

顶角算子和弦相互作用的不同图象

胡红亮 虞跃*

熊传胜

(浙江大学物理系, 杭州)

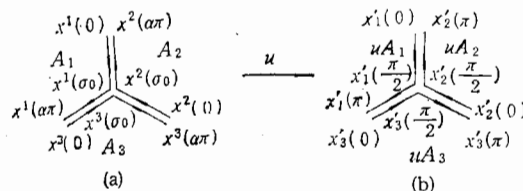
(中国科学院理论物理研究所, 北京)

摘 要

本文讨论 Witten 的弦场相互作用图象的共形变换, 并给出了二类不同的相互作用图象和顶角算子的明显形式. 其中一类不能用参数 σ 的实共形变换与 Witten 图象相联系而另一类则可能.

一、引 言

近年来, 已经有许多作者讨论了协变的玻色开弦场论的相互作用^[1-4]. 其中 CERN-Kyoto 理论^[3]是直接由光锥规范的端点相互作用形式推广而来的. 另一种端点相互作用顶角是由老的 Sciuto-Caneshi-Schwimmer-Veneziano^[5] 顶角加入鬼场推广而来的^[4]. Witten 的相互作用图象与前面的两种都不同^[1]. 在这种图象中, 每条弦的一部分通过某种机制与另一条弦的一部分湮没, 各自留下的部分形成一条新的弦(图 1). 因此, Witten 的图象与 CK 和 SCSV 图象各自描述不同的物理图象, 要通过一种 σ 的重参数化变换把他们联系起来是不可能的. 从原则上说, 弦的相互作用与参数化无关, 可观测量不依赖参数. Witten 选取了参数中点相互作用模型, 相互作用顶角是 δ 函数 Overlap^[1]. 在 Fock 空间, 相互作用的顶角算子可以用弦的一次量子化的产生消灭算子和 Neumann 函数明显地表示^[2]. 我们也可以选取其他的参数化来描述相互作用. Banks 给出过另一种相互作用图象. 在这种图象中, 对相互作用的每条弦作一个相同的共形变换, 图象就回到 Witten 形式(图 1). 这时, Witten 弦场论的所有公理仍满足.



(a) Banks 的三弦相互作用: (b) Witten 的三弦相互作用:
 $A_1 * uA_2 * uA_3$ $uA_1 * uA_2 * uA_3$

图 1

* 1987年12月1日后的地址: 中国科学院高能物理研究所四室.
本文1987年9月23日收到

在本文中, 我们把 Banks 的做法推广到三弦的变换可以各自不同的情况, 并给出一个可明显把变换和顶角算子写出来的例子. 我们也将讨论另一类不能用 σ 的实共形变换与 Witten 图象相联系的相互作用图象及其顶角算子.

二、Witten 相互作用图象的共形变换

Witten 的积分和乘法算子做如下修改便得到新的积分和乘法算子:

$$\int_u A = \int_u u A \quad (1a)$$

$$A * u B = u_{AB}^{-1} (u_A A * u_B B) \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} & (A_1 * u (A_2 * u \cdots * u A_n) \cdots) \\ &= u_{1 \dots n}^{-1} (u_1 A_1 * u_{2 \dots n} (A_2 * u \cdots * u A_n) \cdots) \end{aligned} \quad (1c)$$

和

$$\begin{aligned} & \int_u (A_1 * u (A_2 * u \cdots * u A_n) \cdots) \\ &= \int u_{1 \dots n} (A_1 * u (A_2 * u \cdots * u A_n) \cdots) \end{aligned} \quad (1d)$$

其中 $u_A = \exp(\varepsilon_A^{-n} L_n^A) = \exp\{\varepsilon_A^{-n} b_n^A, Q\}$, $u_{1 \dots n} = u_1 \cdots u_n$,

且

$$[u_A, u_B] = 0, A \neq B; [u_A, Q] = 0, A = 1, \dots, n \quad (2)$$

$Q = \sum_{A=1}^n Q_A$ 是总的 BRST 荷. 利用(2)和 $(-)^{u_A} = (-)^A$, 可以证明, $*_u$ 和 \int_u 也服从

Witten 的公理:

$$\begin{aligned} \int_u A * u B &= (-)^{AB} \int_u B * u A \\ Q(A * u B) &= QA * u B + (-)^A A * u QB \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_u QA = 0$$

$$A * u (B * u C) = (A * u B) * u C$$

这时, 作用量

$$S^u[A] = \int_u A * u QA + \frac{2}{3} \int_u A * u A * u A \quad (4)$$

在规范变换 $\delta A = QA + A * u \Lambda - \Lambda * u A$ 下不变. 在 Fock 空间, (4)改写成:

$$\begin{aligned} S^u[A] &= A[i_u]Q[i_u]A[i_u] + \frac{2}{3} V_3[\tilde{i}_u \tilde{j}_u \tilde{k}_u] A[i_u]A[j_u]A[k_u] \\ &= u_i^+ A[i]Q[i]u_i A[i] + \frac{2}{3} V_3[\tilde{i} \tilde{j} \tilde{k}] u_i A[i]u_j A[j]u_k A[k] \end{aligned} \quad (5)$$

于是就有

$$V_3[\tilde{i}_u \tilde{j}_u \tilde{k}_u] = u_i^+ V_3[\tilde{i} \tilde{j} \tilde{k}]$$

或

$$V_3[i_u j_u k_u] = u_{ijk} V_3[ijk] \quad (6)$$

利用 $Q^2 = 0 (d = 26)$, u_{ijk} 可写成[7]:

$$u_{ijk} = 1 + QX[ijk] + Y[ijk]Q \quad (7)$$

又由于 $QV_3[ijk] = 0$, 所以

$$V_3[i_u j_u k_u] = u_{ijk} V_3[ijk] = V_3[ijk] + QX[ijk] \quad (8)$$

这就是说,任意两个可用共形变换相联系的顶角之间相差一个 BRST 恰当形式, 在同一个 BRST 上调类. 且他们都是 BRST 不变的.

三、可用实共形变换与 Witten 图象相联系的图象的例子

现在,我们来找一个具体的 U_{ijk} . 从 Witten 的图象出发,在参数空间做 σ 的实共形变换,要求 $\sigma'_i = f_i(\sigma_i)$ 在 $\sigma_i = 0$ 时 $\sigma'_i = 0$, 且 f_i 是单调上升函数以保证弦上原来在相互作用点同侧的点变换后仍在同侧而不改变物理结果.

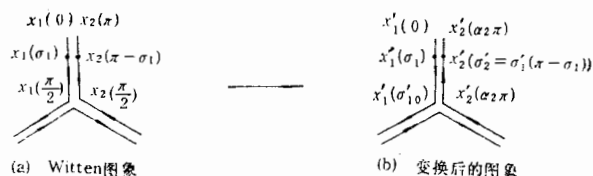


图 2

分式线性变换

$$\sigma'_i = a_i \sigma_i / b_i \sigma_{i+1} \quad (8)$$

当取

$$a_i = \frac{\sigma'_{i0} \alpha_i}{\alpha_i \pi - \sigma'_{i0}}, \quad b_i = \frac{2 \sigma'_{i0} - \alpha_i \pi}{\pi(\alpha_i \pi - \sigma'_{i0})} \quad (9)$$

时,就描述一个满足上面条件的共形变换. 其中 $\alpha_i \pi$ 是变换后参数长度, σ'_{i0} 是变换后相互作用点参数. 对图 2(b) 再作一次分式线性变换

$$\sigma''_i = \frac{a'_i \sigma'_i}{b'_i \sigma'_i + 1} \quad (10a)$$

$$a'_i = \frac{\alpha'_i \sigma''_{i0} (\alpha_i \pi - \sigma'_{i0})}{\alpha \sigma'_{i0} (\alpha'_i \pi - \sigma''_{i0})}, \quad b'_i = \frac{\alpha_i \sigma''_{i0} - \alpha'_i \sigma'_{i0}}{\alpha_i \sigma'_{i0} (\alpha'_i \pi - \sigma''_{i0})} \quad (10b)$$

这时,新的参数长度为 $\alpha'_i \pi$, 新的相互作用点参数是 σ''_{i0} . 变换(10)应与变换

$$\sigma''_i = \frac{a''_i \sigma_i}{b''_i \sigma_i + 1} \quad (11a)$$

$$a''_i = \frac{\sigma''_{i0} \alpha_i}{\alpha'_i \pi - \sigma''_{i0}}, \quad b''_i = \frac{2 \sigma''_{i0} - \alpha'_i \pi}{\pi(\alpha'_i \pi - \sigma''_{i0})} \quad (11b)$$

相一致. 从而保证所有这些分式线性变换成群. 把(8)代入(11a), 再与(10a)比较, 则得:

$$a' = a''/a, \quad b' = \frac{b'' - b}{a} \quad (12)$$

由此解出的 a', b' 正好就是(10b). 容易证明,(10)的奇异点在 $\sigma'_i \leq 0$ 和 $\sigma'_i \geq \alpha_i \pi$ 处,等

号当且仅当 $\sigma'_{i0} = 0$ 和 $\sigma'_{i0} = \alpha_i \pi$ 时成立. 这也给为什么不可能通过一个 σ 的实共形变换使 Witten 图象与 CK 或 SCSV 图象相联系以一个注释. 从图 2(b) 看, 若使 $X'_i(\sigma'_{i0}) = X'_i(0)$, 则两维量子场论的局域性就被破坏.

我们知道, 变换(8)可以形成 $SL(2, R)$ 的一个子群, 由生成元 L_0, L_1 生成:

$$L_0 = \sigma \frac{d}{d\sigma}, \quad L_1 = \sigma^2 \frac{d}{d\sigma} \quad (13)$$

所以存在 $\epsilon_0^i, \epsilon_1^i$, 使

$$\sigma'_i = \exp(\epsilon_0^i L_0 + \epsilon_1^i L_1) \sigma_i \quad (14)$$

现在, 我们还不知道相互作用点 σ'_{i0} 是任意值时 $\epsilon_0^i, \epsilon_1^i$ 的明显形式. 但当 $0 \leq \sigma'_{i0} \leq \frac{2\alpha_i \pi}{3}$ 时, (8) 可作级数展开, 这时, 与(14)的级数展开比较可得:

$$\epsilon_0^i = \ln a_i, \quad \epsilon_1^i = \frac{b_i \ln a_i}{1 - a_i} \quad (15)$$

由(6), 就可以得到相互作用顶角的明显形式

$$V_3[i, j, k, \mu] = \exp\{\epsilon_n^A b_n^A, Q\} V_3[ijk], \quad A = i, j, k, \quad n = 0, 1 \quad (16)$$

其中 $V_3[ijk]$ 的明显形式已由文献[2]给出.

四、不能用实共形变换与 Witten 图象相联系的图象的例子

现在, 我们转向讨论另一种相互作用图象. 如图 3 所示, 它的 δ 函数 overlap 是

$$\begin{aligned} \delta_{123} = & \prod_{0 \leq \sigma \leq \sigma_0} \delta(X^1(\sigma) - X^2(\alpha_2 \pi - \sigma)) \\ & \prod_{0 \leq \sigma \leq \alpha_2 \pi - \sigma_0} \delta(X^2(\sigma) - X^3(\alpha_3 \pi - \sigma)) \\ & \prod_{0 \leq \sigma \leq \alpha_1 \pi - \sigma_0} \delta(X^3(\sigma) - X^1(\alpha_1 \pi - \sigma)) \\ & \times (\text{ghost part}) = \delta_{123}^{\alpha_1^2} \delta_{123}^{\alpha_2^2} \end{aligned} \quad (17)$$

这种相互作用的顶角算子可以写成(只写 $\delta_{123}^{\alpha_1^2}$ 部分)

$$|V_3\rangle = \int \prod_{r=1}^3 \mathcal{D}X^r(\sigma) \delta_{123}^{\alpha_1^2} |X_1(\sigma)\rangle |X_2(\sigma)\rangle |X_3(\sigma)\rangle \quad (18)$$

作傅氏展开,

$$X^r(\sigma) = X_0^r + 2 \sum_{n=0}^{\infty} X_n^r \cos n\sigma/\alpha_r \quad (19)$$

$$X_n^r = 1/\sqrt{2} (a_n^r - a_n^{r+})$$

则在 Fock 空间, 顶角算子是

$$|V_3\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} a_m^{r+} N_{mn}^{r'} a_n^{i+}\right) |0\rangle_{123} \quad (20)$$

其中 $N_{mn}^{r'} = 2 S_{mk} M_{k'l}^{-1} S_{nl}^r + \delta^{rl} \delta_{mn}$

$$S_{mk} = [(1 - \delta_{k0})k + \delta_{k0}]^{1/2} (B_{mn}^{13}, B_{mn}^{23}, \delta_{mn})$$

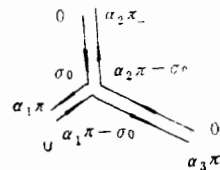


图 3 满足 $(\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1)\pi + 2\sigma_0 = 0$

$$\begin{aligned}
M_{mn} &= [(1 - \delta_{k_0})k + \delta_{k_0}](B_{k_m}^{13} B_{k_n}^{13} + B_{k_m}^{23} B_{k_n}^{23} + \delta_{k_m} \delta_{k_n}) \\
B^{13} &= (1 - A^{12} A^{21})^{-1} (A^{12} A^{23} + A^{13}) \\
B^{23} &= (1 - A^{23} A^{12})^{-1} (A^{23} A^{13} + A^{23}) \\
A^{12} &= \frac{1}{\alpha_1 \pi} \begin{pmatrix} \sigma_0, (-)^n \frac{2\alpha_2}{n} \sin \frac{n\sigma_0}{2} \\ \frac{\alpha_1}{m} \sin \frac{m\sigma_0}{\alpha_1}, (-)^n D_{mn}(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_0) \end{pmatrix} \\
A^{13} &= \frac{1}{\alpha_2 \pi} \begin{pmatrix} \alpha_1 \pi - \sigma_0, \frac{2\alpha_3}{n} \sin \frac{\alpha_1 \pi - \sigma_0}{\alpha_3} n \\ -\frac{\alpha_1}{m} \sin \frac{m\sigma_0}{\alpha_1}, (-)^n D_{mn}(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_0) \end{pmatrix} \\
A^{23} &= \frac{1}{\alpha_2 \pi} \begin{pmatrix} \alpha_2 \pi - \sigma_0, (-)^n \frac{2\alpha_3}{n} \sin \frac{\alpha_2 \pi - \sigma_0}{\alpha_3} n \\ (-)^{m+1} \frac{\alpha_2}{m} \sin \frac{m\sigma_0}{\alpha_2}, (-)^n D_{mn}(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 \pi - \sigma_0) \end{pmatrix} \\
A^{21} &= \frac{1}{\alpha_2 \pi} \begin{pmatrix} \sigma_0, \frac{2\alpha_1}{n} \sin \frac{n\sigma_0}{\alpha_1} \\ (-)^m \frac{\alpha_2}{m} \sin \frac{m\sigma_0}{\alpha_2}, (-)^m D_{mn}(\alpha_2, \alpha_1, \sigma_0) \end{pmatrix} \quad (21) \\
A^{31} &= \frac{1}{\alpha_3 \pi} \begin{pmatrix} \alpha_1 \pi - \sigma_0, \frac{2\alpha_1}{n} \sin \frac{n\sigma_0}{\alpha_1} \\ \frac{\alpha_3}{m} \sin \frac{\alpha_1 \pi - \sigma_0}{\alpha_3} m, (-)^m D_{mn}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1 \pi - \sigma_0) \end{pmatrix} \\
A^{32} &= \frac{1}{\alpha_3 \pi} \begin{pmatrix} \sigma_0, \frac{2\alpha_3}{n} \sin \frac{\alpha_2 \pi - \sigma_0}{\alpha_2} n \\ -\frac{\alpha_3}{m} \sin \frac{\alpha_1 \pi - \sigma_0}{\alpha_3} m, (-)^m D_{mn}(\alpha_3, \alpha_2, \alpha_2 \pi - \sigma_0) \end{pmatrix} \\
D_{mn}(\alpha_i, \alpha_j, \sigma) &= \alpha_i \alpha_j \left[\frac{\sin \frac{\alpha_i n - \alpha_j m}{\alpha_i \alpha_j}}{\alpha_i n - \alpha_j m} + \frac{\sin \frac{\alpha_i n + \alpha_j m}{\alpha_i \alpha_j}}{\alpha_i n + \alpha_j m} \right]
\end{aligned}$$

鬼场的相互作用可类似地得到。现在我们还不能证明这个顶角算子是否是 BRST 不变的,但可证明,这种相互作用图象与 Witten 的图象一般不能通过 σ 的实共形变换相联系。

如果 Witten 图象图 1(a) 可以通过共形变换到图 3, 又满足(17), 则要求:

$$\sigma'_1 = f_1(\sigma_1), \quad 0 \leq \sigma_1 \leq \pi, \quad f_1(0) = 0, \quad f_1(\pi) = \alpha_1 \pi, \quad f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sigma'_1 \quad (22a)$$

$$\sigma'_2 = f_2(\sigma_2) = \begin{cases} \alpha_2 \pi - f_1(\pi - \sigma_2), & \frac{\pi}{2} \leq \sigma_2 \leq \pi \\ f_2(\sigma_2), & 0 \leq \sigma_2 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (22b)$$

$$\sigma'_3 = f_3(\sigma_3) = \begin{cases} \alpha_1\pi - f_1(\pi - \sigma_3), & 0 \leq \sigma_3 \leq \pi/2 \\ \alpha_3\pi - f_2(\pi - \sigma_3), & \frac{\pi}{2} \leq \sigma_3 \leq \pi \end{cases} \quad (22c)$$

由于 f_1, f_2, f_3 都是实共形变换, 于是还满足(这里假设相互作用点的实共形变换非奇异)

$$\begin{cases} \alpha_2\pi - f_1\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)^n f_1(\pi - \sigma_2) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)^n f_2(\sigma_2) \Big|_{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (23a)$$

$$\begin{cases} \alpha_3\pi - f_1\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \alpha_1\pi - f_2\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \\ \left(\frac{\partial}{\partial\sigma_3}\right)^n f_1(\pi - \sigma_3) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma_3}\right)^n f_2(\pi - \sigma_3) \Big|_{\frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (23b)$$

用(22), (23)及在 $\sigma = \frac{\pi}{2}$ 处的 Taylor 级数可以把 $[0, \pi]$ 内的解析函数完全确定这一事实

可得: 只有 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \sigma'_{10} = \sigma'_{20} = \sigma'_{30} = \frac{2\pi}{2}, f_1 \equiv f_2 \equiv f_3 \equiv f$ 时, 两种图象才能用共形变换相联系, 且

$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)^{2n} f(\sigma) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

也就是说, 保 Witten 图象的 δ 函数 overlap 条件的共形变换只有三弦相同的整体标度变换和 k_n 变换^[2]. 所以, 对 $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3$, 这种相互作用图象与 Witten 图象没有实的共形等价性. 以上我们讨论了两类具有不同性质的相互作用图象. 但是究竟有多少不同的相互作用图象? 他们之间有什么联系? 是否给出相同的物理结果? 这些都有待于进一步讨论.

作者感谢郭汉英教授对我们的多方面的关心和十分有益的讨论. 还感谢王清、赵卫东和陈伟与我们的有用的讨论.

参 考 文 献

- [1] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B268**(1986), 253; **B276**(1986), 291.
- [2] D. J. Gross and A. Jevicki, *Nucl. Phys.*, **B283**(1987), 1; **B287**(1987), 225.
- [3] A. Neveu and P. C. West, *Phys. Lett.*, **168B**(1986), 192; H. Hata, K. Itoh, T. Kugo, H. Kunitomo and K. Ogawa, *Phys. Lett.*, **172B**(1986), 186; 195.
- [4] P. DiVecchia, R. Nakayma, J. L. Peterson and S. Sciuto, *Nucl. Phys.*, **B282**(1987), 103.
- [5] S. Sciuto, *Lett. Nuovo. Cimento*, 2(1969), 411; L. Caneschi, A. Schwimmer and G. Veneziano, *Phys. Lett.*, **30B**(1969), 351.
- [6] T. Banks, SLAC-PUB-3996(1986).
- [7] S. P. De Alwis, *Phys. Lett.*, **189B**(1987), 405.

不变
系.

(2a)

(2b)

VERTEX OPERATORS AND DIFFERENT STRING INTERACTING PICTURES

HU HONGLIANG YU YUE

(Zhejiang University, Hangzhou)

XIONG CHUANSHENG

(Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing)

ABSTRACT

This paper discussed the conformal transformation between the Witten's string field interacting picture and other pictures. Two kinds of different interacting pictures and explicit forms of their vertex operators are given. One of them can not relate to witten's picture in conformal transformation but another can.