第12卷 第6期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 6
1988年11月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Nov., 1988

广义 Noether 恒等式与守恒荷

李子平
(北京工业大学)

摘 要

考虑非不变作用量系统在无限连续群下的变换性质，导致了广义 Noether 恒等式，由此可导出系统的强守恒律和弱守恒律，给出与此相联系的重质量杨-Mills 场守恒的 PBRS 荷，它有别于守恒的 BRS 荷．讨论了变更性系统的 Dirac 约束．

一

系统的作用量在无限连续群下的不变性所导致的 Noether 恒等式[1]，在电动力学、广义相对论、流体力学和规范场理论等诸方面的应用已为许多作者所讨论[2,3]，然而，在重质量杨-Mills 场理论中，其作用量(或拉氏量)在规范变换下一般是变更的，即使是在不变性理论中，其拉氏量在每个场的单独变换下也是变更的，因此，研究变更性系统在无限连续群下的变换性质是必要的，我们曾导出了变更性系统的广义 Noether 恒等式[4]．这里我们略加修改并进一步导出在变换下系统的强守恒律，沿着系统运动的轨线，广义 Noether 恒等式或强守恒律可化为(弱)守恒律，此种程式与 Noether 第一定理在有限连续群下系统的不变性导致(弱)守恒律的情形是完全不同的．对于一种可重整的重质量杨-Mills 场[5]，由强守恒律我们得到的 PBRS 守恒荷 $Q^{(P)}$，它与守恒的 BRS 荷$Q^{(B)}$是不同的．最后我们指出了非不变拉氏量系统具有 Dirac 约束的条件．

二

设系统的作用量为 $I=\int_\Omega \mathscr{L}(x,\ \phi_\alpha,\ \phi_{\alpha,\mu})d\Omega$，在无穷小变换

$$\begin{aligned} x_\mu \to x'_\mu &= x_\mu + R^i_\mu \varepsilon^i, \\ \phi_\alpha \to \phi'_\alpha &= \phi_\alpha + S^i_\alpha \varepsilon^i \end{aligned} \tag{1}$$

下，如果作用量 I 的变更为

$$\delta I=\int_\Omega [\partial_\mu(\Lambda^i_\mu \varepsilon^i)+U^i\varepsilon^i]d\Omega, \tag{2}$$

其中 $\varepsilon^i=\varepsilon^i(x)(i=1,\ 2,\cdots,\ r)$为任意函数，$R^i_\mu$，$S^i_\alpha$，$\Lambda^i_\mu$ 和 U^i 均为线性算符，而

本文 1987 年 11 月 2 日收到．

$x=(\boldsymbol{r},\ it)$. 在变换(1)下，我们有

$$\int_\Omega \frac{\delta I}{\delta\phi^\alpha}\ (S^i_\alpha-\phi_{\alpha,\mu}R^i_\mu)\varepsilon^i d\Omega+\int_\Sigma d\sigma_\mu j^i_\mu\varepsilon^i$$

$$=\int_\Omega[\partial_\mu(\Lambda^i_\mu\varepsilon^i)+U^i\varepsilon^i]d\Omega, \tag{3}$$

其中

$$\frac{\delta I}{\delta\phi_\alpha}=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_\alpha}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}\right), \tag{4}$$

$$j^i_\mu=\left(\mathscr{L}\delta_{\mu\nu}-\phi_{\alpha,\nu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}\right)R^i_\nu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi_{\alpha,\mu}}S^i_\alpha-\Lambda^i_\mu, \tag{5}$$

Σ 为区域 Ω 的边界．由于 $\varepsilon^i(x)$ 任意，可选 $\varepsilon^i(x)$ 使表达式(3)中的边界项为零，然后对该式分部积分且边界项仍为零，于是得

$$\tilde{S}^i_\alpha\left(\frac{\delta I}{\delta\phi_\alpha}\right)-\tilde{R}^i_\mu\left(\frac{\delta I}{\delta\phi_\alpha}\phi_{\alpha,\mu}\right)=\tilde{U}^i(1), \tag{6}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

其中 $\tilde{S}^i_\alpha$，$\tilde{R}^i_\mu$ 和 $\tilde{U}^i$ 分别为 S^i_α，R^i_μ 和 U^i 的伴随算符． $\tilde{U}^i(1)$代表伴随算符作用于 1．我们称(6)式为广义 Noether 恒等式．

考虑变换(1)的一个特殊情况，设 R^i_μ 为 x，ϕ_α，$\phi_{\alpha,\mu}$ 的函数，$S^i_\alpha=a^i_\alpha+b^i_{\alpha\mu}\partial_\mu$，且

$$U^i=u^i+u^i_\mu\partial_\mu+u^i_{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu, \tag{7}$$

其中 a^i_α，$b^i_{\alpha\mu}$，u^i，u^i_μ，$u^i_{\mu\nu}$ 均为 x，ϕ_α，$\phi_{\alpha,\mu}$ 的函数． 此时由基础恒等式(3)和广义 Noether 恒等式(6)，我们得下列强守恒律(无论运动方程是否满足)，

$$\partial_\mu J_\mu=0, \tag{8}$$

$$J_\mu=j^i_\mu\varepsilon^i+b^i_{\alpha\mu}\frac{\delta I}{\delta\phi_\alpha}-u^i_\mu\varepsilon^i+(\partial_\nu u^i_{\mu\nu}\cdot\varepsilon^i-u^i_{\nu\mu}\partial_\nu\varepsilon^i). \tag{9}$$

沿着系统运动的轨线，$\dfrac{\delta I}{\delta\phi_\alpha}=0$，我们可得相应的(弱)守恒律．

三

考虑重质量杨-Mills 场[6]，其拉氏量为 $\mathscr{L}=\mathscr{L}_0+\mathscr{L}_1$，其中

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{10}$$

$$\mathscr{L}_1=\frac{1}{2}m^2A^a_\mu A^a_\mu+\lambda^a\partial_\mu A^a_\mu, \tag{11}$$

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu, \tag{12}$$

$\lambda^a=\lambda^a(x)$ 为乘子场，f^{abc} 为群的结构常数．在规范变换

$$\delta A^a_\mu=D^{ab}_\mu\varepsilon^b(x), \tag{13}$$

$$D^{ab}_\mu=\delta^{ab}\partial_\mu+gf^{acb}A^c_\mu \tag{14}$$

下，其拉氏量 $\mathscr{L}$ 是变更的．按广义 Noether 恒等式(6)，沿着系统运动的轨线，我们得(弱)守恒流 J^a_μ，

$$J_\mu^a = f^{abc}(A_\nu^b F_{\mu\nu}^c + A_\mu^b \lambda^c). \tag{15}$$

一般，设 $\mathscr{L}_1$ 为某一规范变更的拉氏量，如果 $I_1 = \int_\Omega \mathscr{L}_1 d\Omega$ 的泛函导数适合

$$-gf^{abc} A_\mu^b \frac{\delta I_1}{\delta A_\mu^c} = \partial_\mu j_\mu^a, \tag{16}$$

那么，在 A_μ^a 的规范变换下，沿着系统运动的轨线，广义 Noether 恒等式将导至(弱)守恒流

$$J_\mu^a = j_\mu^a + gf^{abc} A_\nu^b F_{\mu\nu}^c. \tag{17}$$

四

一种重质量杨-Mills 场的拉氏量为[5]

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - A_\mu^a \partial_\mu \eta^a - \frac{1}{2} m^2 (K_\mu^a - A_\mu^a)(K_\mu^a - A_\mu^a) + i\partial_\mu \bar{C}^a D_\mu^{ab} C^b, \tag{18}$$

$$K_\mu^a = K^{ab} \partial_\mu \xi^b, \tag{19}$$

其中 ξ^a 为辅助场，η^a 为乘子场，C^a,$\bar{C}^a$ 为 FP 鬼场，K^{ab} 为 ξ^a的函数．对相关场的 BRS 对称性已确立且重整化结构已讨论[5]．BRS 不变性产生的 BRS 荷 $Q^{(B)}$，它作用在物理态上给出 KO 型附加条件[7]．然而，类似于泛函积分中的 WT 恒等式，我们可以仅单独考虑 BRS 变换中 A_μ^a 的变更，并称为部分 BRS 变换 (PBRS)，即

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ab} \theta^b, \quad \theta^a = \tau C^a, \tag{20}$$
$$\delta\xi^a = \delta\eta^a = \delta C^a = \delta\bar{C}^a = 0,$$

其中 τ 是与 x 无关的数，它与 C^a, $\bar{C}^a$ 反对易，τ 相应于经典意义下的 Grassman 数．在变换(20)下，沿着系统运动的轨线，由强守恒流(9)式，可得(弱)守恒的 PBRS 流

$$J_\mu^{(P)} = -F_{\mu\nu}^a D_\nu^{ab} C^b + \partial_\mu \eta^a C^a - m^2 (K_\mu^a - A_\mu^a) C^a + igf^{abc} \partial_\mu \bar{C}^a C^b C^c. \tag{21}$$

此结果可由运动方程直接检验．如果在拉氏量(18)式中以 $\eta^a \partial_\mu A_\mu^a$ 代替 $-A_\mu^a \partial_\mu \eta^a$，那么，(20)式中的 $\partial_\mu \eta^a C^a$ 将换为 $\partial_\mu \eta^a C^a - \eta^a D_\mu^{ab} C^b$． 因此，我们得到此系统另外的(弱)守恒 PBRS 荷 $Q^{(P)} = -i \int J_4^{(P)} d^3x$，此荷与 BRS(弱)守恒荷是不同的[5]．

类似地，如果规范场 A_μ^a 不改变，仅分别单独改变 BRS 变换中的场 C^a, $\bar{C}^a$, ξ^a，沿着系统运动的轨线，强守恒流(9)化为平凡的等式．

从上述讨论我们看出，在某些情形下，广义 Noether 恒等式(6)或强守恒流(9)式可化为(弱)守恒流，给出守恒荷，这种程式与 Noether 第一定理在有限连续群下的不变性导致系统守恒律的程式是完全不同的．

五

最后，我们顺便指出，考虑变换(1)中 R_μ^i 为函数，$S_\alpha^i = a_\alpha^i + b_{\alpha\mu}^i \partial_\mu$ 的情形，假使(7)式中的 $u_{\mu\nu}^i$ 不含 $\psi_{\alpha,\mu}$，那么，该系统的拉氏量是奇异的，系统具有 Dirac 约束．事实上，此时 $\tilde{U}^i(1)$不含 ψ_α 的三阶微商，将 $\delta I/\delta\psi_\alpha$ 的表达式代入广义 Noether 恒等式(6)，含 ψ_α

三阶导数的项之和为零，可得[8]

$$b^i_{\alpha\mu} H_{\alpha\beta\rho\sigma} \phi_{\beta,\mu\rho\sigma} = 0, \tag{22}$$

其中

$$H_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \phi_{\alpha,\rho} \partial \phi_{\beta,\sigma}}, \tag{23}$$

表达式(22)对任意 ϕ_β 的三阶导数均满足，从而可得[8]

$$det|H_{\alpha\beta44}| = 0. \tag{24}$$

即$\mathscr{L}$的 Hessian 矩阵是奇异的，$\mathscr{L}$为奇异拉氏量，系统具有 Dirac 约束．一般，重质量杨-Mills 场的拉氏量就属于这种情况．这样，由广义 Noether 恒等式还可判断系统是否具有 Dirac 约束．

参　考　文　献

[1] Noether, E., Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, *Math.-Phys.*, Kl. II **1918**(1918), 235.

[2] Drobot, S. and Rybarski, A., *Rational Mech. Anal.*, **2**(1958—1959), 393.

[3] Sundermeyer, K., Constrained Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heideberg, 1982, Printed in Germany.

[4] 李子平，物理学报，**35**(1986)，553.

[5] Fukuda, T., Monda, M., Takeda, M. and Yokoyama, K-I., *Prog .Theor. Phys.*, **66**(1981), 1872; **67**(1982), 1206; **70**(1983), 284.

[6] Nakanishi, N., *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 1324; 李子平，高能物理与核物理，**6**(1982)，555.

[7] Kugo, T. and Ojima, I., *Phys. Letters*, **73B**(1978), 459; *Prog. Theor. Phys.*, **60**(1978), 1896; **61**(1979), 294; 644; *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, No. **66**(1979), 1.

[8] Bergmann, P. G., *Phys. Rev.*, **75**(1949), 680.

THE GENERALIZED NOETHER'S IDENTITIES AND CONSERVED CHARGE

LI ZIPING

(Beijing Polytechnic University)

ABSTRACT

We consider the transformation properties of the system with non-invariance action integral under the infinite continuous group which yields the generalized Noether's identities, from which we can deduce the strong and weak conservation laws of this system and in connection with the conserved PBRS charge of the massive Yang-Mills field are given which deffers from the conserved BRS charge. The Dirac's constraint of the variance system are discussed.