第12卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 6
1988年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1988

重介子问题的相对论处理

郑茂盛
(西北电讯工程学院物理系，西安)

摘　　要

本文将有相互作用的相对论两体运动方程用于处理重介子问题，在势$U(x^2)$为幂次型和对数型的情况下，得到重介子的质量谱及其轻子对衰变宽度. 结果表明，相对论处理更为合理.

一、引　　言

自实验上发现重介子 J/Ψ 和Υ以来，许多理论工作都集中在两个介子的结构、能谱等问题上，并取得了一定成绩. 然而，这些处理大都采用了非相对论性的薛定格二体运动方程. 但是，如果仔细从能量角度考察就会发现一些不足.

根据 Virial[1] 定理: $\langle T\rangle = E - \langle V\rangle = \frac{1}{2}\left\langle r\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\right\rangle$，如设组成介子的夸克间相互作用是对数型的，$V(r) = c\cdot\ln\frac{r}{r_0}$，则在夸克质心系中，对$\Psi$族和$\Upsilon$族偶素，$\langle T\rangle = \frac{C}{2}\approx 0.37\,\mathrm{GeV}$，对其它势，也有相近结果，因此非相对论处理能否适用本身就成了很大的问题.

本文采用高林 (Takabayasi)、小岛 (S. Kojima)[2] 等提出的相互作用相对论两体方程，并取夸克间相互作用为幂次型和对数型势，推出与实验符合很好的重介子谱及其轻子对衰变宽度，最后对所采用的势和方程作了讨论.

二、相对论两体方程

小岛[2]指出，二质点的四动量 p_i 应满足下面的约束方程组:

$$p_i^2 - m_i^2 - U(x^2) = 0,\ (i = 1,\ 2). \tag{1}$$

式中

$$x^\mu = (x_1 - x_2)^\mu. \tag{2}$$

m_i为“自由极限”下质点的静质量，$U(x^2)$ 与 m_i 无关，为描述相互作用的标量函数. 哈氏量为:

本文1987年9月1日收到.

$$H=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{2\mu_i}[p_i^2-m_i^2-U(x^2)].\tag{3}$$

其中 μ_i 是任意常数. 正则运动方程为:

$$p_i^\mu=\mu_i\cdot\dot{x}_i^\mu,\quad \dot{p}_1^\mu=-\dot{p}_2^\mu=\frac{U'}{\mu}\cdot x^\mu.\tag{4}$$

式中

$$\mu=\frac{\mu_1\cdot\mu_2}{\mu_1+\mu_2}.\tag{5}$$

$U'(x^2)\equiv\dfrac{dU(x^2)}{dx^2}$. 由方程(4)可知体系四动量守恒

$$\dot{p}^\mu=\dot{p}_1^\mu+\dot{p}_2^\mu=0.\tag{6}$$

取定时间变量使

$$x_i^0=t.\tag{7}$$

则 $x^0=0$, $\dot{x}_i^0=1$, 由(4)式得

$$p_i^0=\mu_i,\quad \dot{\mu}_i=0.\tag{8}$$

总能量为

$$p^0=\mu_1+\mu_2.\tag{9}$$

在介子质心系中, p^0 为介子的质量 M, 故(9)式为

$$M=\mu_1+\mu_2.\tag{10}$$

质心定义为

$$(\mu_1+\mu_2)\bar{\boldsymbol{x}}=\mu_1\boldsymbol{x}_1+\mu_2\boldsymbol{x}_2.\tag{11}$$

取 $\bar{\boldsymbol{x}}=0$, 则

$$\mu_1\boldsymbol{x}_1+\mu_2\boldsymbol{x}_2=0.\tag{12}$$

令

$$\boldsymbol{p}_1=-\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}.\tag{13}$$

则方程(4)成为介子内部相对运动方程式

$$\boldsymbol{p}=\mu\dot{\boldsymbol{x}},\quad \dot{\boldsymbol{p}}=\frac{U'}{\mu}\cdot\boldsymbol{x}.\tag{14}$$

而约束方程(1)成为

$$\mu_1^2-p^2-m_1^2-U(x^2)=0,\quad \mu_2^2-\boldsymbol{p}^2-m_2^2-U(x^2)=0.\tag{15}$$

令

$$\varepsilon=\mu_1^2-m_1^2=\mu_2^2-m_2^2.\tag{16}$$

则(15)式成为

$$\boldsymbol{p}^2+U(x^2)=\varepsilon.\tag{17}$$

在(7)式所取定的时间变量下, $x^2=-\boldsymbol{x}^2=-\boldsymbol{r}^2$, 故 U 仅是 r 的函数. 相对运动方程可由哈氏量

$$H'=\frac{1}{2\mu}(\boldsymbol{p}^2+U-\varepsilon).\tag{18}$$

得到. 量子化波方程是:

$$\nabla^2\Psi(r)+(\varepsilon-U)\Psi(r)=0. \tag{19}$$

$\Psi(r)$ 是介子内部运动波函数，$|\Psi(r)|^2$ 仍具有几率密度意义． 方程(19)是相对论性的，与薛定格方程有本质的区别．

三、方 程 求 解

对于薛定格方程

$$\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r})+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V)\Psi(\boldsymbol{r})=0. \tag{20}$$

在$V(\boldsymbol{r})$为幂次势 $\alpha\cdot r^\beta+\eta$，$(\beta>0)$ 时，已求得解[3]

$$E_{nl}=\alpha^{\frac{2}{2+\beta}}.\ \left(\frac{2\mu}{\hbar^2}\right)^{-\frac{\beta}{2+\beta}}.\ \left[A(\beta)\cdot\left(n+\frac{l}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{2\beta}{2+\beta}}+\eta. \tag{21}$$

其中

$$A(\beta)=2\cdot\sqrt{\pi}\cdot\beta\cdot\Gamma(3/2+1/\beta)/\Gamma(1/\beta),\ (\beta>0). \tag{22}$$

显然，令 $\frac{2\mu}{\hbar^2}=1$ 时，(20)式在形式上变成(19)式，于是得到(19)式在取势 $U(r)=\lambda r^\nu+c$ 时的解

$$\varepsilon_{nl}=\lambda^{\frac{2}{2+\nu}}\cdot\left[A(\nu)\cdot\left(n+\frac{l}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]^{\frac{2\nu}{2+\nu}}+c,\ (\nu>0). \tag{23}$$

利用(10)式及(16)式，可求出介子质量

$$M=\mu_1+\mu_2=\sqrt{m_1^2+\varepsilon_{nl}}+\sqrt{m_2^2+\varepsilon_{nl}}. \tag{24}$$

取$c\bar{c}$偶素及$b\bar{b}$偶素中夸克、反夸克质量相等，$m_1=m_2$，则得到 Ψ、Υ 族介子质量公式

$$M=2\cdot\sqrt{m_1^2+\varepsilon_{nl}}. \tag{25}$$

对于幂次势还有

$$|\Psi(0)|\sim\left(n-\frac{1}{4}\right)^{\frac{2(\nu-1)}{2+\nu}},\ (\nu>0). \tag{26}$$

于是，可求出轻子对衰变宽度值

$$\Gamma\alpha|\Psi(0)|^2/M_\nu^2. \tag{27}$$

其中 M_ν 是所讨论的介子能量．

对于对数势 $V(r)=C\ln\frac{r}{r_0}$，可以用数值解法求出 ε_{nl} 和$|\Psi(0)|^2$，从而求出介子质量及其轻子对衰变宽度．

四、计 算 结 果

在幂次势下，对 Υ 介子，取 $U(r)=15.1058\ r^{0.1978}-19.3000$，$m_b=m_{\bar{b}}=5.0000$ GeV，对 Ψ 介子，取 $U(r)=4.2100\cdot r^{0.2300}-5.7756$，$m_c=m_{\bar{c}}=1.8400$ GeV． 对数势下，对 Υ 介子，$U(r)=3.8020\cdot\ln\frac{r}{0.89}$，$m_b=m_{\bar{b}}=4.2355$ GeV，对 Ψ 介子，$U(r)=$

$1.2420\cdot\ln\frac{r}{0.89}$, $m_c = m_{\bar{c}} = 1.0500$ GeV. 则算出如下数值，其中还列举了其他人的非相对论结果和实验值[1].

表1 Υ 介子能谱 （单位：GeV）

能级 \ 方法	薛定格对数势	相对论对数势	相对论幂次势	实验值
1S	9.460	9.362	9.433	9.434±0.028
2S	10.049	9.993	9.994	9.993±0.004
3S	10.370	10.324	10.316	10.323±0.004
4S	10.600	10.547	10.546	10.547±0.005

表2 Υ 介子轻子对衰变宽度 （单位：keV）

能级 \ 方法	薛定格对数势	相对论对数势	相对论幂次势	实验值
1S	1.10	1.036	1.012	1.02±0.15
2S	0.50	0.464	0.486	0.46±0.04
3S	0.32	0.296	0.330	0.33±0.03
4S	0.23	0.217	0.250	0.25±0.03

表3 Ψ 介子轻子对衰变宽度 （单位：keV）

能级 \ 方法	薛定格方程		相对论方程		实验值
	对数势	幂次势	对数势	幂次势	
1S	4.80	5.02	4.797	4.40	4.80±0.60
2S	1.73	1.99	1.728	1.73	2.10±0.30
3S	0.98	1.18	1.015	1.06	0.75±0.30
4S	0.71	0.81	0.708	0.81	0.77±0.20
5S	0.51	0.67	0.536	0.61	0.44±0.14

表4 Ψ 介子能谱 （单位：GeV）

能级 \ 方法	薛定格方程		相对论方程		实验值
	对数势	幂次势	对数势	幂次势	
1S	3.097	3.100	3.098	3.088	3.097±0.003
2S	3.686	3.680	3.686	3.694	3.686±0.004
3S	4.010	4.030	3.973	4.020	4.028±0.004
4S	4.230	4.270	4.160	4.245	4.159±0.004
5S	4.410	4.470	4.298	4.419	4.414±0.007

五、结果讨论

从以上各表所列结果可以看出：

1. 表中数据的共同特点是，量子数越大，相对论方法的结果与实验值符合得越好，而

非相对论方法的结果则较差一些．由于半经典的 W．K．B．近似方法本身就是在高量子数时才有较高的准确性，可见用相对论方法来处理重介子问题更为合理．

2．表中的数据在一定程度上支持了高林-小岛方程和相互作用势．事实上，弱幂次势与对数势十分接近，所以结果都较好．

3．夸克间相互作用主部可用弱幂次势或对数势描述，对不同偶素，需采用不同的势参数，它反映了不同系统中相互作用强度的不同．

本文是在西北大学王永康老师指导下于 1983 年完成的，在整理过程中得到西北大学张三合老师的帮助，在此一并致谢．

参　考　文　献

[1] 宋行长，1980 年武汉强子结构讨论会文集，p 158.

[2] Takabayasi, *Prog. Theor. Phys.*, **54**(1975), 563; M. Fujigaki, S. Kojima, *Prog. Theor. Phys.*, **59**(1978), 1330; S. Kojima, *Prog. Theor. Phys.*, **61**(1979), 960.

[3] C. Quigg, J. L. Rosner, *Phys. Rep.*, **56**(1979), 167; H. Grosses, A. Martin, *Phys. Rep.*, **60**(1980), 343.

STUDY OF HEAVY MESONS WITH RELATIVISTIC EQUATION

ZHENG MAOSHENG

(Notherst Telecommunication Engineering Institute, Xi'an)

ABSTRACT

Heavy mesons are studied with the Relativistic two body equation. Mass spectrum and the leptonic decay widths of heavy mesons are calculated for potentials of power and logarithmic type.