<sup>155</sup> Eu	- 95.0	- 51.8	- 34.9	- 79.2	- 136.7	- 37.1	- 44.5	368.9
<sup>157</sup> Eu	- 103.7	- 59.2	- 37.1	- 84.6	- 144.6	- 38.4	- 48.0	216.5

图 1 是 <sup>157</sup>Eu 六个转动带的理论计算结果,其中包含  $\beta$  和  $\gamma$  激发的各有两个带。基带和第一激发带与实验资料<sup>[11]</sup>作了比较。各个带转动惯量的计算值列于表 3。从图 1 看出,用本文方法可对变形核的多个转动带作理论分析,并且,只要选取合适的哈密顿量及核子能级,各转动带的内禀激发能和各能态能量的计算值可以符合实验资料。

为进一步探讨方法的合理性和适用范围,在图 2 中把 <sup>153-157</sup>Eu 基带的计算结果与角动

表 2 质子能级

nlj	$E_i(\text{MeV})$
$3s \frac{1}{2}$	7.21
$2d \frac{3}{2}$	6.96
$1h \frac{11}{2}$	5.44
$2d \frac{5}{2}$	5.00
$1g \frac{7}{2}$	4.00

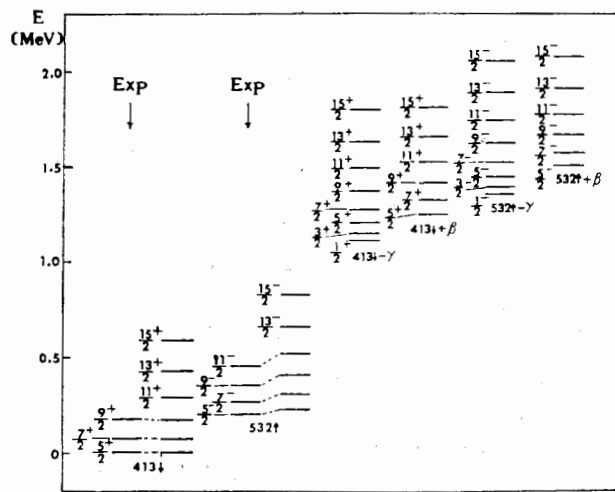


图 1  $^{157}\text{Eu}$  能谱的理论计算结果, 图中的 Exp. 代表实验值

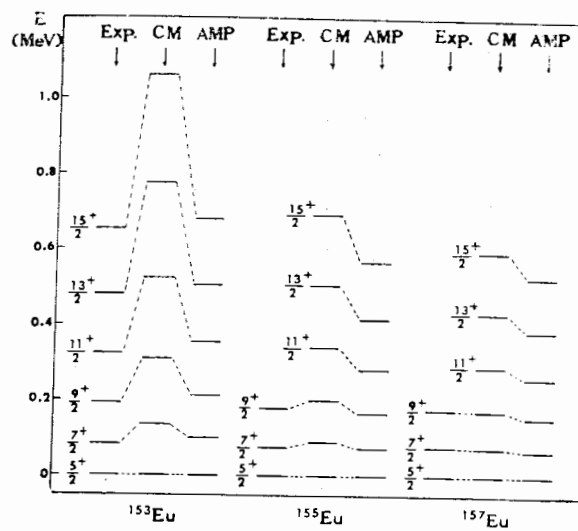


图 2  $^{153-157}\text{Eu}$  的基态转动带. 图中 Exp 表示实验值, 取自 Nuclear Data Sheets; CM 和 AMP 分别代表用本文方法和角动量投影方法算的结果.

表 3  $^{157}\text{Eu}$  各转动带转动惯量的计算值

转动带	513 $\downarrow$	532 $\uparrow$	413 $\downarrow - \gamma$	413 $\downarrow + \beta$	532 $\uparrow - \gamma$	532 $\uparrow + \beta$
转动惯量( $\text{MeV}^{-1}$ )	46.666	45.982	45.959	48.622	45.236	48.813

量投影方法<sup>[12]</sup>及实验值作了比较。我们看到,随着核子数的增加,两种计算的结果越来越接近。对于 $^{157}\text{Eu}$ ,差别只在 10% 左右。因为 $^{153}\text{Eu}$ 很靠近过渡区, $^{157}\text{Eu}$ 是较典型的转动核,图 2 表明,虽然推转模型方法用于近过渡区可能出现明显的偏差,但用于研究典型转动核时,可以获得可靠的定性结果。

## 六、结 语

使用推转模型方法做的 IBM 计算已被证明几乎是精确的<sup>[5]</sup>,上一节的结果初步表明用了它做 IBFM 计算的合理性。如果获得可供对比的精确解,还应当进一步检验这个方法。不过,由于方法使用起来特别简单,不受哈密顿量形式和态空间维数的限制,即使所获结果稍有偏差,在定性的研究工作中仍可使用。本文未区分中子玻色子和质子玻色子,向明确区分这两种自由度的体系推广的工作正在进行。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] F. Iachello and O. Scholten, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 679; *Phys. Lett.*, **91B**(1980), 189. F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A347**(1980), 51.
- [ 2 ] B. Balentekin, I. Bars et al., *Phys. Rev.*, **C27**(1983), 1761.
- [ 3 ] L. M. Yang, D. H. Lu and Z. N. Zhou, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 229c.
- [ 4 ] LIU Yong, YANG Ze-sen and QI Hui, Hua-Zhong Normal University Preprint HZPP 87-6(1987).
- [ 5 ] H. Schaaser and D. M. Brink, *Phys. Lett.*, **143B**(1984), 269; *Nucl. Phys.*, **A452**(1986), 1.
- [ 6 ] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Physica Scripta*, **25**(1982), 28; J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1744.
- [ 7 ] YANG-Ze-sen, LIU Yong and QI Hui, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984), 297c.
- [ 8 ] 杨泽森,高能物理与核物理, **9**(1985),341.
- [ 9 ] LIU Yong, QI Hui and YANG Ze-sen, *Proc. Int. Conf.*, (Singapore 1983. 6)
- [ 10 ] 桑建平、刘庸、齐辉,华中师范大学学报,(自然科学版), **21**(1987),183.
- [ 11 ] J. K. Tuli, *Nuclear Data Sheets*, **9**(1973), 273.
- [ 12 ] LIU Yong, SANG Jian-ping, YANG Tse-sen and QI Hui, Hua-Zhong Normal University Preprint HZPP 87-8(1987).

## THE MOMENT OF INERTIA IN THE INTERACTING BOSON-FERMION MODEL

LIU YONG SANG JIANPING

*(Institute of Particle Physics, Hua-Zhong Normal University, Wuchang)*

### ABSTRACT

For a system described by the interacting boson-fermion model (IBFM), we construct the intrinsic states and study the moment of inertia of deformed odd- $A$  nuclei in terms of the selfconsistent cranking calculation. An approximate analytic method for the energy spectrum is presented in the general cases where the IBFM Hamiltonian does not have dynamical symmetry. The rationality of this method is also discussed by taking  $^{153,155,157}\text{Eu}$  isotopes as examples.